Apoyo Multimedia

# Estadística aplicada en Psicología y Ciencias de la salud

Fabiola González Betanzos
María del Consuelo Escoto Ponce de León
Joanna Koral Chávez López

Manual Moderno®

# Estadística aplicada en Psicología y Ciencias de la salud

# Estadística aplicada en Psicología y Ciencias de la salud

**Dra. Fabiola González Betanzos**
Doctora en Metodología en Ciencias del Comportamiento y de la Salud,
Universidad Autónoma de Madrid.
Maestra en Metodología y Estadística en Ciencias del Comportamiento y de la Salud,
Universidad Complutense de Madrid.
Licenciada y Maestra en Psicología,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Perfil PRODEP. Integrante del Sistema Nacional de Investigadores.

**Dra. María del Consuelo Escoto Ponce de León**
Doctora en Psicología,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Maestra en Modificación de Conducta y Licenciada en Psicología,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Profesora de Tiempo Completo,
Universidad Autónoma del Estado de México.
Perfil PRODEP. Integrante del Sistema Nacional de Investigadores.

**Mtra. Joanna Koral Chávez López**
Maestra en Educación,
Universidad Interamericana para el Desarrollo.
Licenciada en Ingeniería en Sistemas Computacionales,
Instituto Tecnológico de Morelia.
Profesora de Tiempo Completo,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
Perfil PRODEP.

Editor responsable:
**Lic. Georgina Moreno Zarco**
Editorial El Manual Moderno

*Editorial El Manual Moderno S.A. de C.V.*
Av. Sonora 206 Col. Hipódromo, C.P. 06100 Ciudad de México

*Editorial El Manual Moderno Colombia S.A.S.*
Carrera 12-A No. 79-03/05 Bogotá, DC

**IMPORTANTE**

Los autores y la Editorial de esta obra han tenido el cuidado de comprobar que las dosis y esquemas terapéuticos sean correctos y compatibles con los estándares de aceptación general en la fecha de la publicación. Sin embargo, es difícil estar por completo seguro que toda la información proporcionada es totalmente adecuada en todas las circunstancias. Se aconseja al lector consultar cuidadosamente el material de instrucciones e información incluido en el inserto del empaque de cada agente o farmacoterapéutico antes de administrarlo. Es importante, en especial, cuando se utilizan medicamentos nuevos o de uso poco frecuente. La Editorial no se responsabiliza por cualquier alteración, pérdida o daño que pudiera ocurrir como consecuencia, directa o indirecta, por el uso y aplicación de cualquier parte del contenido de la presente obra.

**Nos interesa su opinión, comuníquese con nosotros:**

**Editorial El Manual Moderno S.A. de C.V.**

Av. Sonora 206, Col. Hipodromo, Deleg. Cuauhtémoc. 06100 Ciudad de México, México

(52-55) 52-65-11-00

info@manualmoderno.com

quejas@manualmoderno.com

**Estadística aplicada en Psicología y Ciencias de la salud**
D.R. © 2017 por Editorial El Manual Moderno, S.A. de C.V.
ISBN: 978-607-448-640-7 (versión electrónica)

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. núm. 39

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida sin permiso previo por escrito de la Editorial.

**Para mayor información sobre**

Catálogo de producto
Novedades
Distribuciones y más
www.manualmoderno.com

Director editorial y de producción:
**Dr. José Luis Morales Saavedra**

Editora de desarrollo:
**Tania Flor García San Juan**

Diseño de portada:
**Lic. Mariana Castillo López**

Lectura final:
**Lic. José Antonio Martínez Pineda**

# Colaboradores

**Erika Álvarez Álvarez**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
*Capítulo 2*

**Omar Arce Rodríguez**
Universidad de Guadalajara, Centro Universitario del Sur
*Capítulo 11*

**Lilián Elizabeth Bosques Brugada**
Universidad Autónoma del Estado de México
*Capítulo 6*

**José Jaime Camacho Escoto**
Instituto Politécnico Nacional
*Capítulo 8*

**Esteban Jaime Camacho Ruiz**
Universidad Autónoma del Estado de México
*Capítulo 6, 8*

**Brenda Sarahi Cervantes Luna**
Universidad Autónoma del Estado de México
*Capítulo 1, 8*

**Ismael Díaz Rangel**
Universidad Autónoma del Estado de México
*Capítulo 7*

**Felipe de Jesús Díaz Reséndiz**
Universidad de Guadalajara, Centro Universitario del Sur
*Capítulo 11*

**Oscar Armando Esparza Del Villar**
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
*Capítulo 5*

**Karina Franco Paredes**
Universidad de Guadalajara, Centro Universitario del Sur
*Capítulo 11*

**Mónica Fulgencio Juárez**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

*Capítulo 10*

**Adriana Patricia González Zepeda**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
*Capítulo 2*

**Esperanza Guarneros Reyes**
Universidad Nacional Autónoma de México
*Capítulo 3, 12*

**Claudia Angélica Hernández Rodríguez**
Instituto Politécnico Nacional
*Capítulo 7*

**Manuel Leonardo Ibarra Espinosa**
Universidad Autónoma del Estado de México
*Capítulo 8*

**Oliverio Leonel Linares Olivas**
Universidad Juárez del Estado de Durango
*Capítulo 1*

**Cosme Francisco Maldonado Rivera**
Universidad Juárez del Estado de Durango
*Capítulo 1*

**Priscila Montañez Alvarado**
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
*Capítulo 5*

**Gabriela Navarro Contreras**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
*Capítulo 10*

**Carlos N. Nava Quiroz**
Universidad Nacional Autónoma de México
*Capítulo 4*

**Roberto Oropeza Tena**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
*Capítulo 10*

**Leticia Pesqueira Leal**
Universidad Juárez del Estado de Durango
*Capítulo 1*

**Juan Quiñones Soto**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
*Capítulo 5*

**Jorge Regalado Meza**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
*Capítulo 12*

**Gabriela Rodríguez Hernández**
Universidad Autónoma del Estado de México
*Capítulo 6*

**Ma. Leticia Serna González**
IMCED. Zitácuaro
*Capítulo 9*

**Patricia Serna González**
Universidad Pedagógica Nacional. Unidad 161 Morelia
*Capítulo 9*

**Arturo Silva Rodríguez**
Universidad Nacional Autónoma de México
*Capítulo 3, 12*

**Cynthia Zaira Vega Valero**
Universidad Nacional Autónoma de México
*Capítulo 4*

**Rodolfo Zaragoza Sánchez**
Universidad Pedagógica Nacional. Unidad 161 Morelia
*Capítulo 9*

# Revisores técnicos

**Sonia Janeth Romero Martínez**
Universidad a Distancia de Madrid

**Xavier Giovanni Ordoñez Camacho**
Universidad Complutense de Madrid

**Erwin Rogelio Villuendas González**
**Karina Mariela Figueroa Mora**
**María Elena Rivera Heredia**
**Elsa Edith Zalapa Lúa**
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

**Kenner Ordónez Lacayo**
Instituto de Investigaciones Psicológicas

**Andrés Felipe Antivilo Bruma**
**Rodrigo Asún**
Universidad de Chile

**Marcelo Leiva-Bianchi**
Universidad de Talca, Chile

**Olga Rosalba Rodríguez Jiménez**
Universidad Nacional de Colombia

**Editor de Ejercicios en R:**
**Ismael Díaz Rangel**
CU-Ecatepec, Universidad Autónoma del Estado de México

**Guaner Rojas Rojas**
**Kenner Ordóñez Lacayo**
Universidad de Costa Rica

# Prefacio

**Estadística aplicada en Psicología y Ciencias de la salud** es una obra que guía a los usuarios que se internan por primera vez en el uso de la estadística. Su finalidad es proporcionar al lector una herramienta para organizar, procesar y analizar variables cuantitativas y cualitativas, y así lograr emitir juicios sustentados en evidencia sólida.

El libro contiene 12 capítulos. En cada capítulo se desarrolla el contenido del tema, a partir de un problema. En ellos se encontrará una gran cantidad de ejercicios de autocomprobación y voluntarios, con sus respectivas soluciones, además de un glosario de términos. Una aportación importante de esta obra es la incorporación de apoyos en línea para el uso y manejo de los principales contenidos del libro.

En un primer momento, el libro introduce al lector a los conceptos básicos, utilidad, alcances de la estadística, dentro del proceso de investigación y se hace la distinción entre estadística descriptiva e inferencial (capítulos 1 y 2). Después se aborda la organización y presentación de los datos en tablas y gráficas, así como su representación con técnicas descriptivas (capítulo 3). La estadística inferencial, la cual incluye elementos como el muestreo, la estimación de parámetros y el contraste de hipótesis mediante los pasos de inferencia estadística, se aborda en el capítulo 4.

Finalmente, a partir del capítulo 5 se describen las pruebas estadísticas de asociación y comparación, tanto paramétricas como no paramétricas y sus supuestos, con el propósito de que los usuarios del libro aprendan a seleccionar el estadístico más idóneo y comprueben sus requisitos a partir del tipo de datos que se tienen (variables cualitativas, cuantitativas o ambas) y el propósito del estudio. En cada uno de estos capítulos, el lector aprenderá a seleccionar el tipo de prueba y a comprobar sus supuestos, así como a establecer las hipótesis. Por último, el usuario del libro aprenderá a calcular los estadísticos y su probabilidad de ocurrencia, para interpretar los resultados y aceptar o rechazar la hipótesis nula.

**Descarga el apoyo multimedia en la página: www.manualmoderno.com/gonzalez**

# Contenido

Colaboradores
Revisores técnicos
Prefacio

Capítulo 1. Introducción a la estadística
*Brenda Sarahi Cervantes Luna, Cosme Francisco Maldonado Rivera, Oliverio Leonel Linares Olivas, Leticia Pesqueira Leal*

Capítulo 2. Conceptos iniciales
*Erika Álvarez Álvarez, Adriana Patricia González Zepeda, Joanna Koral Chávez López*

Capítulo 3. Análisis descriptivo de una variable cuantitativa
*Esperanza Guarneros Reyes, Arturo Silva Rodríguez*

Capítulo 4. Introducción a la inferencia estadística
*Carlos N. Nava Quiroz, Cynthia Zaira Vega Valero*

Capítulo 5. Relación entre variables: dos cuantitativas (Correlación de Pearson)
*Oscar Armando Esparza Del Villar, Juan Quiñones Soto, Priscila Montañez Alvarado*

Capítulo 6. Relación entre variables: una cualitativa categórica y una cuantitativa (Correlación de Spearman)
*Lilián Elizabeth Bosques Brugada, Esteban Jaime Camacho Ruíz, Gabriela Rodríguez Hernández*

Capítulo 7. Relación entre variables: dos variables cualitativas ($X^2$ de Pearson)
*María del Consuelo Escoto Ponce de León, Ismael Díaz Rangel, Claudia Angélica Hernández Rodríguez*

Capítulo 8. Pruebas de diferencia sobre una variable cuantitativa (Prueba t Student para muestras independientes o relacionadas)
*Esteban Jaime Camacho Ruiz, Brenda Sarahi Cervantes Luna, Manuel Leonardo Ibarra Espinosa, José Jaime Camacho Escoto*

Capítulo 9. Pruebas de diferencia sobre una variable categórica ordinal (Rangos con signo de Wilcoxon para muestras Relacionadas, U de Mann-Whitney para dos grupos independientes, Kruskall-Wallis y el ANOVA de Friedman)
*Patricia Serna González, Rodolfo Zaragoza Sánchez, Ma. Leticia Serna González, Fabiola González Betanzos*

Capítulo 10. Prueba de diferencia sobre una variable categórica nominal (Prueba binomial del signo)
*Mónica Fulgencio Juárez, Roberto Oropeza Tena, Gabriela Navarro Contreras*

Capítulo 11. Pruebas de diferencia sobre una variable cuantitativa (Prueba F de un factor con medidas repetidas)
*Felipe de Jesús Díaz Reséndiz, Karina Franco Paredes, Omar Arce Rodríguez*

Capítulo 12. Análisis de regresión lineal (Regresión lineal simple)
*Arturo Silva Rodríguez, Esperanza Guarneros Reyes, Jorge Regalado Meza*

Apéndices

# Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

*Brenda Sarahi Cervantes Luna, Cosme Francisco Maldonado Rivera,*
*Oliverio Leonel Linares Olivas, Leticia Pesqueira Leal*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

El objetivo de este capítulo es hacer una aproximación del concepto de estadística a estudiantes y profesionales de las ciencias del comportamiento. Asimismo, se pretende que los lectores identifiquen la utilidad de la estadística y sus alcances dentro del proceso de investigación (exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo), además de los conceptos fundamentales dentro de los que se enmarca la estadística, como es el caso de las teorías, constructos, variables y escalas de medición.

## ¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

La estadística es una disciplina matemática que, con base en una **metodología** científica, permite la recolección, organización, presentación, análisis e interpretación de un conjunto de datos. Existen dos tipos de estadística (Batanero, 2001):

- **Descriptiva:** permite resumir y representar las características de un conjunto de datos con fines de comparación.
- **Inferencial:** emplea modelos de distribución probabilística y, con base en información parcial o completa obtenida por medio de técnicas descriptivas, permite estimar una o varias características de la población. El **análisis** de los datos puede ser **paramétrico** o **no paramétrico**.

## LOS DATOS

Los datos son fragmentos de información que, al ser manejados estadísticamente, adquieren un significado que puede ser empleado en beneficio de la ciencia y la sociedad. Los datos pueden tener valores **constantes** o **variables.** Las constantes son un tipo de datos con valores fijos (p. ej., el valor de *pi* [p] = 3.1416); mientras que las variables adquieren valores diferentes en personas, lugares o cosas (p. ej., color de ojos, estatura, etc.). Los datos pueden ser de naturaleza cualitativa o cuantitativa (Araujo, 2011; Hair, Anderson, Tatham y Black, 2007).

# Datos cualitativos

Son aquellos que no se expresan con números y que representan atributos, características o propiedades dicotómicas o politómicas (tabla 1-1).

- **Datos dicotómicos (binarios):** son clasificados entre dos categorías.
- **Datos politómicos (categóricos):** son clasificados entre tres o más categorías.

**Tabla 1-1. Ejemplo de datos cualitativos**

| Cualidad/ atributo | Datos dicotómicos (binarios) | Cualidad/ atributo | Datos politómicos (categóricos) |
|---|---|---|---|
| Sexo | Hombre<br>Mujer | Color de ojos | Café<br>Verde<br>Gris<br>Negro |
| Género | Masculino<br>Femenino | Carrera que cursa | Psicología<br>Enfermería<br>Medicina<br>Nutrición<br>Trabajo social |
| Estado de salud | Sano<br>Enfermo | Estado civil | Soltero<br>Casado<br>Unión libre |
| Resultado académico | Aprobado<br>No aprobado | Nacionalidad | Mexicano<br>Argentino<br>Peruano |

# Datos cuantitativos

Son aquellos datos que se representan en grado o **cantidad**, por lo que son cuantificados o medidos. Existen dos tipos de datos cuantitativos (véase tabla 1-2):

**Tabla 1-2. Ejemplo de datos cuantitativos**

| Discretos | Continuos |
|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Número de personas | 33 asistentes<br>40 alumnos<br>7 hermanos<br>100 encuestados | Talla | 1.75 m |
| Número de infracciones | 5 pagadas<br>2 no pagadas | Peso | 1.5 kg de limón<br>0.5 t de arena<br>3.850 kg, el peso de un bebé |

- **Discretos:** son resultado del conteo y se expresan únicamente en valores enteros.
- **Continuos:** son los datos que resultan de la medición y corresponden a cualquier valor posible dentro de un rango que no se restringe a números enteros, por lo que pueden estar representados por valores decimales.

## USOS DE ESTADÍSTICA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DEL COMPORTAMIENTO Y DE LA SALUD

El análisis estadístico de los datos permite realizar **conclusiones científicas** orientadas a la solución de problemas sociales, económicos, médicos, políticos, ecológicos, entre otros (Asociación Americana de Estadística [ASA, por sus siglas en inglés], 2016). Es decir, la estadística permite organizar la información y emitir **juicios** sustentados en **evidencia** sólida, de tal modo que se promueva el uso eficiente de los recursos económicos, legales, humanos, materiales y de cualquier naturaleza. Como ejemplo, a continuación se describen algunas situaciones que pueden presentarse durante la práctica profesional:

1. Una empresa publicó una vacante para ocupar el puesto de gerente de producción. Durante el proceso de reclutamiento se presentaron cinco candidatos que reúnen los requisitos, para ocupar el puesto. El responsable del departamento de Recursos Humanos debe seleccionar al candidato idóneo para ocupar el puesto.

   Todos los candidatos deben ser evaluados y la decisión puede fundamentarse en la comparación del puntaje obtenido en una batería de pruebas psicológicas.
2. Una institución educativa recibirá un financiamiento para implementar un programa de tutorías que permitirá atender a 20% de los estudiantes inscritos actualmente. ¿Cómo se puede elegir a los estudiantes que participar*á*n en el programa de tutorías?

   La decisión puede fundamentarse en el análisis estadístico del desempeño académico, un estudio socioeconómico y puntuaciones psicométricas de los estudiantes.
3. Un joven fue arrestado por haber ocasionado daños en propiedad ajena, sus abogados y familiares aducen impunibilidad debido a que tiene una discapacidad intelectual, pero los agentes aseguran que el joven sabe distinguir entre el bien y el mal. ¿Qué recomendación debe emitir el perito en psicología?¿la acusación procede o se deben retirar los cargos?

   La recomendación debe fundamentarse en una evaluación de las capacidades del joven.
4. Los representantes de una comunidad invirtieron sus recursos económicos en la implementación de estrategias

orientadas a la prevención del consumo de sustancias tóxicas, ¿cómo pueden saber si las estrategias funcionaron?

Los representantes deben comparar el consumo de sustancias tóxicas antes y después de la implementación de las estrategias de prevención.

## ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN: EXPLORATORIO, DESCRIPTIVO, CORRELACIONAL Y EXPLICATIVO

La investigación con alcance **exploratorio** permite estudiar fenómenos poco estudiados o cuando existen interrogantes que no han sido abordadas con anterioridad, por lo que permite conocer el estado general del fenómeno a estudiar. Por ejemplo, la investigación de Abarca y Sánchez (2005) permitió un primer acercamiento a la identificación de factores que contribuyeron a la deserción estudiantil en la Universidad de Costa Rica durante 1997. En este caso no se tenían referentes teóricos acerca de la deserción escolar en un contexto en particular, y por ello, los autores optaron por realizar una investigación exploratoria con el fin de tener una primera aproximación al fenómeno de interés.

El alcance **descriptivo** de la investigación, tal como su nombre lo indica, busca obtener una información detallada del fenómeno de estudio. Por ejemplo, en una investigación realizada con estudiantes desertores del programa de enfermería, Restrepo (2010) identificó que la deserción ocurre durante todos los semestres de la carrera, pero, la **proporción** más alta se ubicó entre primero y segundo semestre (27.8% y 16.7%, respectivamente), mientras que la más baja se identifica en el último semestre (2.8%). Asimismo, los estudiantes desertores identificaron que las asignaturas con mayor dificultad académica fueron Anatomía (25%), Semiología (19.4%) y Fisiología (16.7%). Por último, las principales razones que manifestaron los estudiantes para abandonar sus estudios fueron las: dificultades académicas, baja motivación y falta de gusto por la carrera. Como se puede apreciar, los autores describen el fenómeno de la deserción escolar a partir de frecuencias y porcentajes.

La investigación con alcance **correlacional**, permite describir la asociación entre dos o más variables con el objetivo de predecir su comportamiento futuro. Por ejemplo, Medrano, Galleano, Galera y del Valle (2010) plantean una relación –no significativa– entre la permanencia en la escuela y las creencias irracionales de los alumnos; es decir, aquellos estudiantes con creencias irracionales tendrían mayor probabilidad de abandonar sus estudios. Para corroborar esta información los autores destacan la necesidad de realizar estudios con muestras más amplias.

Por otro lado, no basta con identificar si existe asociación entre dos o más variables, sino que es imprescindible conocer cómo es dicha asociación. De esta manera, el alcance **explicativo** permite determinar la **relación** de causa-efecto entre las variables de interés. Por ejemplo, en el ámbito educativo, Caso y Hernández-Guzmán (2010) desarrollaron y evaluaron un modelo que explica la contribución de la autoestima, las habilidades de estudio, el establecimiento de metas y el consumo de sustancias sobre el rendimiento académico.

Como se puede observar, el nivel de complejidad de la investigación va incrementando en sus alcances y en el tipo de información que se obtiene, de tal modo que el alcance explicativo corresponde al nivel máximo de una investigación, por lo que puede contener elementos que caracterizan al nivel correlacional y descriptivo. A su vez, el alcance correlacional incluirá elementos de los alcances que le anteceden y así sucesivamente (figura 1-1).

**Figura 1-1.** Alcances de la investigación.

Es importante tener en cuenta que la selección del alcance de investigación depende del estado actual del conocimiento científico sobre el fenómeno de interés, así como del planteamiento de la investigación.

## TEORÍAS, CONSTRUCTOS Y VARIABLES

De acuerdo con Kerlinger y Lee (2002/2008), la **teoría** es "un conjunto de constructos (conceptos) interrelacionados, definiciones y proposiciones que presentan una visión sistemática de los fenómenos al especificar las relaciones entre variables con el propósito de **explicar** y predecir los fenómenos" (p. 10). De este modo, la **teoría científica** es el conjunto de proposiciones construidas y organizadas a partir de la evidencia empírica, cuya finalidad es explicar sectores específicos de la realidad.

En el contexto de las ciencias de la conducta, las teorías surgen a partir de la investigación sistemática y del tratamiento estadístico de los datos. Como se mencionó al inicio del capítulo, los datos pueden expresarse en variables de tipo cualitativo y cuantitativo; en ambos casos, las variables son observadas directamente. Por ejemplo, es posible conocer la estatura de una persona por medio de una herramienta métrica (regla o estadímetro), el peso se determina mediante una báscula y la temperatura se mide con un termómetro. Sin embargo, en las ciencias del comportamiento la información proviene de datos que no son observados de manera directa, sino de la operacionalización de indicadores sobre un constructo en particular. Un **constructo** es un esquema teórico definido de tal manera que pueda ser observado y cuantificado (Kerlinger y Lee, 2002/2008). Por ejemplo, la personalidad es un constructo que no puede ser expresado en datos cualitativos o cuantitativos observados directamente, sino que se requiere de la medición de indicadores que, a partir de un modelo teórico en particular, representen dicho constructo.

# Escalas de medición de las variables

La medición consiste en asignar números a cosas o propiedades a partir de reglas previamente establecidas (Campbell, 1938); por ejemplo, si se desea comprar un pedazo de tela, se debe asignar un valor numérico a su longitud con base en una medida existente (p. ej. centímetro, metro, pulgada, pie, entre otros). La medición es necesaria para cuantificar los fenómenos y realizar el tratamiento estadístico de los datos, lo cual representa un reto para las ciencias del comportamiento, pues en éstas se requiere medir variables intangibles como la inteligencia, la personalidad y otros constructos. En este sentido, han pasado más de ocho décadas desde que la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia designó un comité para resolver el problema de medición de sensaciones humanas. Al respecto, Stevens (1946) reconoció que la información puede ser manipulada estadísticamente dependiendo del tipo de escala de medición en la que se encuentran los datos e identificó cuatro niveles de medición: **nominal, ordinal**, de **intervalo** y de **proporciones** o **razón**.

- **Escalas nominales:** es el nivel más primitivo y se caracteriza por el uso de números como etiquetas (dicotómicas o politómicas) que no expresan valores, por ejemplo:
  - Sexo:
    1. **Hombre.**
    2. **Mujer.**
  - Color de Cabello.
    1. **Negro.**
    2. **Rubio.**
    3. **Pelirrojo.**
    4. **Castaño.**
  - Asistencia a un taller
    1. **Presente.**
    2. **Ausente.**

  Como puede observarse, las escalas nominales están representadas por etiquetas numéricas que permitirán clasificar los datos obtenidos, pero nunca podrán ser ordenados con base en un valor numérico. La regla para trabajar con escalas nominales es: "no asigne el mismo número a diferentes clases o diferentes números a la misma clase" (Stevens, 1946, p. 679).
- **Escalas ordinales:** a diferencia de las escalas nominales, las ordinales involucran un orden de rango. Es decir, la escala ordinal permite ordenar los datos y saber si un valor es mayor o menor que otro; sin embargo, no es posible conocer la distancia real que existe entre los datos, por ejemplo:

**Nacimiento de los hijos**

1. Primogénito.
2. Segundo hijo.

Es decir, se sabe que el primogénito es el primer hijo de una persona y que el segundo hijo nació después que el primogénito, sin embargo, el primero y el segundo hijo pueden existir 10 años de diferencia, o quizá sean gemelos que nacieron en minutos distintos.

- **Escalas de intervalos:** en este tipo de escalas se conoce el orden en el que se ubican los datos, pero además se tiene información de la diferencia que existe entre los valores; por ejemplo, la diferencia que existe entre el 5 y 6 °C

es la misma que hay entre 22 y 23 °C. Otra característica de este tipo de escalas es la existencia de un cero arbitrario; es decir, si un niño puntúa cero en una prueba de inteligencia no significa que posea cero inteligencia, ni siquiera que todos los niños que obtienen puntuación de cero posean el mismo nivel intelectual.

- **Escalas de proporciones o de razón:** permiten ordenar los datos, establecer el margen de diferencia entre diferentes medidas, así como la razón existente entre ellas. También existe un "cero absoluto", es decir, que el valor cero en la escala representa el cero en la variable real. Aunque en las ciencias de la conducta no hay muchos casos de estas escalas, se puede ejemplificar con el ingreso económico: una persona que gana $10 000 al mes gana la mitad que alguien que gana $20 000 o el doble de lo que gana alguien con $5 000; o con la estatura: un hombre de 1.80 m es 12.5% más alto que una chica de 1.60 m.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**1.** Lea los siguientes ejemplos e identifique el tipo de datos al que hacen referencia. Marque con una X las columnas correspondientes.

| Número | Ejemplo | Constante | Variable | Cualitativo | Cuantitativo | Continuo | Discreto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Número de lados de un cuadrado | | | | | | |
| 2 | Cantidad de personas que viajan en un autobús | | | | | | |
| 3 | Tiempo empleado para completar una tarea | | | | | | |
| 4 | Puntos obtenidos al tirar los dados | | | | | | |
| 5 | Religión practicada en la familia | | | | | | |
| 6 | Estatura de los padres | | | | | | |
| 7 | Cantidad de respuestas acertadas en un examen | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | Número de reactivos de un instrumento psicológico | | | | | | |
| 9 | Carrera que se está cursando | | | | | | |
| 10 | Número ganador de la lotería | | | | | | |
| 11 | Tamaño de porción de comida | | | | | | |
| 12 | Tipo de alimentación | | | | | | |
| 13 | Edad en años cumplidos | | | | | | |
| 14 | Marca de automóvil | | | | | | |
| 15 | Ocupación | | | | | | |

**2.** Lea las siguientes descripciones e indique el alcance de la investigación: exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo.

**a)** La empresa editorial Psiqué desea comercializar un juego de manuales para el aprendizaje de las matemáticas. Para probar la efectividad de este material la empresa conduce un estudio, que consiste en usar los manuales tradicionales en un grupo de control, y en otro grupo de investigación se utilizarán los manuales de la editorial. Un grupo de expertos en estadística contrastará los resultados de los dos grupos. _____

**b)** El responsable de educación en un municipio desea saber cuáles son las necesidades de apoyo alimenticio para que los niños no acudan a clases sin comer. Para ello, levanta una encuesta de hábitos de alimentación entre los padres de familia de todas las escuelas del municipio._____

**c)** Una empresa desea lanzar un nuevo producto al mercado. Por lo tanto, decide realizar una investigación que permita identificar las preferencias de los clientes. _____

**d)** La empresa manufacturera Gamma-Bion necesita conocer las necesidades de capacitación de sus empleados. Para ello, es importante conocer el grado de conocimientos y experiencia de sus empleados, por lo que se envía un cuestionario a todos los jefes de departamento para hagan un inventario de recursos humanos._____

**e)** Un psicólogo clínico desea saber si el consumo de tabaco se asocia a los hábitos de higiene y autocuidado de las personas que acuden a consulta en una clínica comunitaria. Para ello emplea dos instrumentos que aplica a todos los pacientes del centro de atención. _____

**f)** En un centro de rehabilitación para niños con necesidades especiales se quiere conocer qué tan efectivo es el nuevo método de enseñanza de lectoescritura para niños con discapacidad auditiva. Para tal fin se diseña un

estudio donde se hará una comparación de los resultados del avance en la adquisición auditiva en tres grupos de niños con diferente nivel de audición (severa, leve y normoyente)._____

**g)** En la oficina de recaudación de impuestos quieren conocer si el horario laboral se relaciona con el nivel de estrés de los trabajadores. _____

**h)** En una comunidad se presentó el caso de una nueva enfermedad. Los médicos argumentan que jamás habían visto algo similar. _____

**3.** Después de leer la lista siguiente, indique con una X si se trata de variables observables o de constructos.

| Número | Fenómeno | Variable observable | Constructo |
|---|---|---|---|
| 1 | Miedo | | |
| 2 | Estilo de agarrar el lápiz | | |
| 3 | Orden y limpieza | | |
| 4 | Carácter | | |
| 5 | Tiempo dedicado a la actividad física | | |
| 6 | Actitud ante el aprendizaje | | |
| 7 | Habilidades mecánicas | | |
| 8 | Amabilidad | | |
| 9 | Postura al sentarse | | |
| 10 | Velocidad de lectura | | |

**4.** Identifique el tipo de escala de medición de la que se trata en cada caso (nominal, ordinal, de intervalos o de proporciones).

| Número | Variable o constructo a medir | Tipo de escala |
|---|---|---|
| 1 | Salario mensual | |
| 2 | Valor percentil en la prueba de inteligencia emocional | |
| 3 | Coeficiente intelectual | |
| 4 | Problema de aprendizaje | |
| 5 | Tipo de personalidad | |
| 6 | Escuela de procedencia | |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | Lugar que ocupa en el concurso de canto | |
| 8 | Tiempo dedicado al estudio | |
| 9 | Puntuación en la escala de ansiedad | |
| 10 | Puntos de nivel de confianza de los usuarios | |

# Ejercicios voluntarios

**1.** Realice una búsqueda en Google académico (http://scholar.google.com.mx) de las siguientes palabras: prevalencia, relación y factores, junto con algún fenómeno que sea de su interés; por ejemplo, si le interesa la deserción escolar puede hacer su búsqueda como "prevalencia deserción escolar".

**a)** Identifique 10 artículos que sean de su interés.

**b)** Siga los vínculos y obtenga el resumen del artículo.

**c)** Identifique en cada artículo:

- **Las variables investigadas.**
- **El tipo de estudio realizado.**

**d)** Elabore un cuadro con las respuestas que obtuvo de cada palabra clave, y determine qué tipo de estudio es más probable que obtenga con cada una.

| **Número** | **Palabra clave** | | |
|---|---|---|---|
| | **Prevalencia** | **Relación** | **Factores** |
| 1 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |
| 2 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |
| 3 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |
| 4 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |
| 5 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |
| 6 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |
| 8 | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: | Variables:<br>Tipo de estudio: |

# Solución a los problemas de autocomprobación

## Ejercicio 1

| Número | Ejemplo | Constante | Variable | Cualitativo | Cuantitativo | Continuo | Discreto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Número de lados de un cuadrado | X | | | X | | X |
| 2 | Cantidad de personas que viajan en un autobús | | X | | X | | X |
| 3 | Tiempo empleado para completar una tarea | | X | | X | X | |
| 4 | Puntos obtenidos al tirar los dados | | X | | X | | X |
| 5 | Religión practicada en la familia | | X | X | | | |
| 6 | Estatura de los padres | | X | | X | X | |
| 7 | Cantidad de respuestas acertadas en un examen | | X | | X | | X |
| 8 | Número de reactivos de un instrumento psicológico | X | | | X | | X |
| 9 | Carrera que se está cursando | | X | X | | | |
| 10 | Número ganador de la lotería | | X | | X | | X |
| 11 | Tamaño de porción de comida | | X | | X | X | |
| 12 | Tipo de alimentación | | X | X | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | Edad en años cumplidos | | X | | X | | X |
| 14 | Marca de automóvil | | X | X | | | |
| 15 | Ocupación | | X | X | | | |

## Ejercicio 2

**a)** Explicativo.
**b)** Descriptivo.
**c)** Exploratorio.
**d)** Descriptivo.
**e)** Correlacional.
**f)** Explicativo.
**g)** Correlacional.
**h)** Exploratorio.

## Ejercicio 3

| Número | Fenómeno | Variable observable | Constructo |
|---|---|---|---|
| 1 | Miedo | | X |
| 2 | Estilo de agarrar el lápiz | X | |
| 3 | Orden y limpieza | X | |
| 4 | Carácter | | X |
| 5 | Tiempo dedicado a la actividad física | X | |
| 6 | Actitud ante el aprendizaje | | X |
| 7 | Habilidades mecánicas | X | |
| 8 | Amabilidad | | X |
| 9 | Postura al sentarse | X | |
| 10 | Velocidad de lectura | X | |

## Ejercicio 4

| Número | Variable o constructo a medir | Tipo de escala |
|---|---|---|
| 1 | Salario mensual | De proporciones |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | Valor percentil en la prueba de inteligencia emocional | Ordinal |
| 3 | Coeficiente intelectual | De intervalos |
| 4 | Problema de aprendizaje | Nominal |
| 5 | Tipo de personalidad | Nominal |
| 6 | Escuela de procedencia | Nominal |
| 7 | Lugar que ocupa en el concurso de canto | Ordinal |
| 8 | Tiempo dedicado al estudio | De proporciones |
| 9 | Puntuación en la escala de ansiedad | De intervalos |
| 10 | Puntos de nivel de confianza de los usuarios | De intervalos |

# GLOSARIO

**Análisis:** acto de separar las partes de un elemento para estudiar su naturaleza, su función o significado.
**Cantidad:** proviene del latín *quantitas*. Es la porción de una magnitud o cierto número de unidades.
**Conclusión científica:** argumentos y afirmaciones relativas a datos estadísticos.
**Constante:** es aquello que consta (que es manifiesto o está registrado) o que tiene constancia (certeza, perseverancia). Algo constante es durable, reiterado o persistente.
**Constructo:** es una entidad hipotética, y por lo tanto no observable, de algo que se sabe que existe pero que es de difícil definición.
**Correlacional:** alcance de la investigación que describe la asociación entre dos o más variables.
**Cualitativo:** adjetivo que tiene su origen en el latín *qualitativus*. El término se emplea para nombrar a lo que está vinculado a la cualidad (el modo de ser o las propiedades de algo).
**Cuantitativo:** término que tiene antecedentes en la lengua latina (*quantitas*). Es un adjetivo vinculado a la cantidad, magnitud, porción o número de cosas.
**Dato:** fragmentos de la información que tienen valores constantes o variables.
- **Datos continuos:** son aquellos que pueden tomar valores comprendidos entre dos números. Por ejemplo, la estatura de cinco amigos: 1.73, 1.82, 1.77, 1.69, 1.75.
- **Datos cualitativos:** son los datos que no se expresan con números y que representan atributos, características o propiedades. Pueden ser dicotómicos o multicotómicos.
- **Datos cuantitativos:** son cuantificados o medidos para representar el grado o cantidad de los fenómenos.
- **Datos discretos:** dato cuantitativo que toma valores enteros entre dos valores específicos.
- **Datos estadísticos**: valores que se obtienen a partir del tratamiento estadístico de los datos.

**Descriptivo:** alcance de la investigación mediante el cual se busca obtener información detallada de un fenómeno.
**Disciplina:** con origen en el término latino *disciplina*, es el método, guía o saber de una persona, sobre todo en lo

referente a cuestiones morales.

**Estadística descriptiva:** permite recolectar datos y obtener resultados numéricos o gráficos de los mismos; es decir, recaba, ordena y clasifica los datos obtenidos por medio de procedimientos como la aplicación de pruebas, diseños experimentales u observación directa. Se trabaja con medidas de tendencia central, medidas de posición y medidas de dispersión o variabilidad; también se utilizan gráficas y tablas para representar los datos.

**Estadística inferencial:** es inferir resultados de una muestra. Se utiliza fundamentalmente cuando se trabaja con el contraste de hipótesis, mediante el análisis de correlación entre variables o de comparación entre grupos o mediciones. A su vez, la estadística inferencial se divide en no paramétrica y paramétrica.

**Evidencia:** del latín *evidentia*, permite indicar con certeza manifiesta que determinado fenómeno resulta innegable y que no se puede dudar.

**Explicar:** del latín *explica*re, es la acción de desplegar o desenvolver. En términos etimológicos, es el hecho de "desplegar" lo que estaba doblado (plegado, implicado) y oculto en su interior, que no es visible o perceptible a la razón, y de esta manera es posible comprender lo que en un primer momento no se entendía.

**Explicativo:** alcance la investigación que permite establecer una relación de causalidad.

**Exploratorio:** alcance de la investigación que permite investigar fenómenos poco estudiados o con interrogantes que no se habían abordado.

**Impunidad:** del latín *impunitas*, se refiere a la característica de quien no puede ser castigado.

**Intervalo:** del latín *intervallum*, permite identificar la distancia o el espacio que hay entre dos medidas.

**Investigación:** procesos sistemáticos y empíricos que se aplican para el estudio de los fenómenos.

**Juicios:** del latín *iudicium*, se trata de una opinión, un dictamen o parecer.

**Matemática:** ciencia deductiva que se dedica al estudio de las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones. Esto quiere decir que las matemáticas trabajan con números, símbolos, figuras geométricas, entre otros elementos.

**Metodología:** vocablo generado a partir de tres palabras de origen griego: *metà* (más allá), *odòs* (camino) y *logos* (estudio). Es el conjunto de procedimientos racionales que rigen una investigación científica para alcanzar determinados objetivos.

**No paramétrico:** se refiere a los procedimientos que no toman en cuenta como supuestos los parámetros de la población, regularmente estos supuestos incluyen la distribución normal de los datos pero no es privativo.

**Nominal:** consiste en clasificar objetos o fenómenos de acuerdo con ciertas características, tipologías o nombres, asignándoles una denominación o símbolo, sin que esto implique alguna relación de orden, distancia o proporción entre los objetos.

**Ordinal:** también llamada escala de orden jerárquico, con ella se establecen posiciones relativas de los objetos o fenómenos en estudio con respecto a alguna característica de interés, sin que se reflejen distancias entre ellos.

**Paramétrico:** se refiere a los procedimientos que toman en cuenta como supuestos los parámetros de la población.

**Proporciones o razón:** proceden del vocablo latino *proportio* y se refiere a la correspondencia, equilibrio o simetría que existe entre los componentes de un todo. La proporción puede calcularse entre los elementos y el todo o entre los propios elementos.

**Relación:** del término latino *relatio*, se trata del nivel de asociación entre dos o más variables.

**Resultado:** es el corolario, consecuencia o fruto de una determinada situación o de un proceso.

**Teoría científica:** conjunto de leyes, hechos e hipótesis que constituyen una visión completa acerca de un aspecto de la realidad.

**Teoría:** conjunto de constructos que permiten explicar y predecir los fenómenos.

**Variables:** del latín *variabîlis*, representa aquello que varía o que está sujeto a algún tipo de cambio.

# BIBLIOGRAFÍA


Abarca, A. y Sánchez, M.A. (2005). La deserción estudiantil en la educación superior: el caso de la Universidad de Costa Rica. *Actualidades Investigativas en Educación*, 5, 1-22.

Araujo, M. (2011). Tipos de datos. *Medwave*, 11(04). doi: 10.5867/medwave.2011.04.4981

Asociación Americana de Estadística. (2016). *What Is Statistics?* Disponible en http://www.amstat.org

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias y Universidad de Granada.

Campbell, N.R. (1938). Symposium: Measurement and its Importance for Philosophy. *Aristotelian Society Supplement*, *17,* 121-150.

Caso, J. y Hernández-Guzmán, L. (2010). Modelo explicativo del bajo rendimiento escolar: un estudio con adolescentes mexicanos. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *3*(2), 145-159.

Hair, J., Anderson, R.E., Tatham, R.L. y Black, W.C. (2007). *Análisis multivariante*, 5a ed. México: Pearson Prentice Hall.

Kerlinger, F.S. y Lee, H.B. (2002/2008). *Investigación del comportamiento*, 5a ed. México: McGraw-Hill.

Medrano, L.A., Galleano, C., Galera, M. y Del Valle, R. (2010). Creencias irracionales, rendimiento académico y deserción académica en ingresantes universitarios. *Liberabit*, *16*(2), 183-192.

Restrepo, A. (2010). Factores relacionados con la deserción estudiantil en el programa de enfermería de la Universidad Libre de Pereira. *Cultura del Cuidado Enfermería*, *7*(2), 5-14.

Stevens, S.S. (1946). On the Theory of Scales Measurement. *Science*, *103*(2684), 677-680.

# Capítulo 2

# CONCEPTOS INICIALES

*Erika Álvarez Álvarez, Adriana Patricia González Zepeda, Joanna Koral Chávez López*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Cuando se emprende la tarea de efectuar una investigación, no sólo resulta imprescindible realizar una exhaustiva revisión de la literatura especializada acerca del tema que se quiere estudiar para conocer el estado el arte, sino que también es necesario manejar con fluidez distintos términos metodológicos básicos. De este grupo de términos destacan aquellos que se relacionan con lo que se denomina variables, población y muestra.

La utilidad del manejo de estos términos radica en que el objetivo de una investigación es su difusión ante la comunidad científica, y en este contexto se utiliza un lenguaje particular. De este modo, si se pretende comunicar de manera adecuada el proceder y los hallazgos de una investigación, es necesario emplear el lenguaje propio de este contexto, y así facilitar tanto su reporte como su comprensión. Al cumplir con este cometido de comunicación, la investigación reportada puede constituir un útil referente teórico-empírico para nuevas investigaciones que permitirán consolidar el conocimiento de determinado fenómeno. Por ello, en el presente capítulo se recurre al uso de ejemplos para definir varios de los términos vinculados con las nociones de variables, población y muestra.

## Variables

Al planear una investigación empírica sobre tópicos de interés para la psicología o de las ciencias sociales, independientemente de que el estudio sea básico o aplicado, de corte experimental o no experimental, de laboratorio o de campo, el investigador se encontrará frente a una amplia diversidad de factores. Algunos de estos factores (elemento que apoya a originar un resultado) son inherentes a las personas con las que se planea trabajar (sexo, edad, condición social, nacionalidad, estado civil, religión, orientación sexual, nivel educativo, género musical predilecto y horas de privación de sueño, entre muchos otros); mientras que otros factores emanan del entorno circundante a dichas personas (clima, horario, señales viales, entre otros).

Y debido a lo anterior, una de las primeras tareas que es imprescindible realizar durante el diseño de una investigación, consiste en listar todos los factores que podrían entrar en juego durante la investigación; asimismo, es preciso reconocer todas las variantes con las que contaría cada uno de esos factores. Por ejemplo, si se ha identificado el género y la orientación sexual como factores relevantes en la investigación, masculino y femenino, constituyen dos variantes del primero de estos dos factores; en tanto que homosexual, heterosexual y bisexual serían

las variantes factibles para el segundo de estos factores. Con base en ello es posible tomar decisiones en relación a qué variaciones deben contemplarse en el estudio y de cuáles se debe prescindir.

Aquellos factores que se decidan incluir en el plan de investigación, que están sujetos a cambios frecuentes y de los que se resuelvan dejar por lo menos dos de sus variantes, son los que en la literatura especializada se les denomina **variables**, y a sus posibles variaciones **valores** o **niveles**. De aquí que una variable pueda ser definida como: todo factor, peculiaridad, condición o evento que puede adquirir más de un valor.

## Variables independientes y dependientes con relación al alcance de la investigación

Las variables pueden clasificarse con base en diferentes criterios. Uno de los más referidos es el del **tipo de relación establecida entre ellas**, criterio bajo el cual se clasifican en: **dependientes e independientes**. Las primeras, comúnmente referidas con las siglas VD, pueden ser definidas como aquellas que son medidas y cuyas variaciones en sus parámetros de medición están influenciadas por las variables independientes. En cambio, las variables independientes, que por lo general son referidas con las siglas VI, se caracterizan en que sus variaciones posibles tienen efectos diferenciales sobre la variable dependiente conocida también como la variable que el investigador decide probar.

Si bien la VD se emplea como la variable que el investigador utiliza para la medición de cambios y la VI para la o las variables que se exponen (o no, en el caso de grupo control) como estímulo.

La variable que constituya el factor causal (el que influye en la otra variable), será la VI, y aquellas que resulten del efecto de tal factor, será la VD. Por ejemplo, valdría la pena considerar esta clasificación en una investigación cuyo objetivo es estudiar el efecto de un fármaco sobre la hiperactividad en niños. En un estudio de este tipo, la variable que funge como causa es el fármaco cuyo efecto se apreciaría en el nivel de hiperactividad en niños. De este modo la VI sería el fármaco; en tanto que la VD sería el nivel de hiperactividad. Si después de un mes de consumir el fármaco se observa un cambio en el nivel de hiperactividad se podría inferir que el fármaco es el responsable de tal efecto (siempre y cuando se haya controlado otras variables que afectan la hiperactividad como la edad del niño, las horas de sueño, entre otras).

Si las variaciones de la VI pueden ser manipuladas por quien está realizando el estudio, tal variable también es reconocida como **variable activa** o **variable experimental**. En cambio, si tales variaciones constituyen peculiaridades inherentes a las personas, la VI también se denomina **variable atributiva.** De acuerdo con este contexto, se entiende como manipulación a la posibilidad que tiene el investigador de introducir cada valor de la VI en momentos específicos del estudio, de acuerdo con sus intereses investigativos. Ahora, retomando el ejemplo del estudio de comprensión lectora de párrafos anteriores, se puede apreciar un claro ejemplo de una variable manipulable, pues el investigador está en condiciones de manipularla mediante dos opciones. La primera consiste en comparar los efectos de las dos variaciones de la modalidad del texto entre sujetos; por ejemplo, trabajar con 20 niños en una única sesión, a quienes se les evaluaría su comprensión lectora por medio de un texto sin imágenes, y a otros 20 niños se les evaluaría su comprensión lectora respecto a un texto acompañado con imágenes.

La segunda opción implica hacer la comparación de interés de manera intrasujeto; es decir, contar sólo con 20 niños, con quienes se tendría que trabajar en dos sesiones. Aunque en ambas se evaluaría la comprensión lectora de los niños, en una de ellas se haría después de haberles dado a leer un texto sin imágenes, y en la otra, luego de haberles solicitado la lectura de un texto con imágenes.

Independientemente del tipo de comparación que decida realizar el investigador para explorar la influencia de la modalidad del texto sobre la comprensión lectora en niños, está en condiciones para manipular la variable que ejercerá efectos diferenciales en la variable que se quiere medir. Es decir, puede optar por hacer una comparación entre sujetos, tras asignar de manera aleatoria a 20 niños al grupo 1 y a otros 20 al grupo 2; queda a decisión del investigador si los niños del grupo 1 leerán el texto con imágenes o el que no las tiene. Pero si en lugar de optar por una comparación entre sujetos, el investigador se inclina por realizar una comparación intrasujeto, su posibilidad de manipular la VI se mantiene, ya que es su decisión si en la primera sesión los participantes leerán el texto con imágenes o el que no cuenta con ellas.

También puede darse el caso de que este mismo investigador continúe interesado en estudiar la comprensión lectora de niños de tercer grado, pero ahora quiere estudiar la influencia del sexo de los niños. En esta ocasión podría decidir trabajar sólo con textos sin imágenes y comparar las ejecuciones de niños con respecto a las de las niñas. En este segundo caso, el investigador nuevamente estudia el efecto de una variable sobre la comprensión lectora (VD), pero a diferencia de su primer estudio, no puede manipular los valores de esta variable experimental. Lo que hace en esta ocasión es diferenciar a los participantes que tienen como atributo uno de sus valores (sexo masculino), de aquellos que tienen como atributo el otro valor de su variable influyente (sexo femenino); por lo tanto, estaría trabajando con una variable atributiva. En este caso, aunque se apreciara que el sexo influye en la compresión lectora, bajo ninguna circunstancia el investigador podría manipular el sexo de los niños.

Hay otros estudios que también indagan la relación entre variables, pero en lugar de relaciones causa y efecto (causales) estudian relaciones covariacionales, es decir, la relación entre una variable cuyos valores se vinculan con valores específicos de otra variable, sin que una de ellas tenga un efecto directo sobre la otra. Un ejemplo de ello es cuando se quiere estudiar la relación existente entre problemas de aprendizaje y problemas de conducta en niños de quinto grado de primaria. Los resultados de un estudio así podrían mostrar que varios niños con bajo rendimiento escolar muestran altos porcentajes de ocurrencia de problemas de conducta, y que por el contrario, niños con alto rendimiento académico muestran porcentajes bajos de problemas de conducta. En esta investigación no se puede decir que el bajo rendimiento académico provoca el alto porcentaje de problemas de conducta, ni viceversa.

Otro ejemplo de un estudio de este tipo sería uno en el que se busca estudiar la relación entre prosocialidad y empatía en adolescentes. Uno más es de un estudio correlacional es en el que se busca analizar la relación entre prosocialidad y empatía en adolescentes, pues no es posible determinar si la prosocialidad es una variable causal o tiene una relación causal con la empatía. Por lo tanto, en esta clase de estudios la distinción entre VI y VD resulta desatinada.

# POBLACIÓN Y MUESTRA

En psicología y las ciencias sociales en general han buscado métodos de investigación que les permitan obtener conclusiones generalizables a grandes cantidades de individuos. Por ello, la selección de la población y de manera específica el tipo de muestra con el que se trabaje, son aspectos de gran importancia al planear una investigación, ya que serán la fuente de obtención de los datos. Y es que todo investigador suele cuestionarse acerca de la representatividad de la muestra ante la población que ha elegido, y si ésta será lo suficientemente significativa.

Ante tal tarea, resulta importante hacer una distinción entre los conceptos de población y muestra. La **población** se refiere al universo completo de individuos, objetos, eventos y, o fenómenos a estudiar (García, 2009); en pocas palabras, son todos los miembros existentes en un grupo (Coolican, 2005).

No obstante, en la mayoría de los estudios que se realizan, resulta imposible o sumamente complicado trabajar con todo el universo de individuos, de modo que se debe tomar como referencia un grupo o subgrupo en particular de esa población. A este pequeño número de individuos que representan cualitativa y cuantitativamente a la población se le denomina **muestra** (Levin y Levin, 2008).

Por ejemplo, si se quiere hacer una investigación en la ciudad de Morelia sobre el estrés que ocasionan los exámenes finales en estudiantes de licenciatura, con el objetivo de identificar si existe una diferencia estadísticamente significativa según la carrera que cursan. Si se reconoce que la población de universitarios de este nivel académico, sólo en la universidad pública del estado es de aproximadamente 50 000 estudiantes, distribuidos en 34 carreras ubicadas en diversas instalaciones de al menos cinco ciudades, se evidencia la complicada y exorbitante labor que implicaría contemplar a toda la población. Ante una situación así se deben tomar decisiones acerca del tamaño de la muestra, pues sería complejo obtener los datos de más de 50 000 estudiantes. Se podría hacer uso inicialmente de la regla de 30% para muestras pequeñas y de ahí en adelante considerar que entre más grande sea la población, menor puede ser el tamaño de la muestra; y el caso del ejemplo planteado puede ser de 10%, lo que implicaría trabajar con 5 000 estudiantes. Ahora bien si, por ejemplo, un investigador desea hacer un estudio descriptivo para conocer la incidencia del estrés académico en estudiantes de licenciatura. La población de universitarios con la que cuenta es de aproximadamente 50 000 estudiantes, distribuidos en 34 planteles. Como se puede observar evaluar a toda la población representaría una tarea complicada. Ante esta situación es necesario seleccionar a sólo una parte de la población que represente a todos ya que poseen características en común, a esta parte del todo se le conoce como muestra. Otra manera de obtener una aproximación a la cantidad de individuos que se debe elegir es realizar cálculos que emplean métodos estadísticos con múltiples formulas numéricas (Díaz, 2009).

# Muestreo: tipos de muestreo

Es importante mencionar que no sólo la selección del tamaño de la muestra es importante sino también el tipo de muestreo que se requiere según el objetivo de la investigación.

El muestreo es básicamente el proceso de selección de la muestra. Este proceso debe ser cuidadoso y sistemático (Levin y Levin, 2008), ya que de éste dependerá la representatividad de la muestra para poder generalizar o no un resultado. Para calcular el tamaño de una muestra, es necesario considerar el nivel de confianza, el error o porcentaje de error y la variabilidad. El **nivel de confianza** se refiere al porcentaje de certeza que hay para generalizar los resultados obtenidos, el **error** o **porcentaje de error** corresponde a seleccionar una probabilidad de aceptar una hipótesis que sea falsa como si fuera verdadera, o lo opuesto rechazar a hipótesis verdadera por observarla falsa y la **variabilidad** es la probabilidad (o porcentaje) con el que se aceptó y se rechazó la hipótesis que se quiere investigar (Fulgencio, s/f).

El investigador debe elegir el método de muestreo más adecuado para la población con que pretende trabajar y este método dependerá de las necesidades propias de la investigación (el objetivo, el diseño y el tipo de estudio, entre otras).

Existen dos métodos de muestreo principales, el probabilístico y el no probabilístico, que a su vez se dividen en distintos tipos (Coolican, 2005; García, 2009; Johnson y Kuby, 2005; Kerlinger y Lee, 2002; Levin y Levin, 2008). La figura 2-1 presenta los tipos de muestreo.

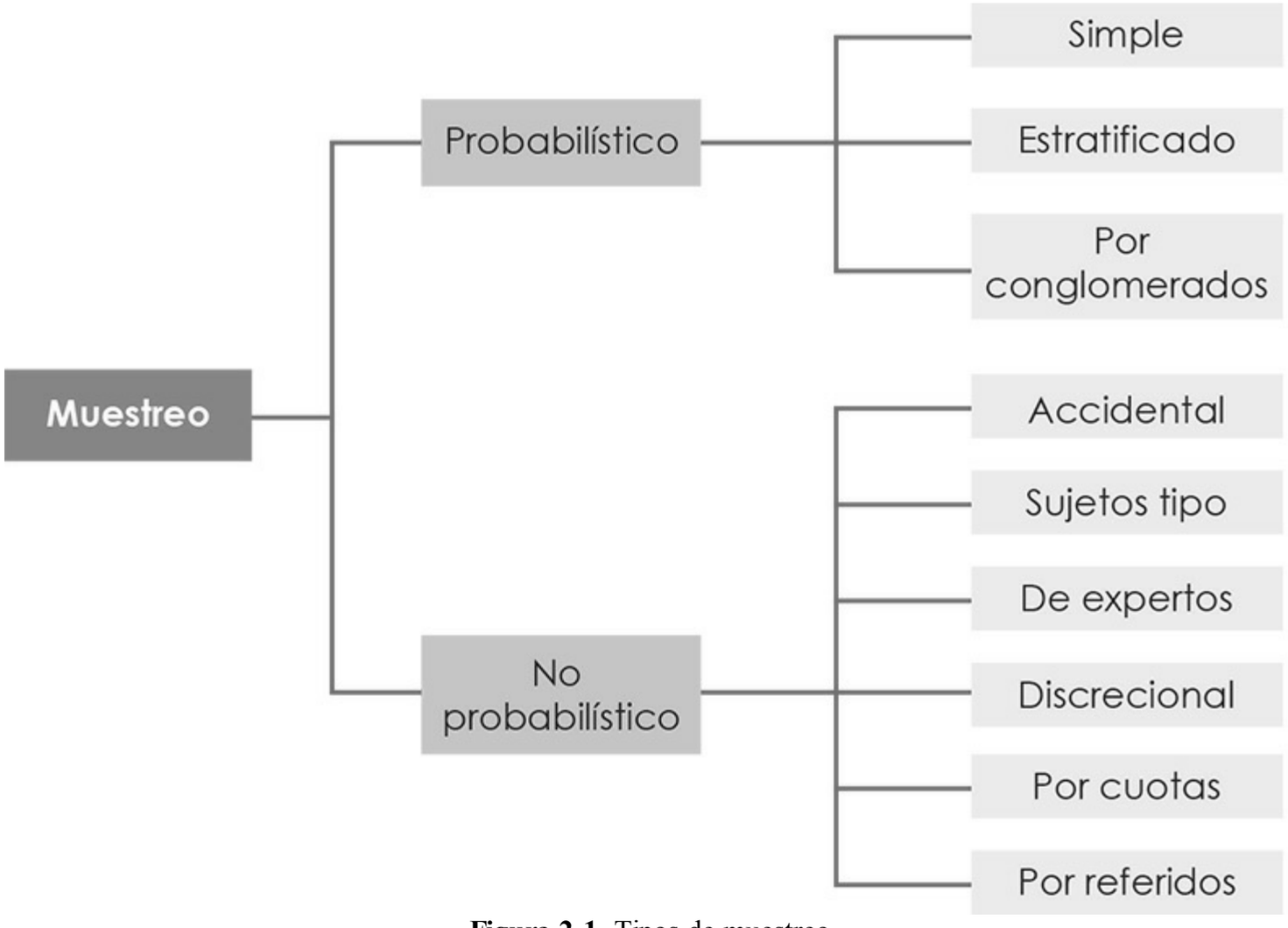



**Figura 2-1.** Tipos de muestreo.

***Muestreo probabilístico***

Es el método de muestreo donde todos los individuos o elementos tienen la misma posibilidad de ser elegidos. Es importante mencionar que esta probabilidad asociada debe ser calculada previamente y no deberá ser igual a cero (Pardo y San Martín, 2006). Este método es el más recomendable, ya que garantiza una mayor representatividad de la muestra. Se divide en los siguientes tipos:

- **Simple:** también conocido como aleatorio o probabilístico. Es el muestreo más sencillo de todos, ya que los sujetos pueden ser seleccionados por algún medio mecánico (sorteo) o mediante la asignación de números a la población total. No obstante, es necesario considerar que todos los individuos de la población (seleccionados o no) deben presentar las mismas características y tener la misma probabilidad de ser seleccionados.
- **Estratificado:** intenta categorizar por **estratos** o subpoblaciones a partir de alguna característica en particular que es necesaria para el estudio; por ejemplo, por sexo, escolaridad, nivel socioeconómico, estado civil, lugar de nacimiento, etc. Es importante tener la misma proporción de sujetos en cada estrato y se puede utilizar cuando no existe una cantidad igualada de sujetos de una población. Por ejemplo, si mi variable de interés es el sexo y se

quiere obtener una muestra a nivel nacional con base en la distribución de la población de acuerdo al sexo, quizá resulte complicado obtener una muestra de cada estado. Al realizar el muestreo estratificado puedo agrupar (en estratos) los estados que tienen una proporción similar de hombres y mujeres de tal forma que obtenga 7 estratos de los cuales tomar mi muestra, ya que no es necesario muestrear a todos los estados de un mismo estrato. Resulta más fácil realizar un muestreo aleatorio en siete estratos que en 31 estados.

- **Por conglomerados:** en este procedimiento también se hace una selección al azar de subgrupos (conglomerados) pertenecientes a una misma población, pero que ya están agrupados de manera natural; además, se debe trabajar con todos los sujetos pertenecientes a ese conglomerado. Por ejemplo, se puede realizar una investigación en un hospital y realizar conglomerados de la población total; todo el hospital es la población, pero hay diferentes conglomerados: médicos, enfermeras, personal administrativo, etc. Cabe aclarar que existe una variante de este método, en la cual se realizan los conglomerados en dos etapas y se trabaja con proporciones de cada una de ellas, no con el total del subgrupo.

Para practicar los tipos de muestreo probabilístico se analizan algunos ejemplos:

**Muestreo aleatorio simple**

Por ejemplo, se debe elegir una muestra de la población de derecho habientes de una Unidad de Medicina Familiar, que agrupa 10 000 personas. Para que el muestreo sea aleatorio, es decir, que las personas presenten las mismas características y tengan la misma probabilidad de ser seleccionadas, se podría solicitar la base de datos con los números de seguridad social correspondientes a cada individuo y emplear un programa que seleccione la muestra de manera aleatoria.

**Muestreo estratificado**

En Michoacán se realizará un estudio para identificar la incidencia de acoso escolar en los niños de educación primaria, para ello se seleccionará aleatoriamente a una muestra de 1 000 niños, de una población de 10 000. Debido a que hay una proporción distinta de niños que asisten a escuelas públicas (55%) o privadas (45%), se realizará un muestreo estratificado, utilizando como estratos el tipo de escuela, ya sea pública o privada. Para ello, se seleccionarán 550 niños de escuela públicas (que corresponde al 55%) y a 450 niños de escuelas privadas (que corresponden al 45%).

**Muestreo por conglomerados**

En una fábrica productora de café que consta de 1200 empleados se quiere tomar una muestra de 400. Se conoce que hay 400 empleados del área A, 300 del área B, 300 del área C y 200 en la D. Para saber cuántos trabajadores se necesitan de cada área es necesario realizar una regla de 3 para cada área y así se conocerá cuantos empleados por área conformarán la muestra.

El procedimiento para calcular el valor de x_1 es igual a multiplicar 400 x 400 = 160 000 y el resultado lo dividimos entre 1 200 y da por resultado 133.33, de la misma forma para cada área.

***Muestreo no probabilístico***

En este método de muestreo no existe la probabilidad asociada, sino que los sujetos son seleccionados de acuerdo con las exigencias del investigador y el objetivo de la investigación. Aunque en ocasiones no hay posiblidad de tener una muestra aleatoria y en esos casos se recurre al muestreo no probabilístico. Los tipos de muestreo no probabilístico son:

- **Accidental:** los sujetos participan de manera voluntaria en la investigación previo señalamiento de los

requerimientos del investigador y aceptan ser sometidos a observación, aplicación de pruebas, etc. Es uno de los métodos de muestreo menos recomendados; cuando se utiliza, se debe tener mucho cuidado en el análisis e interpretación de los datos (Kerlinger y Lee, 2002).

- **Sujetos tipo:** el investigador fija una serie de características que los participantes deben cubrir. En este tipo de muestreo puede ser más importante la calidad de la muestra que el tamaño, por lo que es utilizado principalmente en estudios cualitativos.
- **De expertos:** también es muy utilizado en investigaciones de corte cualitativo; como su nombre lo menciona, se necesita contar con una muestra de personas expertas en cierto tema o tarea.
- **Discrecional:** es propositivo o intencional, por lo que se elige a los sujetos de manera deliberada según alguna característica en particular que debe cubrir el investigador. En este caso, algunos sujetos de la misma población son considerados y otros definitivamente no.
- **Por cuotas:** se determinan porciones de sujetos a participar; es decir, de la población total se clasifica a los sujetos por cuotas, de modo que cada categoría o cuota sea igual, por ejemplo, si se trabajará en una escuela primaria, se fijan cuotas por grado escolar y de un total de 150 alumnos se selecciona a 25 de cada grado escolar.
- **Muestreo por referido:** conocido como bola de nieve, se corre el riesgo de que este tipo de muestreo sea el menos representativo de todos, ya que por lo general se trabaja con muestras pequeñas y consiste en que un participante identifique a otro que cumpla con los criterios establecidos, y éste invite a otro y así sucesivamente hasta lograr un efecto de “bola de nieve”.

Es importante conocer los tipos de muestreos, ya que la selección de la muestra es un elemento importante en toda investigación. De ahí que los resultados observados puedan ser generalizados a una población, por ello la muestra debe ser representativa, es decir, en el tamaño de la misma deben incluirse el número de sujetos necesarios para minimizar un error de muestreo, por lo cual es importante tener en cuenta la propuesta que García (2009) propone en la figura 2-2 para seleccionar el tipo de muestreo.

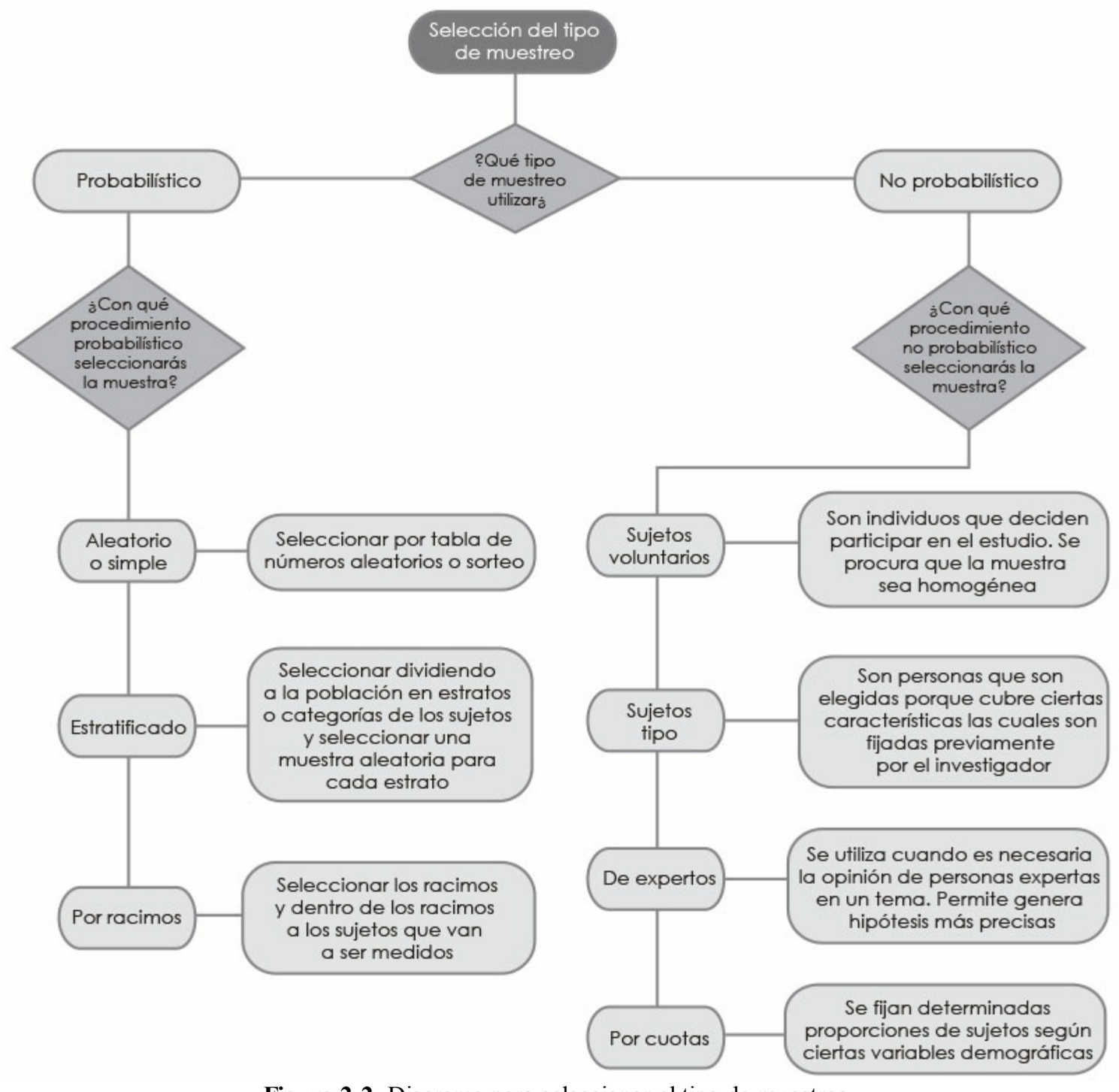

Selección del tipo de muestreo
¿Qué tipo de muestreo utilizar¿
Probabilístico
No probabilístico
¿Con qué procedimiento probabilístico seleccionarás la muestra?
¿Con qué procedimiento no probabilístico seleccionarás la muestra?
Aleatorio o simple
Seleccionar por tabla de números aleatorios o sorteo
Estratificado
Seleccionar dividiendo a la población en estratos o categorías de los sujetos y seleccionar una muestra aleatoria para cada estrato
Por racimos
Seleccionar los racimos y dentro de los racimos a los sujetos que van a ser medidos
Sujetos voluntarios
Son individuos que deciden participar en el estudio. Se procura que la muestra sea homogénea
Sujetos tipo
Son personas que son elegidas porque cubre ciertas características las cuales son fijadas previamente por el investigador
De expertos
Se utiliza cuando es necesaria la opinión de personas expertas en un tema. Permite genera hipótesis más precisas
Por cuotas
Se fijan determinadas proporciones de sujetos según ciertas variables demográficas

**Figura 2-2.** Diagrama para seleccionar el tipo de muestreo.

Para practicar los tipos de muestreo no probabilístico se analizan algunos ejemplos:

**Muestreo por cuotas**

En la universidad del Estado de Nayarit, se quiere realizar un estudio para comparar el desempeño laboral de los

docentes, de acuerdo con tres variables: antigüedad en el puesto, sexo y si es sindicalizado o no. Para ello se fija un número determinado o cuota de 50 profesores para conformar cada subgrupo de la siguiente manera:

| | | Antigüedad en el puesto | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sexo | Sindicalización | 1 a 10 años | 11 a 20 años | 21 a 30 años | Total |
| Mujer | Sindicalizado | 50 | 50 | 50 | 150 |
| | No sindicalizado | 50 | 50 | 50 | 150 |
| Hombre | Sindicalizado | 50 | 50 | 50 | 150 |
| | No sindicalizado | 50 | 50 | 50 | 150 |
| Total | | 200 | 200 | 200 | 600 |

Este método se emplea en muchas ocasiones en las encuestas de opinión.

**Muestreo Accidental**

El Director de la Biblioteca Vasconcelos, quiere obtener una muestra y para ello utiliza el muestreo accidental, es decir, su muestra la conformarán todos los usuarios que acuden el lunes 12 de diciembre del 2016 en el horario de las 9:00 a 14:00 horas a la biblioteca.

**Muestreo intencional**

El profesor de matemáticas de la preparatoria 3 de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, quiere obtener una muestra por el método intencional, para ello selecciona de manera directa e intencionalmente los sujetos de su población, es decir, sus propios alumnos, siendo estos a los que se tiene fácil acceso.

# PARÁMETROS, ESTADÍSTICOS Y EL CONCEPTO DE ERROR ESTADÍSTICO

Cuando el investigador selecciona a la muestra trata de igualar a la población en la mayor cantidad posible de características; sin embargo, habrá varios elementos en los que no coincidan. Entonces, es importante considerar algunos conceptos que suelen mencionarse, ya que existen valores poblacionales que son desconocidos.

Pardo, Ruiz y San Martín (2009) mencionan que un **parámetro** es el valor numérico que define a una población. La media, la varianza y la proporción serán otros de los parámetros comúnmente utilizados, que se reconocerán por símbolos como: $\mu$, $\sigma^2$ y f (Pardo y San Martín, 2006).

Por otro lado, un estadístico (al contrario del parámetro), es un valor numérico que describe una característica de la muestra. Se puede decir que define lo mismo, pero específicamente de la muestra. En este sentido, Pardo *et al*. (2009) mencionan que: "un estadístico es a la muestra, lo que el parámetro a la población" y se simbolizan con letras romanas S y $\bar{x}$.

El estadístico muestral brinda una noción acerca de los parámetros poblacionales que se desconocen. Son valores que se calculan a partir de cierto número de datos de la muestra a diferencia del parámetro.

Para ejemplificar la diferencia entre un parámetro y un estadístico, se debe imaginar que hay una población de 10 individuos, a los cuales se les ha aplicado una prueba para medir CI, y por lo tanto se tienen 10 datos como resultado (110, 87, 100, 95, 138, 90, 99, 100, 105 y 115). Los datos, 90, 110 y 115 son una muestra de esa población. Entonces un parámetro será la media de los primeros 10 datos, que será igual a 103.9 (1039/10 = 103.9), y un estadístico será la media de los tres datos seleccionados como muestra; ésta es igual a 105 (315/3 = 105).

Por último, si bien con el uso de métodos para elegir la muestra adecuada se pretende, en la medida de lo posible, evitar el sesgo de los datos, es lógico que al no trabajar con la población completa exista cierto grado de error. Kerlinger (2002) menciona que entre más pequeña sea la muestra, mayor será el error y viceversa, a mayor tamaño de muestra, menor será el error obtenido.

Los errores estadísticos más comunes que se pueden encontrar son los de muestreo y los de medición. Un error de medición se define como la diferencia del valor obtenido (que se midió) en comparación con el valor real. El error de muestreo, sería entonces, la diferencia entre el resultado que se obtuvo de la muestra y lo que se pudo obtener de la población de la cual se tomó la muestra (Johnson y Kuby, 2005).

Levin y Levin (2008) demostraron cómo la media ($\mu$, $\bar{x}$) de una población no es igual a la media aritmética de tres muestras (x) distintas tomadas de la misma población. Al tomar la media de calificaciones del examen de un grupo ésta fue igual a 71.55, pero al obtenerla por muestras observaron lo siguiente: la muestra 1 obtuvo una media de 75.75; la muestra 2, 62.25; y la muestra 3, 68.25. Como se esperaba, debido al error de muestreo, las medias no son similares.

El error estándar de medición se considera el grado de error, es posible hacer generalizaciones de muestras a poblaciones; para ello, se deben tomar en cuenta las características de una distribución muestral de las medias, intentando lograr una distribución normal de los datos.

Existen distintos factores que pueden mitigar el error estadístico, por ejemplo, delimitar con exactitud las variables en estudio; conocer a la población para delimitar la muestra; considerar factores externos que pueden sesgar los resultados; evitar errores en la recolección, captura, análisis e interpretación de los datos; evitar prejuicios y, desde luego, elegir el método de muestreo más adecuado para lograr los objetivos planteados.

# Estadística descriptiva y estadística inferencial: diferencias

La estadística es una rama de las matemáticas que, con base en una metodología científica, permite la recolección, organización, presentación, análisis e interpretación de un conjunto de datos (Batanero, 2001). La estadística está conformada por dos partes fundamentales (Amón, 2008):

1. Recoge, ordena y analiza datos de una muestra.
2. Verifica inferencias acerca de la población a partir de la muestra.

**Estadística descriptiva:** permite recolectar datos y obtener resultados numéricos o gráficos de los mismos; es decir, recaba, ordena y clasifica los datos obtenidos por medio de procedimientos como la aplicación de pruebas, diseños experimentales u observación directa. Se trabaja con medidas de tendencia central, medidas de posición y medidas de dispersión o variabilidad; también se utilizan gráficas y tablas para representar los datos.

**Estadística inferencial:** es inferir resultados de una muestra. Se utiliza fundamentalmente cuando se trabaja con el contraste de hipótesis, mediante el análisis de correlación entre variables o de comparación entre grupos o

mediciones.

A su vez, la estadística inferencial se divide en **no paramétrica** y **paramétrica**. La primera trabaja con variables nominales y ordinales, no exige una distribución normal de datos, varianza homogénea ni un número determinado de sujetos, y en la mayoría de los casos se trabaja con los rangos de los datos. También se utiliza con variables continuas que no cumplen con los supuestos de las técnicas paramétricas o que tienen muestras pequeñas.

Las pruebas no paramétricas más utilizadas son: Chi- cuadrada, Coeficiente de correlación por rangos ordenados de Spearman, Prueba binomial, T de Wilcoxon, U de Mann-Whitney, Kruskall-Wallis y Friedman. En la tabla 2-1 se muestran las condiciones de uso para cada una de las pruebas no paramétricas.

**Tabla 2-1. Condiciones de uso para pruebas no paramétricas**

| Prueba no paramétrica | Condiciones de uso | | |
|---|---|---|---|
| | Diferencias o correlación | Nivel de datos | Tipo de diseño |
| Prueba de Signo Binomial | Diferencias | Nominal | Relacionado |
| Prueba Chi- cuadrada ($X^2$) | Diferencias (probadas por asociación) | Nominal | No relacionado |
| Prueba de Rangos con Signo de Wilcoxon (T) | Diferencias | Ordinal | Relacionado, sólo dos mediciones |
| Prueba U de Mann- Whitney (U) | Diferencias | Ordinal | No relacionado sólo dos grupos |
| Prueba de Kruskal-Wallis (H) | Diferencias | Ordinal | No relacionado más de dos grupos |
| Prueba de Friedman ($X_r^2$) | Diferencias | Ordinal | Relacionado, más de dos mediciones |
| Coeficiente de correlación por rangos ordenados de Spearman ($r_s$) | Correlación | Ordinal | Relacionado |

La estadística paramétrica, por el contrario, se maneja con datos escalares y sugiere en la medida de lo posible que los datos posean una distribución normal, una varianza homogénea y mínimo treinta casos por condición. Realiza comparación de medias poblacionales y análisis de varianzas. Las pruebas paramétricas más utilizadas son: Coeficiente de correlación de Pearson, Prueba t de Student para muestras relacionadas, Prueba t de Student para muestras independientes y Análisis de varianza unidireccional y factorial. En la tabla 2-2 se muestran las condiciones de uso para cada uno de las pruebas no paramétricas.

**Tabla 2-2. Condiciones de uso para pruebas paramétricas**

| Prueba no paramétrica | Condiciones de uso | | |
|---|---|---|---|

| | Diferencias o correlación | Nivel de datos | Tipo de diseño |
|---|---|---|---|
| Prueba t para (t) para datos relacionados | Diferencias | Intervalar o razón | Relacionado |
| Prueba t para (t) para datos no relacionados | Diferencias | Intervalar o razón | No Relacionado |
| Coeficiente de correlación Producto-Momento de Pearson (r) | Correlación | Intervalar o razón | Relacionado |
| Análisis de varianza ANOVA (F) | Diferencias | Intervalar o razón | No relacionado (entre grupos/sujetos) |
| | | | Relacionado (medidas repetidas; intragrupos/sujetos) |

En una investigación primero es necesario tomar decisiones respecto al diseño de la investigación, el cual consiste en la estructura, plan y estrategias globales de la misma, que dará respuesta a la pregunta de investigación, es decir, comprobar la hipótesis con la realidad, puesto que en el diseño se esboza como se obtendrán los datos y su tratamiento para su confirmación. En lo que respecta a los datos es importante considerar los niveles de medición de las variables y con ello el tipo de estadísticos a emplear (Coolican, 2005; García, 2009). Para ello es de suma importancia considerar los elementos que García (2009), menciona como necesarios de diferenciar para el diseño de investigación: forma de seleccionar a los sujetos o grupos a analizar. La o las variables Independientes y Dependientes que se estudiarán en la investigación.

El orden de las observaciones que se harán a los sujetos o grupos a investigar **(diseños relacionados** porque los resultados de los mismos sujetos en una condición se relacionan directamente con un valor de otra condición y los **diseños no relacionados o independientes**, porque los resultados de un grupo de personas totalmente distintas suceden por cada condición).

Los diseños se han agrupado en diseños **experimentales** y **no experimentales**, que a su vez se dividen en distintos tipos (García, 2009). La figura 2-3 presenta los tipos de diseños propuestos por García (2009).

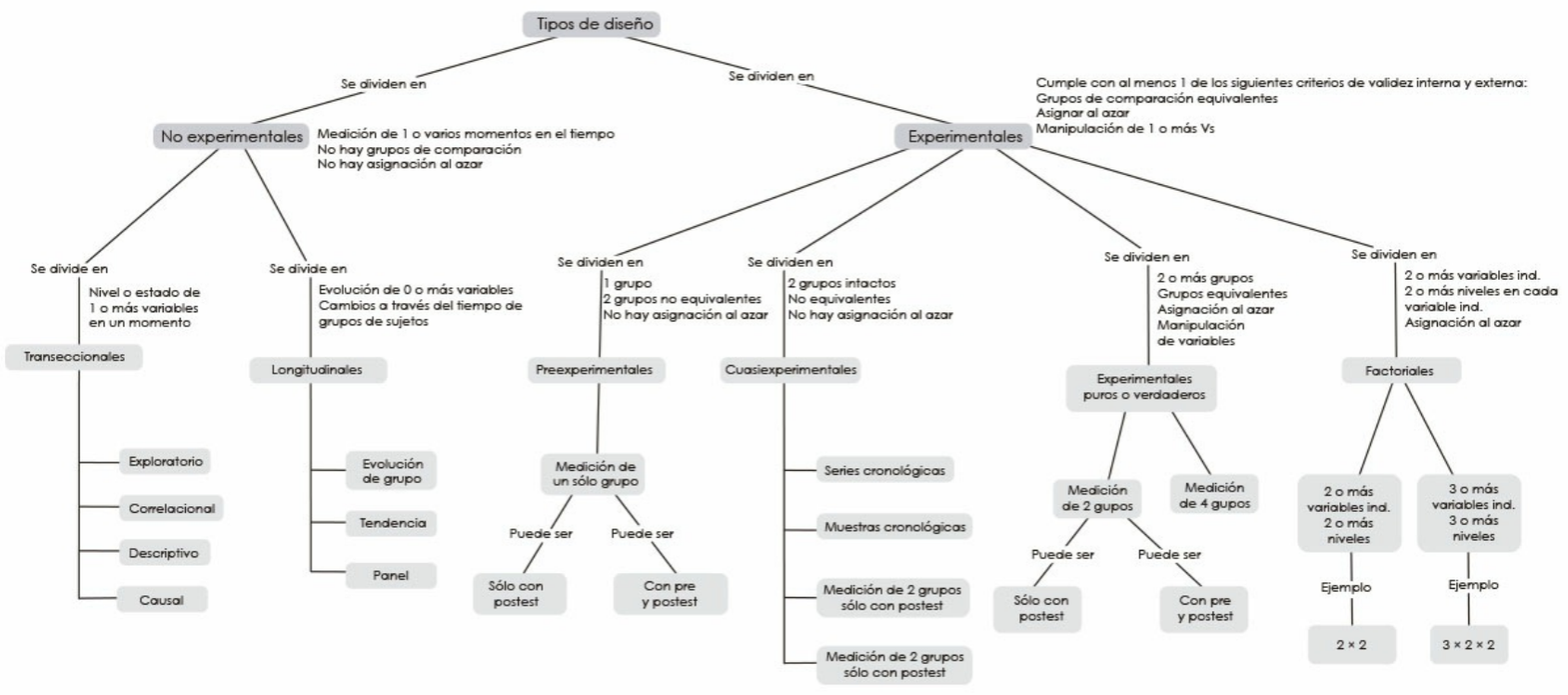



**Figura 2-3.** Diagrama para seleccionar el tipo de muestreo.

En los diseños **experimentales** el objetivo es comprobar los efectos de una intervención determinada. Campbel y Stanley, 1978; Wallen y Fraenkel, 2001, citados en García, 2009, y los dividen en:

**a)** Preexperimentales: no existe de asignación de sujetos aleatoriamente. Son diseños relacionados o bien, no relacionados. El grado de control experimental es mínimo. Se clasifican por:

- Medición a un sólo grupo (sólo con postest o con pre y postest). Se basa a partir de una variable independiente a un grupo de sujetos, se aplica un tratamiento en particular.

**b)** Cuasiexperimentales: los sujetos se eligen de grupos ya conformados antes del experimento. Lo que caracteriza al diseño cuasiexperimental y lo diferencia del preexperimental es la presencia de un grupo control y la incapacidad de garantizar que los grupos son equivalentes. Se clasifican en:

- Series cronológicas: radica en la sucesión de mediciones en un sujeto o grupo, con la inclusión de cambios experimentales.
- Muestras cronológicas: es una variación del diseño de series cronológicas a diferencia de que la variable independiente se integra reiteradamente.
- Medición de dos o más grupos con pretest y postest: incorpora dos grupos, es decir uno con diseño experimental y el otro no, además ambos han sido evaluados con un pretest y postest.
- Medición de dos grupos con sólo postest: no existe asignación aleatoria. Los grupos son comparados con la aplicación de la posprueba con la finalidad de observar si el tratamiento experimental tuvo efecto sobre la variable dependiente.

**c)** Experimentales puros: manipulación de las variables independientes por parte del investigador, asignación de sujetos al azar, existe control experimental e incluyen dos o más grupos con mediciones múltiples.

- Medición de dos grupos o más (con pretest y postest y sólo postest): se contrasta uno o más grupos experimentales, contra un grupo control, el cual no es expuesto a la variable independiente.

- Medición de cuatro grupos de Solomon: cuatro grupos asignados aleatoriamente y equivalentes. Dos grupos son experimentales con el mismo tratamiento, uno con pretest y postest y otro solo postest; y dos de control sin tratamiento, uno con pretest y postest y otro con postest.

**d)** Factoriales: manipulan dos o más variables independientes e incluyen dos o más niveles de aparición en cada variable.

En los diseños **no experimentales** su particularidad es que no existe un manejo intencional de las variables independientes. Los fenómenos tal como suceden son observados y después analizados. Hay medición en uno o más momentos, no existen grupos de comparación y no hay asignación al azar (García, 2009). Estos se subdividen en:

**a)** Transeccional o transversal: la medición se da en un momento único en un tiempo determinado.
- Exploratorio: se aplica a investigaciones poco conocidas, ya que se comienza a conocer una variable, una situación. Aunado a lo anterior constituyen la introducción a otros diseños (cuasiexperimentales y experimentales).
- Descriptivo: describe los efectos que se observaron posterior a las mediciones de una o más variables que se realizan a los sujetos u objetos.
- Correlacional: describe las asociaciones entre dos o más variables en cierto momento lo cual no supone causalidad.
- Causales: describe las asociaciones de causa-efecto entre dos o más variables en cierto momento.

**b)** Longitudinal: obtiene datos en diferentes momentos específicos, con la finalidad de hacer inferencias del desarrollo, cambios, causas y efectos de las variables estudiadas. Se dividen en:
- De tendencia: son los que analizan los cambios que una población ha tenido a través del tiempo, en las variables o relaciones.
- De evolución de grupo: son los que analizan los cambios que las subpoblaciones o grupos específicos han tenido a través del tiempo, en las variables o relaciones.
- De panel: son los que analizan los cambios a un mismo grupo de sujetos el cual es medido u observado en todo momento o tiempo.

El tipo de estadística a utilizar, dependerá del planteamiento del problema, de la definición de variables, del objetivo de la investigación, del diseño y del tipo de muestreo, entre otras características propias de la población.

Por ejemplo, si se realizará una investigación para determinar si existe relación entre las horas que trabajan los empleados de una empresa y su nivel de estrés laboral. Considerando que las variables tienen un nivel de medición escalar y que son más de 30 sujetos de la muestra, ¿qué tipo de análisis estadístico deberá utilizar para analizar los datos, descriptivo o inferencial?

La respuesta es, inferencial, pues no pretende únicamente describir en los resultados de su investigación en términos de porcentaje, frecuencias o graficarlos, sino que tiene como objetivo inferir si existe o no una relación entre ambas variables y además si esta es significativa o no.

Para practicar los diseños de investigación se analizan algunos ejemplos:

- **Investigación:** estudio diagnóstico sobre la actitud, uso y dominio de las Tecnologías de Información y Comunicación en estudiantes de nivel medio superior.
- **Enfoque:** cuantitativo.
- **Muestra:** no probabilística de tipo intencional.
- **Diseño:** no experimental de alcance exploratorio- descriptivo.

- **Tiempo:** transversal descriptivo.
- **Participantes:** estudiantes de nivel medio superior del sector público, privado o ambos, hombres y mujeres, con una edad entre 15 a 17 años.
- **Criterios de inclusión:** estar inscrito formalmente al bachillerato.
- **Criterios de eliminación:** haber faltado más del 30% a clases del nivel medio superior.
- **Investigación:** autoestima y estilos de amor en adolescentes tardíos.
- **Enfoque:** cuantitativo.
- **Muestra:** no probabilística de tipo intencional.
- **Diseño:** no experimental de alcance exploratorio-descriptivo-correlacional.
- **Tiempo:** transversal descriptivo.
- **Participantes:** adolescentes tardíos.
- **Investigación:** evaluación psicométrica en adolescentes: diseño y validación de instrumentos de medición en psicología.
- **Enfoque:** cuantitativo.
- **Muestra:** no probabilística de tipo intencional.
- **Diseño:** no experimental de alcance exploratorio- descriptivo-correlacional.
- **Participantes:** adolescentes.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**1.** En un estudio realizado en la Ciudad de México se pretende conocer el efecto de la implementación de nuevas estrategias didácticas para que los alumnos de la licenciatura en Pedagogía tengan un mejor aprovechamiento en una de las asignaturas de la carga curricular de una prestigiosa universidad. Algunas estrategias implementadas son: ejercicios de comprensión, uso de videos, ejercicios interactivos, entre otras. Con la información antes mencionada identifique:
**a)** Variable dependiente.
**b)** Variable independiente.

**2.** La Facultad de Psicología realizó una investigación en sus estudiantes de nuevo ingreso para conocer su nivel de autoconcepto social, según el tipo de bachillerato que cursaron. Con la información antes mencionada identifique:
**a)** Variable dependiente.
**b)** Variable independiente.

**3.** El director de la Escuela Secundaria Técnica 63 de la ciudad de Morelia quiere conocer las habilidades comunicativas desarrolladas en familia desde la perspectiva de los adolescentes de la escuela, según el sexo de los estudiantes. Dichas habilidades comunicativas son conceptualizadas como: la percepción del adolescente acerca de distintos componentes de la comunicación familiar. Con la información antes mencionada identifique:
**a)** Variable dependiente.
**b)** Variable independiente.

**4.** Un investigador trabaja con una muestra de 1 000 alumnos de nivel licenciatura, de una población total de 2 500.

Forma dos grupos de fumadores (el grupo 1, formado por 500 mujeres y el grupo 2, por 500 hombres) con el objetivo identificar si el éxito o fracaso del programa depende del sexo de las personas pertenecientes a cada grupo. Para ello, pide a los participantes de cada grupo que registren el número de cigarrillos que consumen durante dos semanas y después elabora un programa de modificación conductual para el control del tabaquismo (usando la técnica de reforzadores y castigos). De acuerdo con lo anterior identifique:

**a)** Variable dependiente.
**b)** Variable independiente.
**c)** Variable atributiva.
**d)** ¿Cuál es la población y la muestra?

**5.** El gerente de recursos humanos de una empresa quiere saber si la capacitación en relaciones humanas mejora el desempeño de sus empleados. Para comprobar esta hipótesis, selecciona a un grupo de empleados a quienes les proporciona capacitación y evalúa su desempeño utilizando como indicador el número de ventas realizadas en un mes, antes y después del curso de capacitación. Con ello, el gerente supone que la capacitación mejorará el desempeño de los empleados. Considere las ramas de la estadística e identifique cuál es necesario emplear para el problema planteado.

**a)** Estadística descriptiva.
**b)** Estadística inferencial.

**6.** Un investigador desea comparar el tiempo que las personas de tres grupos distintos, diferenciadas por su etapa de desarrollo (adultez temprana, adultez, vejez), pueden mantener la atención, por lo que durante una serie de tareas se mide el tiempo que los participantes utilizan para una actividad. Los datos no presentan normalidad y no hay homogeneidad de varianzas. Con base en las características de los datos, ¿qué tipo de estadística es necesario emplear para dicho problema?

**a)** Paramétrica.
**b)** No paramétrica.

**7.** Un científico social cree que los profesores de teología de una universidad local tienen una orientación política más conservadora que sus colegas de psicología. A los individuos de una muestra aleatoria, conformada por ocho profesores del departamento de teología y 12 del departamento de psicología de la universidad, se les presenta un cuestionario de 50 reactivos para medir su nivel de conservadurismo político. Los puntajes más altos indican mayor grado de conservadurismo político. De acuerdo con las ramas de la estadística, ¿qué tipo de estadística se debe emplear para el problema planteado?

**a)** Estadística descriptiva.
**b)** Estadística inferencial.

**8.** Un profesor de cuarto grado de primaria quiere probar la efectividad de una nueva estrategia para que los alumnos aprendan a multiplicar, ya que ha leído muchas experiencias satisfactorias del mismo. Para ello, con el permiso de la directora del plantel educativo para el que trabaja, divide a los alumnos en dos grupos aleatorios, A y B. Al grupo A se asigna al azar una estrategia tradicional, y al grupo B se le asigna la nueva estrategia. Al final de curso, el profesor aplica una prueba objetiva de 10 preguntas a cada uno de los alumnos de los dos grupos, a fin de conocer el aprendizaje obtenido por cada grupo. Del planteamiento anterior identifique lo siguiente:

**a)** Variable independiente.
**b)** Variable dependiente.
**c)** Tipo de diseño.

**9.** Un grupo de docentes de la academia de matemáticas considera que, debido a las experiencias en otros ciclos

escolares, que si los alumnos realizan más actividades interactivas en la computadora mostrarán más interés por aprender. Para probarlo, se trabajará con dos grupos de primero de secundaria del colegio. El grupo 01 trabajará con el método empleado el último año y el grupo 02 asistirá dos veces a la semana a la sala de cómputo para practicar con actividades interactivas. Después del primer bimestre se adquiere una muestra aleatoria de 20 estudiantes de cada grupo y se mide su rendimiento mediante una escala de rendimiento matemático. Identifique:

**a)** Variable independiente.
**b)** Variable dependiente.
**c)** Tipo de diseño.

**10.** La maestra de español cree que los estudiantes desarrollarán una mejor comprensión lectora si tres veces a la semana leen durante media hora y socializan la lectura en grupo. Para demostrarlo, al inicio del curso realiza un examen para conocer el nivel de comprensión lectora de los 60 alumnos antes de iniciar su actividad. Durante un mes utiliza su clase de los lunes, miércoles y viernes para leer media hora y comentar en clase. Al final del mes realiza un examen que muestra los resultados de comprensión lectora.

**a)** Variable independiente.
**b)** Variable dependiente.
**c)** Tipo de diseño.

# Ejercicios voluntarios

**1.** Realice una búsqueda de las ventajas y desventajas de los distintos tipos de muestreo y llene la siguiente tabla. Al terminar la actividad, intercambie ideas con alguno de sus compañeros.

| Tipo de muestreo | Ventajas | Desventajas |
|---|---|---|
| **1.** Muestreo probabilístico simple | | |
| **2.** Muestreo probabilístico estratificado | | |
| **3.** Muestreo probabilístico por conglomerados | | |
| **4.** Muestreo no probabilístico accidental | | |
| **5.** Muestreo no probabilístico de sujetos tipo | | |
| **6.** Muestreo no probabilístico de expertos | | |
| **7.** Muestreo no probabilístico discrecional | | |
| **8.** Muestreo no probabilístico por cuotas | | |
| **9.** Muestreo no probabilístico por referido | | |

**2.** En una investigación titulada “La violencia intrafamiliar como factor de riesgo en la presencia de conductas sexuales de riesgo en adolescentes”, identifique la variable dependiente y la independiente.

**3.** Mencione un ejemplo de una investigación donde se trabaje con un muestreo no probabilístico de sujetos tipo.

**4.** Mencione un ejemplo de una investigación donde se trabaje con un muestreo probabilístico por conglomerados.

**5.** Menciona un ejemplo de una investigación donde se trabaje con un muestreo probabilístico simple.

**6.** Un investigador desea conocer la satisfacción laboral de los empleados de una empresa, para lo cual aplica una escala, toma como muestra a 600 de los 950 empleados y obtiene que 60% cumple con las características de satisfacción, mientras que 40% no. La media de satisfacción laboral fue de 50.92.

**a)** De acuerdo con los conceptos revisados y los datos que se recolectaron y tomaron en cuenta para dicha investigación, la media de dicha investigación muestra un:

- **i)** Parámetro.
- **ii)** Estadístico.

**b)** La muestra recolectada es representativa de la población:

- **i)** Verdadero.
- **ii)** Falso.

**c)** El margen de error puede disminuirse a través de:

- **i)** La recolección de la muestra a través de un método probabilístico.
- **ii)** El trabajo con 50% de la población.
- **iii)** La recolección de la muestra a través de un método no probabilístico.
- **iv)** El trabajo con la población completa.

**7.** Un investigador que analiza trastornos alimenticios quiere conocer los hábitos que una muestra de 200 estudiantes lleva, para lo cual les aplica un cuestionario que brinda características de una alimentación saludable y alimentación deficiente. Dicho lo anterior, la rama de la estadística que es más viable utilizar es:

**a)** Descriptiva.

**b)** Inferencial.

**8.** Un investigador tiene la hipótesis de que los docentes de una Universidad del Estado de México padecen el síndrome de Burnout (síndrome de estar quemado en el trabajo), en mayor medida al final de ciclo escolar. Para ello aplica una escala tipo Likert en dos momentos (inicio y final del ciclo escolar). En los resultados aparece que 70% presenta por lo menos agotamiento emocional o baja realización personal al final del ciclo escolar. De acuerdo con la esencia de la estadística y sus ramas se deduce que:

**a)** Se utiliza la estadística descriptiva.

**b)** Se utiliza la estadística inferencial.

**9.** Un investigador realiza un estudio acerca de violencia en el noviazgo en relaciones homosexuales, por lo que necesita 350 sujetos a los cuales les aplicará una escala tipo Likert; en este caso, el tipo de muestreo recomendado es:

**a)** Probabilístico.

**b)** No probabilístico.

**10.** Un profesor quiere conocer si la implementación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ha resultado favorable para el aprendizaje significativo de los alumnos, por lo tanto, decide aplicar un test de conocimientos a un grupo de 60 personas. Para fines de comodidad decide aplicar únicamente 20 ejemplares del test. Qué tipo de muestreo está utilizando:

**a)** Muestreo probabilístico estratificado.

**b)** Muestreo no probabilístico de sujetos tipo.

**c)** Muestreo probabilístico simple.

**d)** Muestreo no probabilístico discrecional.

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

**Ejercicio 1**
Variable dependiente: aprovechamiento.
Variable independiente: estrategias didácticas.

**Ejercicio 2**
Variable dependiente: nivel de autoconcepto social.
Variable independiente: tipo de bachillerato cursado por los estudiantes.

**Ejercicio 3**
Variable dependiente: habilidades comunicativas.
Variable independiente: sexo de los estudiantes.

**Ejercicio 4**
Variable dependiente: número de cigarrillos.
Variable independiente: programa de modificación conductual.
Variable atributiva: sexo de las personas.
¿Cuál es la población y muestra?: población total de 2 500 alumnos y una muestra de 1 000 alumnos de nivel licenciatura.

**Ejercicio 5**
**b)** Estadística inferencial.

**Ejercicio 6**
**c)** No paramétrica.

**Ejercicio 7**
**a)** Estadística descriptiva.

**Ejercicio 8**
Variable independiente: tipo de estrategia.
Variable dependiente: aprendizaje.
Tipo de diseño: experimento puro, diseño con postest y grupo de control.

**Ejercicio 9**
Variable independiente: tipo de actividad realizada por los estudiantes (interactiva y sin actividad).
Variable dependiente: rendimiento matemático.
Tipo de diseño: cuasiexperimental con postest. No es un diseño experimental porque los grupos a los que se aplica la variable independiente ya están formados antes del estudio. La selección de los individuos de cada grupo se hace aleatoriamente, pero eso no es suficiente para que sea un experimento puro.

**Ejercicio 10**
Variable dependiente: comprensión lectora.
Variable independiente: realización de actividades de lectura y comentarios de éstas tres veces a la semana.

Tipo de diseño: preexperimental con pretest y postest. Sólo se estudia un grupo y no hay forma de saber si la mejoría encontrada responde a la variable independiente o a alguna variable extraña.

## Solución a los ejercicios voluntarios

**Ejercicio 1**
Variable Dependiente: el aprovechamiento de los alumnos.
Variable Independiente: las nuevas estrategias didácticas implementadas.

**Ejercicio 2**
Variable Dependiente: Conducta sexual de riesgo.
Variable Independiente: Adolescentes con violencia intrafamiliar.

**Ejercicio 6**
**b)** Estadístico.
**a)** Verdadero.
La recolección de la muestra a través de un método probabilístico.

**Ejercicio 7**
**a)** Descriptiva.

**Ejercicio 8**
**b)** Se utiliza la estadística inferencial.

**Ejercicio 9**
**b)** No probabilístico.

**Ejercicio 10**
**c)** Muestreo probabilístico simple.

# GLOSARIO

**Aleatorio:** refiere a que no hay una selección determinada de sujetos, pero el investigador determina el medio por el cual se hará la selección.
**Azar:** refiere a que la suerte determina si se permite pertenecer o no a la muestra.
**Error de medición:** es la diferencia del valor obtenido (que se midió) en comparación con el valor real.
**Error de muestreo:** es la diferencia entre el resultado que se obtuvo de la muestra y lo que se pudo haber obtenido de la población de la cual se tomó la muestra.
**Estadística:** es una rama de las matemáticas cuyo objetivo general es la descripción de datos, el análisis de muestras, la medición de variables (relación y comparación), el contraste de hipótesis, la predicción, generalización e inferencia de resultados.
**Estadístico:** es un valor numérico que describe una característica de una muestra.

**Muestra:** grupo o subgrupo de individuos que representan de manera cualitativa y cuantitativa a una población.

**Muestra representativa:** la calidad involucra el concepto de representatividad de la muestra. Es una muestra representativa de la población cuando es un reflejo de ella, es decir cuando reúne las características principales de la población en relación con la variable en estudio.

**Muestreo:** proceso de selección cuidadoso y sistemático de la muestra.

**Muestreo no probabilístico:** método de muestreo en el cual no existe la probabilidad asociada, sino que los sujetos son seleccionados de acuerdo con las exigencias del investigador y el objetivo de investigación.

**Muestreo probabilístico:** método de muestreo donde todos los individuos o elementos tienen la misma posibilidad de ser elegidos.

**Parámetro:** valor numérico que define a una población.

**Población:** universo completo de individuos, objetos, eventos o fenómenos a estudiar.

**Variable activa o experimental:** la variable independiente que puede ser manipulada por la persona que está realizando el estudio.

**Variable atributiva:** son aquellas características o atributos que ya poseen los sujetos, por lo tanto, es una variable independiente que no puede ser manipulada por el investigador.

**Variable dependiente:** factor, peculiaridad, condición o evento que son medidos y cuyas variaciones en sus parámetros de medición están influenciadas por las variables independientes.

**Variable independiente:** se caracterizan porque sus variaciones posibles tienen efectos diferenciales sobre la variable dependiente.

**Variable:** todo factor, peculiaridad, condición o evento que puede adquirir más de un valor y que cambia de un sujeto a otro.

# BIBLIOGRAFÍA


Amós, J. (2008). *Estadística para psicólogos I, estadística descriptiva*. Madrid: Pirámide.

Borrego, S. (2008). Estadística descriptiva e inferencial. *Innovación y experiencias educativas*, 13. Recuperado el 25 de septiembre de 2014 de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_13/SILVIA_BORREGO_2.pdf

Coolican, H. (2005). *Métodos de investigación y estadística en psicología.* México: El Manual Moderno.

Fulgencio, M. (s/f). *Tipos de muestreo* (presentación de power point). Enero 2012. Consultada el 25 de septiembre de 2014.

García, B. (2009). *Manual de métodos de investigación para las ciencias sociales*. México: El Manual Moderno.

Johnson, R. y Kuby, P. (2005). *Estadística elemental. Lo esencial.* México: Thomson.

Kerlinger, F y Lee, H (2002). *Investigación del comportamiento: Métodos de investigación en ciencias sociales*. México: McGraw-Hill.

Levin, J. y Levin, W. (2008). *Fundamentos de estadística en la investigación socia*l. México: Oxford.

Pardo, A. y San Martín, R. (2006*). Análisis de datos en psicología II*. Madrid: Pirámide.

Pardo, A., Ruiz, M.A. y San Martín, R. (2009). *Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud I*. Madrid: Pirámide.

# Capítulo 3

# ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE UNA VARIABLE CUANTITATIVA

*Esperanza Guarneros Reyes, Arturo Silva Rodríguez*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Una de las primeras fases del análisis de cualquier investigación consiste en organizar y presentar los datos en tablas y gráficas, de tal forma que sea más fácil y rápido visualizar los hechos más sobresalientes o importantes de la investigación. Otra parte del análisis comprende la representación de los datos por medio de otras técnicas descriptivas. Los métodos cuantitativos descriptivos consisten en el cálculo de una medida numérica que describe un aspecto particular de un conjunto de datos (Aron, Golpes y Aron, 2010).

El objetivo de este capítulo es, precisamente, que el lector conozca las principales técnicas para la descripción de variables cuantitativas a partir de la presentación de un problema que deberá analizar de forma lógica, y plantear las posibles herramientas para su solución.

Además, después de estudiar este capítulo, el lector alcanzará los siguientes objetivos específicos:

**1.** Conocer las medidas que puede usar para describir una variable cuantitativa y la forma de calcularlas; así como tener la capacidad de organizar los datos en una tabla de frecuencias que incluya percentiles y cuartiles, representarlos de forma gráfica e interpretarlos de manera adecuada.
**2.** Conocer la distribución normal como primera aproximación a las distribuciones de variables cuantitativas, y dentro de este tema se abordarán conceptos fundamentales como:
**a)** Los índices de asimetría y curtosis.
**b)** Las puntuaciones típicas.

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Toda investigación está constituida por un conjunto de fases que se interrelacionan de manera estrecha con el propósito de obtener información acerca del fenómeno en estudio. En este capítulo se presentan los conceptos y técnicas cuantitativas fundamentales de cualquier análisis estadístico; por lo tanto, la comprensión cabal del mismo es de suma importancia para revisar y aprovechar en mayor medida los capítulos subsiguientes de este libro, en los cuales se presentan técnicas estadísticas más complejas.

En este capítulo se abordará exclusivamente la etapa cuantitativa-descriptiva, la cual puede utilizar el investigador

como una primera instancia para interpretar la factibilidad de sus hipótesis, así como la generalidad de los resultados de su estudio.

Las técnicas cuantitativas-descriptivas se definen como el cálculo de una medida numérica de un conjunto de datos, que describe un aspecto particular o característico de esos datos. Los índices estadísticos descriptivos más comunes son las medidas de centralidad y variabilidad.

Con el propósito de ejemplificar la forma de usar los procedimientos de centralidad y variabilidad, se utilizarán principalmente los datos de una investigación de Guarneros (2013) en donde se partió de que el psicólogo que labora en el ámbito educativo con población preescolar debe dominar competencias relacionadas con la promoción efectiva del desarrollo del lenguaje oral y escrito de los niños. Con el fin de explicar las técnicas cuantitativas-descriptivas, en este capítulo sólo se tomarán en cuenta los resultados obtenidos por los niños en la evaluación del lenguaje oral.

# Lógica de la solución

Una primera alternativa para analizar los datos de una investigación es seleccionar una forma de ordenarlos para realizar su interpretación. Una manera de hacer esto es por medio de una tabla, la cual consiste en un arreglo de números. Esta primera forma de ordenar los datos permite efectuar comparaciones rápidas y sencillas de los datos contenidos, así como entre diferentes tablas.

# Antecedentes conceptuales

Antes de continuar es importante dar una breve explicación acerca de lo que se conoce como variables continuas y discretas. Cuando los valores que toma una variable son separados, se dice que es una variable discreta; este tipo de variable adquiere un número finito de valores. Así, en la investigación de la evaluación de las habilidades lingüísticas, el sexo de los sujetos del estudio es una variable discreta, ya que un sujeto puede ser niña o niño, que se codifica en la base de datos como: femenino (1) y masculino (2). La otra variable discreta del estudio, aunque por naturaleza no lo sea, fue la edad de los niños evaluados. La edad se midió en términos de los años cumplidos, y por esta razón los casos sólo podían ubicarse por la edad en uno de cinco cohortes; esto es, niños de 3 años 6 meses a 3 años 11 meses, niños de 4 años a 4 años 5 meses, niños de 4 años 6 meses a 4 años 11 meses, niños de 5 años a 5 años 5 meses y niños de 5 años 6 meses a 5 años 11 meses.

En contraste, en las variables continuas siempre existen otros valores entre dos valores potencialmente observables; es decir, estas variables toman un número ilimitado de valores intermedios (Witte y Witte, 2009). Ejemplos de variables continuas son la distancia de recorrido, la cantidad de alcohol ingerido, entre otras. En la investigación que se está analizando se consideraron como variables continuas las puntuaciones obtenidas por los niños al ser evaluados en las diferentes dimensiones del lenguaje oral y escrito; también se tomó en cuenta la puntuación total obtenida por los casos al aplicar la batería de prueba, debido a que los valores obtenidos por esas variables fueron siempre aproximados.

# Construcción de tablas

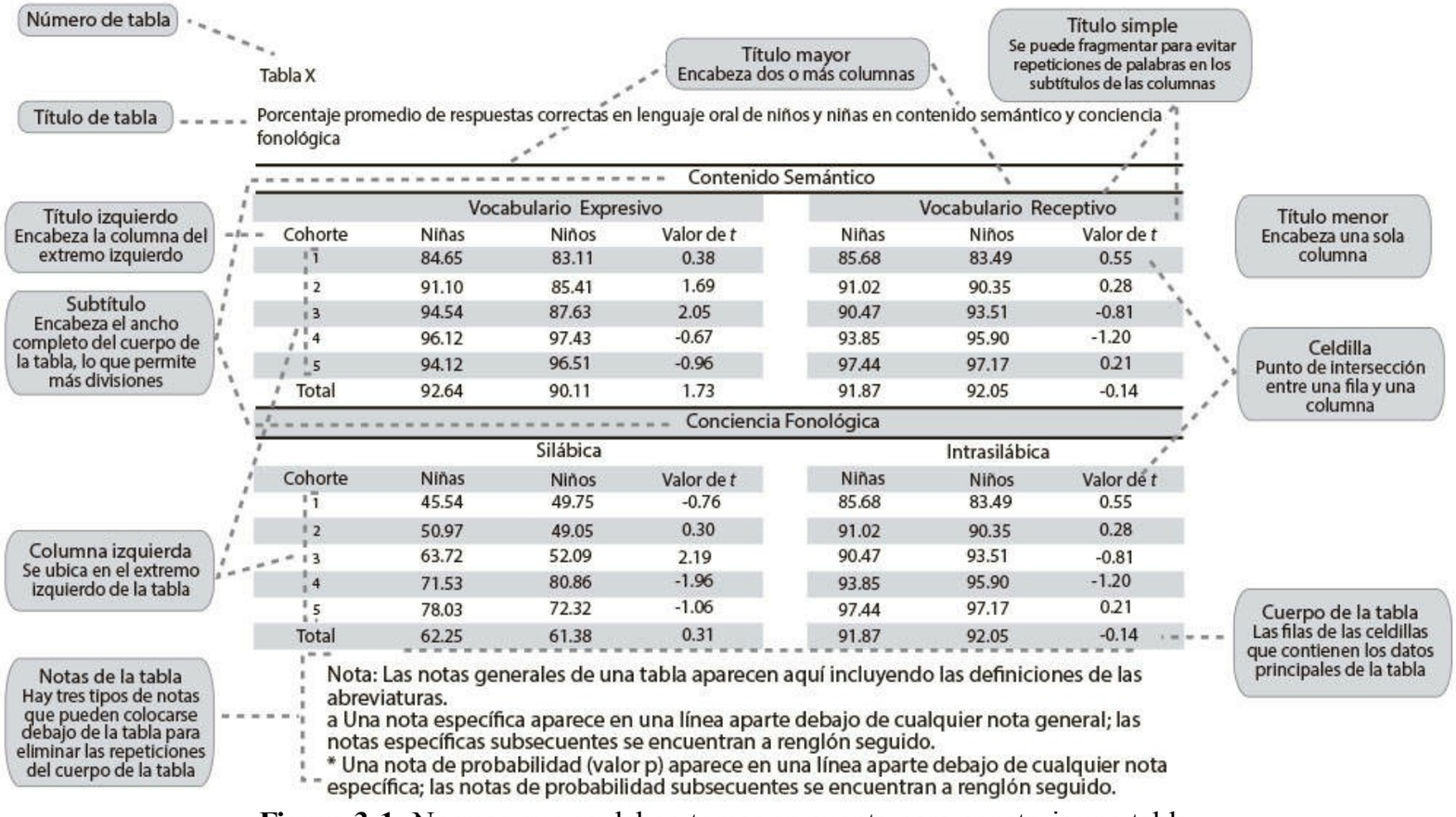
Las representaciones estadísticas en tablas y gráficas son útiles para la descripción de muchos tipos de variables, especialmente de las variables con categorías ordenadas o desordenadas. La decisión acerca de cuál índice estadístico

descriptivo solicitar para representar un conjunto de datos depende, además de si los datos son continuos o discretos, de la suposición que el investigador realiza de ellos. Es decir, si supone que sus datos provienen de una distribución normal, la media y la varianza serán los índices estadísticos más adecuados; pero si no está seguro de las características de la población de donde se recogieron los datos, los estadísticos robustos, tales como la mediana, los cuartiles y los percentiles serán los más adecuados, debido a que estos pueden usarse cuando las variables cuantitativas no cumplen con el supuesto de normalidad (Glass y Stanley, 1974).

A continuación se explicarán algunos de estos procedimientos cuantitativos.

Una vez que se han recopilado los datos de un estudio, el primer paso para que este conjunto adquiera sentido es organizarlos por medio de una tabla; el siguiente paso consiste en presentar los datos en forma de gráficas, y visualizar más rápido la información.

Una tabla, según la *American Psychological Association* (APA) es una serie de ordenamientos que muestran valores, por lo común exactos, dispuestos en filas y columnas, con lo que se facilita la comprensión de ellos. De acuerdo con la APA (2010), las tablas deben construirse siguiendo las normas que se presentan en la figura 3-1.


Número de tabla
Título simple
Se puede fragmentar para evitar repeticiones de palabras en los subtítulos de las columnas
Título mayor
Encabeza dos o más columnas
Tabla X
Título de tabla
Porcentaje promedio de respuestas correctas en lenguaje oral de niños y niñas en contenido semántico y conciencia fonológica
Título izquierdo
Encabeza la columna del extremo izquierdo
Título menor
Encabeza una sola columna
Subtítulo
Encabeza el ancho completo del cuerpo de la tabla, lo que permite más divisiones
Celdilla
Punto de intersección entre una fila y una columna
Columna izquierda
Se ubica en el extremo izquierdo de la tabla
Cuerpo de la tabla
Las filas de las celdillas que contienen los datos principales de la tabla
Notas de la tabla
Hay tres tipos de notas que pueden colocarse debajo de la tabla para eliminar las repeticiones del cuerpo de la tabla
Nota: Las notas generales de una tabla aparecen aquí incluyendo las definiciones de las abreviaturas.
a Una nota específica aparece en una línea aparte debajo de cualquier nota general; las notas específicas subsecuentes se encuentran a renglón seguido.
* Una nota de probabilidad (valor p) aparece en una línea aparte debajo de cualquier nota específica; las notas de probabilidad subsecuentes se encuentran a renglón seguido.

| | Contenido Semántico | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Vocabulario Expresivo | | | Vocabulario Receptivo | | |
| Cohorte | Niñas | Niños | Valor de *t* | Niñas | Niños | Valor de *t* |
| 1 | 84.65 | 83.11 | 0.38 | 85.68 | 83.49 | 0.55 |
| 2 | 91.10 | 85.41 | 1.69 | 91.02 | 90.35 | 0.28 |
| 3 | 94.54 | 87.63 | 2.05 | 90.47 | 93.51 | -0.81 |
| 4 | 96.12 | 97.43 | -0.67 | 93.85 | 95.90 | -1.20 |
| 5 | 94.12 | 96.51 | -0.96 | 97.44 | 97.17 | 0.21 |
| Total | 92.64 | 90.11 | 1.73 | 91.87 | 92.05 | -0.14 |
| | Conciencia Fonológica | | | | | |
| | Silábica | | | Intrasilábica | | |
| Cohorte | Niñas | Niños | Valor de *t* | Niñas | Niños | Valor de *t* |
| 1 | 45.54 | 49.75 | -0.76 | 85.68 | 83.49 | 0.55 |
| 2 | 50.97 | 49.05 | 0.30 | 91.02 | 90.35 | 0.28 |
| 3 | 63.72 | 52.09 | 2.19 | 90.47 | 93.51 | -0.81 |
| 4 | 71.53 | 80.86 | -1.96 | 93.85 | 95.90 | -1.20 |
| 5 | 78.03 | 72.32 | -1.06 | 97.44 | 97.17 | 0.21 |
| Total | 62.25 | 61.38 | 0.31 | 91.87 | 92.05 | -0.14 |

**Figura 3-1.** Normas que se deben tomar en cuenta para construir una tabla.

La tabla prototípica que se muestra en la figura 3-1 incluye los términos técnicos, la ubicación y definición de cada elemento. Cabe señalar que el diseño de una tabla debe ser lógico para que el lector la entienda rápidamente. Se recomienda que las entradas en las que se desea hacer comparaciones se coloque una al lado de la otra (como medias, desviaciones estándar, tamaños de la muestra, entre otras). También se sugiere colocar los letreros de las

variables y las condiciones muy cerca de los valores de las variables, para facilitar la comparación.

La tabla mostrada (figura 3-1) se le conoce como canónica, debido a que adquiere una forma estándar. La ventaja de esta forma canónica radica en que, por lo general, el lector busca cierto tipo de información. Sin embargo, habrá ocasiones en que esta forma estándar no sea adecuada, debido a que se tiene el interés en señalar un punto específico o remarcar determinadas relaciones. En este caso, lo más adecuado es utilizar un diseño de tabla que fije la atención del lector en esa particularidad que se desea destacar.

La figura 3-1 se construyó con datos del estudio de las habilidades lingüísticas en niños en edad preescolar. Cada renglón principal representa un subtítulo que corresponde al contenido semántico y a la conciencia fonológica del lenguaje oral. Los títulos mayores corresponden al vocabulario expresivo y receptivo del contenido semántico; los otros, son las categorías de la conciencia fonológica que comprenden las dimensiones silábica e intrasilábica. En el título izquierdo de la tabla están representadas las cinco cohortes del estudio.

A continuación se presentarán una serie de normas establecidas por la APA (2010) y que se deben seguir en la construcción de tablas en los reportes científicos.

***Título de la tabla***

- El título debe ser breve, claro y explicativo. Debe ser puesto arriba de la tabla, en el margen superior izquierdo, debajo de la palabra **Tabla** (con la inicial en mayúscula) acompañada por el número que la designa.
- De ser necesario, se pueden explicar las abreviaturas dentro del mismo título (p. ej., falsa alarma [FA]).

***Numeración de las tablas***

- Las tablas deben ser numeradas de manera secuencial con números arábigos, dentro del texto y en su totalidad. Por ejemplo: Tabla 1, Tabla 2, Tabla 3, Tabla 4, Tabla 5, etc. No se deben utilizar subíndices como 3a o 3b.
- Si la tabla se encuentra en un apéndice se deben utilizar letras mayúsculas y número (Tabla B2).

***Relación entre tablas y texto***

- Las tablas complementan, no duplican el texto.
- En el texto se escriben los elementos más destacados de la tabla.
- Al citar la tabla en el cuerpo del texto, se escribe el número específico de la tabla (p. ej., como se muestra en la Tabla 1).

***Relación entre tablas***

- Se debe evitar la combinación de tablas que repitan datos.
- Con la finalidad de hacer comparaciones, es necesario ser consistente en la presentación de todas las tablas.
- Es necesario usar la misma terminología en todos los casos.

***Encabezado***

- Se debe seleccionar una lógica clara para organizar los datos.
- Es necesario identificar las columnas de datos debajo de ellos.
- Los títulos deben ser cortos, no más anchos que la columna que ocupan.

***Cuerpo de una tabla***

- Valores decimales.
- Celdillas vacías.
  - Se debe dejar en blanco si no hay dato.
  - Se inserta una raya o guion si no se obtuvieron o no se informaron los datos.

- Conciso. No incluir datos que se pueden calcular con facilidad a partir de otros.

***Notas de tablas***

Las tablas presentan tres tipos de notas y se ubican en el margen izquierdo (sin sangría) debajo de la tabla (entre la tabla y la nota no se insertan espacios) y deben ser ordenadas en secuencia: nota general, nota específica y nota de probabilidad; cada tipo de nota debe ir en una línea nueva.

- **Generales:** explican u ofrecen información relacionada con la tabla como un todo, explican las abreviaturas, símbolos y afines.
- **Específicas:** se refieren a una columna, fila o reactivo específico. Se indican por medio de una letra minúscula subescrita ($_{a, b, c,}$ etc.).
- **De probabilidad:** indican los resultados de pruebas significativas y se representan con un asterisco sobreescrito $*p < .05$. $**p < .01$.

***Tablas de otras fuentes***

- Se debe obtener la autorización de la fuente que posee la propiedad literaria (derechos de autor), para reproducir o adaptar una parte o toda una tabla de otro autor.
- La tabla reproducida de otra fuente debe presentar, en la parte inferior, la referencia del autor original, aunque se trate de una adaptación.

# REPRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Una vez definidas las normas más importantes que señala la APA (2010) para la construcción de tablas, se revisarán algunos procedimientos estadísticos para organizar la información de un trabajo de investigación. En todo estudio es necesario, en primer lugar, organizar los datos por medio de una estructura que permita descubrir contenidos relevantes acordes con el objetivo de la investigación, puesto que en la mayoría de las ocasiones, los instrumentos utilizados en la recolección de datos proporcionan la información con un mínimo de organización.

De esta manera, una de las primeras opciones para comprender e interpretar los datos es presentarlos en una tabla, puesto que ésta proporciona un panorama general de los resultados obtenidos.

En la tabla 3-1 se muestran los resultados obtenidos por los niños cuando se evalúo el lenguaje oral en el estudio de Guarneros (2013). Los datos que se muestran corresponden al porcentaje de respuestas correctas que obtuvieron los 302 niños en lenguaje oral.

**Tabla 3-1. Porcentajes de respuestas correctas obtenidos por los niños en lenguaje oral**

| # | % | # | % | # | % | # | % | # | % | # | % | # | % | # |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 56 | 39 | 85 | 77 | 88 | 115 | 74 | 153 | 58 | 191 | 92 | 229 | 88 | 267 |
| 2 | 33 | 40 | 65 | 78 | 56 | 116 | 92 | 154 | 62 | 192 | 63 | 230 | 87 | 268 |
| 3 | 45 | 41 | 95 | 79 | 67 | 117 | 81 | 155 | 85 | 193 | 64 | 231 | 74 | 269 |
| 4 | 74 | 42 | 78 | 80 | 69 | 118 | 95 | 156 | 90 | 194 | 72 | 232 | 79 | 270 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 44 | 43 | 73 | 81 | 56 | 119 | 88 | 157 | 78 | 195 | 58 | 233 | 74 | 271 |
| 6 | 58 | 44 | 73 | 82 | 68 | 120 | 85 | 158 | 92 | 196 | 37 | 234 | 73 | 272 |
| 7 | 50 | 45 | 82 | 83 | 86 | 121 | 87 | 159 | 92 | 197 | 58 | 235 | 81 | 273 |
| 8 | 53 | 46 | 97 | 84 | – | 122 | 62 | 160 | 82 | 198 | 54 | 236 | 69 | 274 |
| 9 | 62 | 47 | 81 | 85 | 44 | 123 | 58 | 161 | 71 | 199 | 58 | 237 | 74 | 275 |
| 10 | – | 48 | 86 | 86 | 47 | 124 | 71 | 162 | 73 | 200 | 62 | 238 | 56 | 276 |
| 11 | 42 | 49 | 60 | 87 | – | 125 | 56 | 163 | 54 | 201 | 65 | 239 | 51 | 277 |
| 12 | 71 | 50 | 50 | 88 | 67 | 126 | 55 | 164 | 55 | 202 | 71 | 240 | 72 | 278 |
| 13 | 65 | 51 | 85 | 89 | 63 | 127 | 62 | 165 | 51 | 203 | 59 | 241 | 60 | 279 |
| 14 | 40 | 52 | 90 | 90 | 63 | 128 | 79 | 166 | 41 | 204 | 73 | 242 | 60 | 280 |
| 15 | 78 | 53 | 86 | 91 | 63 | 129 | 71 | 167 | 54 | 205 | 71 | 243 | 51 | 281 |
| 16 | 49 | 54 | 71 | 92 | 59 | 130 | 63 | 168 | 56 | 206 | 77 | 244 | 62 | 282 |
| 17 | 38 | 55 | 72 | 93 | 64 | 131 | 50 | 169 | 41 | 207 | 78 | 245 | 81 | 283 |
| 18 | 42 | 56 | 71 | 94 | 56 | 132 | 68 | 170 | 58 | 208 | 69 | 246 | 69 | 284 |
| 19 | 46 | 57 | 74 | 95 | 47 | 133 | 50 | 171 | 56 | 209 | 69 | 247 | 73 | 285 |
| 20 | 67 | 58 | 62 | 96 | 97 | 134 | 58 | 172 | 60 | 210 | 71 | 248 | 33 | 286 |
| 21 | 76 | 59 | 56 | 97 | 96 | 135 | 62 | 173 | 58 | 211 | 67 | 249 | 54 | 287 |
| 22 | 58 | 60 | 60 | 98 | 94 | 136 | 74 | 174 | 81 | 212 | 83 | 250 | 64 | 288 |
| 23 | 63 | 61 | 60 | 99 | 92 | 137 | 62 | 175 | 72 | 213 | 69 | 251 | 49 | 289 |
| 24 | 51 | 62 | 78 | 100 | 87 | 138 | 74 | 176 | 69 | 214 | 63 | 252 | 67 | 290 |
| 25 | – | 63 | 76 | 101 | 88 | 139 | 72 | 177 | 60 | 215 | 60 | 253 | 81 | 291 |
| 26 | – | 64 | 67 | 102 | 94 | 140 | 69 | 178 | 65 | 216 | 58 | 254 | 41 | 292 |
| 27 | 55 | 65 | 59 | 103 | 91 | 141 | 72 | 179 | 67 | 217 | 60 | 255 | 88 | 293 |
| 28 | 68 | 66 | 74 | 104 | 82 | 142 | 69 | 180 | 87 | 218 | 67 | 256 | 78 | 294 |
| 29 | 60 | 67 | 87 | 105 | 96 | 143 | 68 | 181 | 76 | 219 | 63 | 257 | 87 | 295 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 65 | 68 | 86 | 106 | 97 | 144 | 68 | 182 | 71 | 220 | 74 | 258 | 67 | 296 |
| 31 | 78 | 69 | 56 | 107 | 92 | 145 | 59 | 183 | 87 | 221 | 83 | 259 | 63 | 297 |
| 32 | 65 | 70 | 76 | 108 | 96 | 146 | 67 | 184 | 91 | 222 | 77 | 260 | 53 | 298 |
| 33 | 85 | 71 | 79 | 109 | 91 | 147 | 55 | 185 | 79 | 223 | 85 | 261 | 83 | 299 |
| 34 | 87 | 72 | 47 | 110 | 63 | 148 | 64 | 186 | 78 | 224 | 64 | 262 | 85 | 300 |
| 35 | 69 | 73 | 68 | 111 | 85 | 149 | 53 | 187 | 78 | 225 | 79 | 263 | 67 | 301 |
| 36 | 71 | 74 | 64 | 112 | 60 | 150 | 62 | 188 | 77 | 226 | 86 | 264 | 49 | 302 |
| 37 | 68 | 75 | 54 | 113 | 60 | 151 | 58 | 189 | 82 | 227 | 81 | 265 | 81 | |
| 38 | 81 | 76 | 67 | 114 | 68 | 152 | 77 | 190 | 82 | 228 | 74 | 266 | 68 | |

Esta primera ordenación proporciona muy poca información acerca de cómo se distribuyeron las habilidades lingüísticas orales en los niños. Lo más destacado de esta tabla es que los niños 10, 25, 26, 84 y 87 no terminaron la evaluación, por lo que no fue posible conocer su ejecución en lenguaje oral, es decir, se obtuvo información sobre el desempeño de sólo 297 niños.

# Tablas ordenadas

Otra manera de organizar los datos consiste en ordenarlos conforme a su posición ordinal y colocarlos de acuerdo con el porcentaje obtenido en la evaluación del lenguaje oral, del más bajo al más alto, con lo cual se obtendrá la posición que tuvo cada niño. Este tipo de organización se muestra en la tabla 3-2.

**Tabla 3-2. Porcentaje de respuestas correctas de los niños en lenguaje oral conforme a la posición ordinal**

| % | PO | % | PO | % | PO | % | PO | % | PO | % | PO | % | PO |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 1.5 | 55 | 38.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 71 | 158.5 | 74 | 185 | 82 | 231.5 |
| 33 | 1.5 | 55 | 38.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 71 | 158.5 | 76 | 193.5 | 82 | 231.5 |
| 37 | 3 | 56 | 45.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 71 | 158.5 | 76 | 193.5 | 82 | 231.5 |
| 38 | 4 | 56 | 45.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 71 | 158.5 | 76 | 193.5 | 82 | 231.5 |
| 40 | 5 | 56 | 45.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 71 | 158.5 | 76 | 193.5 | 82 | 231.5 |
| 41 | 7 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 77 | 198.5 | 82 | 231.5 |
| 41 | 7 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 77 | 198.5 | 83 | 236 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 7 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 77 | 198.5 | 83 | 236 |
| 42 | 9.5 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 77 | 198.5 | 83 | 236 |
| 42 | 9.5 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 77 | 198.5 | 85 | 242.5 |
| 44 | 11.5 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 77 | 198.5 | 85 | 242.5 |
| 44 | 11.5 | 56 | 45.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 71 | 158.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 45 | 13 | 58 | 56.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 72 | 167.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 46 | 14 | 58 | 56.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 72 | 167.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 47 | 16 | 58 | 56.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 72 | 167.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 47 | 16 | 58 | 56.5 | 62 | 87 | 67 | 126 | 72 | 167.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 47 | 16 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 67 | 126 | 72 | 167.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 49 | 18.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 67 | 126 | 72 | 167.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 49 | 18.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 78 | 206 | 85 | 242.5 |
| 49 | 18.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 78 | 206 | 86 | 251.5 |
| 50 | 22.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 50 | 22.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 50 | 22.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 50 | 22.5 | 58 | 56.5 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 51 | 26.5 | 59 | 66 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 51 | 26.5 | 59 | 66 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 73 | 174.5 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 51 | 26.5 | 59 | 66 | 63 | 98 | 68 | 137.5 | 74 | 185 | 79 | 214 | 86 | 251.5 |
| 51 | 26.5 | 59 | 66 | 64 | 107 | 68 | 137.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 53 | 30 | 59 | 66 | 64 | 107 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 53 | 30 | 59 | 66 | 64 | 107 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 53 | 30 | 59 | 66 | 64 | 107 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 54 | 34 | 60 | 75.5 | 64 | 107 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 34 | 60 | 75.5 | 64 | 107 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 54 | 34 | 60 | 75.5 | 64 | 107 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 54 | 34 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 54 | 34 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 55 | 38.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 87 | 260.5 |
| 55 | 38.5 | 60 | 75.5 | 65 | 115 | 69 | 147.5 | 74 | 185 | 81 | 223 | 88 | 268 |

PO = posición ordinal.

De este modo, se puede ver que en la muestra de 297 niños, un niño cuyo porcentaje de preguntas correctas en la prueba de lenguaje oral fue de 40% tiene la quinta posición más baja; por su parte, el que obtuvo 45% ocupa la treceava posición más baja.

Es frecuente encontrar puntuaciones repetidas en series de datos de 15 o más, en este caso son 297. Así, por ejemplo, 11 niños obtuvieron 62% de respuestas correctas en lenguaje oral, por lo que se les asigna la misma posición. Cuando existen puntuaciones idénticas, la posición se obtiene calculando el promedio de éstas. Por ejemplo, en los 11 niños con la misma puntuación de 62%, el promedio de las 11 posiciones (82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92) es 87, que se asigna a todas las puntuaciones de 62%.

Es posible acortar la lista de puntuaciones si éstas se arreglan conforme a una distribución de frecuencias. En la tabla 3-3 se muestra el porcentaje de respuestas correctas obtenidas por los 297 niños en lenguaje oral y a la derecha de cada una de ellas se presenta el número de veces que se observó, llamado frecuencia. El total de frecuencias es *n*.

**Tabla 3-3. Distribución de frecuencias agrupadas del porcentaje de respuestas correctas obtenido por los niños en lenguaje oral**

| Porcentaje ($X_i$) | Frecuencia ($f_i$) | Porcentaje ($X_i$) | Frecuencia ($f_i$) | Porcentaje ($X_i$) | Frecuencia ($f_i$) | Porcentaje ($X_i$) | Frecuencia ($f_i$) | Porcentaje ($X_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 2 | 49 | 3 | 62 | 11 | 74 | 13 | 87 |
| 37 | 1 | 50 | 4 | 63 | 11 | 76 | 4 | 88 |
| 38 | 1 | 51 | 4 | 64 | 7 | 77 | 6 | 90 |
| 40 | 1 | 53 | 3 | 65 | 9 | 78 | 9 | 91 |
| 41 | 3 | 54 | 5 | 67 | 13 | 79 | 7 | 92 |
| 42 | 2 | 55 | 4 | 68 | 10 | 81 | 11 | 94 |
| 44 | 2 | 56 | 10 | 69 | 10 | 82 | 6 | 95 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 1 | 58 | 12 | 71 | 12 | 83 | 3 | 96 |
| 46 | 1 | 59 | 7 | 72 | 6 | 85 | 10 | 97 |
| 47 | 3 | 60 | 12 | 73 | 8 | 86 | 8 | – |
| | 17 | | 64 | | 97 | | 77 | |
| Frecuencia total = 297. | | | | | | | | |

## Tabla de distribución de frecuencias agrupadas

Otra manera de organizar los datos consiste en seleccionar un conjunto de intervalos contiguos, pero que no se traslapen, de tal manera que cada puntuación sea colocada en cada uno de los intervalos, es decir, cada intervalo debe ser mutuamente excluyente. Estos intervalos se conocen como intervalos de clase, y la distribución completa de los mismos por lo general se denomina distribución de frecuencias agrupadas.

Una de las primeras cuestiones que se debe considerar en esta forma de organización es definir el número de intervalos de clase. En las ciencias del comportamiento se recomienda que los datos se agrupen en 10 a 20 intervalos de clase. No existe una regla fija para determinar el número adecuado de intervalos de clase, sino que en última instancia, estos serán determinados por el interés del investigador y por la naturaleza de los datos.

Otra cuestión que debe decidirse se refiere a la amplitud del intervalo de clase, para lo cual es i3-3mportante encontrar el rango de variabilidad de las puntuaciones, que es la diferencia entre la mayor y la menor de éstas, más la sensibilidad del instrumento de medida; es decir:

$$R = P_a - P_b + S$$

Donde:

$P_a$ = la puntuación más alta.

$P_b$ = la puntuación más baja.

$S$ = la sensibilidad del instrumento, que la mayoría de las veces es 1.

Sin embargo, en ocasiones el instrumento es tan sensible que arroja datos en décimas o centésimas, por lo que $S$ será 0.1 o 0.01, respectivamente.

Una vez encontrado el rango y que se ha decidido el número de intervalos que contendrá la distribución de frecuencias, es muy sencillo determinar la amplitud de cada intervalo, sólo se divide el rango entre el número de intervalos ($k$). De manera simbólica, la amplitud del intervalo de clase está dada por:

$$C = \frac{R}{K}$$

Una vez que se ha determinado la amplitud del intervalo de clase es posible comenzar a construir la distribución de frecuencias, y para ello se toma la puntuación más baja de los datos originales como el límite inferior del primer intervalo de clase; mientras que el límite superior de ese intervalo de clase se obtiene agregando al límite inferior. El límite inferior del intervalo de clase siguiente es el número entero consecutivo a la puntuación superior del intervalo

de clase inferior. Este mismo procedimiento se sigue hasta que todas las puntuaciones se hayan incluido en los intervalos de clase apropiados.

Para ejemplificar el procedimiento se tomarán los datos de la tabla 3-2, que contiene el porcentaje de respuestas correctas obtenidas por los niños en lenguaje oral. Para tal caso suponga que el número de intervalos de clase que se requiere es 11, por lo que se debe dividir el rango por 11. La puntuación más baja es 33 y la más alta 97, de tal manera que el rango es:

$$R = 97 - 33 + 1 = 65$$

Entonces la amplitud de los intervalos de clase será:

$$C = \frac{65}{11} = 5.91$$

Es obvio que resulta más conveniente utilizar una amplitud de 6 para el intervalo de clase, ya que no se comete ningún error si se redondea al número más cercano.

Como el valor menor en la tabla 3-3 es 33 y el mayor es 97, los intervalos pueden comenzarse en 33, que corresponde al límite inferior del primer intervalo. Para obtener el límite superior del primer intervalo se agrega *C-1*, que en este caso es 6 – 1 = 5, y como se comenzó en 33, el límite superior de este intervalo de clase es 38. El límite inferior del intervalo siguiente será el número entero consecutivo del límite superior del intervalo anterior (en este caso 39). Los demás intervalos se determinan de la misma manera. El resultado final de la construcción de los intervalos de clase se muestra en la tabla 3-4.

**Tabla 3-4. Intervalos de clase**

| Límite inferior | Límite superior |
|---|---|
| 33 | 38 |
| 39 | 44 |
| 45 | 50 |
| 51 | 56 |
| 57 | 62 |
| 63 | 68 |
| 69 | 74 |
| 75 | 80 |
| 81 | 86 |
| 87 | 92 |
| 93 | 98 |

Una vez establecidos los intervalos de clase con los que se trabajará, se determina el número de valores que existen en cada intervalo, y para ello es necesario observar los valores tabulados y colocar la frecuencia de aparición para cada intervalo de clase. Por ejemplo, en el primer intervalo que comprende los valores entre 33 y 38, de acuerdo con la tabla 3-3 se observa que caen los valores originales de 33, 33, 37 y 38, por lo que la frecuencia para ese intervalo es de cuatro valores. En la tabla 3-5 se muestra el resultado de hacer el conteo de valores para los 11 intervalos de clase.

**Tabla 3-5. Distribución del porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral en una muestra de 297 niños en edad preescolar**

| Límite inferior | Límite superior | Frecuencia |
|---|---|---|
| 33 | 38 | 4 |
| 39 | 44 | 8 |
| 45 | 50 | 12 |
| 51 | 56 | 26 |
| 57 | 62 | 42 |
| 63 | 68 | 50 |
| 69 | 74 | 49 |
| 75 | 80 | 26 |
| 81 | 86 | 38 |
| 87 | 92 | 31 |
| 93 | 98 | 11 |
| | **Total** | **297** |

El valor verdadero o exacto de un número se obtiene al sumar y restar la mitad de la sensibilidad del instrumento al valor informado. Por ejemplo, en el porcentaje de respuestas correctas en el lenguaje oral de los niños, el porcentaje informado de 33% está realmente entre 33% más menos 0.5%; es decir, 32.5 y 33.5%. Por supuesto, tal razonamiento también es válido para estos valores aunque se hayan agrupado en intervalos de clase. Así, no obstante que el primer intervalo de clase se representa como 33 a 38, los límites verdaderos serán 32.5 a 38.5. Esta aclaración es importante en el cálculo de la mediana y de los percentiles, como se verá más adelante.

A menudo también es conveniente obtener la distribución de frecuencias acumuladas, que se encuentra al sumar las frecuencias anteriores al intervalo de clase correspondiente, como se muestra en la tabla 3-6.

**Tabla 3-6. Distribución de frecuencias agrupadas**

| Límite inferior | Límite superior | Frec | Frec acum | Prop | Prop acum | % | % acumulado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 38 | 4 | 4 | 0.013 | 0.013 | 1.3 | 1.3 |
| 39 | 44 | 8 | 12 | 0.027 | 0.040 | 2.7 | 4.0 |
| 45 | 50 | 12 | 24 | 0.040 | 0.081 | 4.0 | 8.1 |
| 51 | 56 | 26 | 50 | 0.088 | 0.168 | 8.8 | 16.8 |
| 57 | 62 | 42 | 92 | 0.141 | 0.310 | 14.1 | 31.0 |
| 63 | 68 | 50 | 142 | 0.168 | 0.478 | 16.8 | 47.8 |
| 69 | 74 | 49 | 191 | 0.165 | 0.643 | 16.5 | 64.3 |
| 75 | 80 | 26 | 217 | 0.088 | 0.731 | 8.8 | 73.1 |
| 81 | 86 | 38 | 255 | 0.128 | 0.859 | 12.8 | 85.9 |
| 87 | 92 | 31 | 286 | 0.104 | 0.963 | 10.4 | 96.3 |
| 93 | 98 | 11 | 297 | 0.037 | 1.000 | 3.7 | 100.0 |

Nota: Frec = frecuencia; Frec acum = frecuencia acumulada; Prop = proporción; Prop acum = proporción acumulada.

Otra información que resulta útil es la proporción de casos que cae dentro de un intervalo de clase particular, lo cual recibe el nombre de frecuencia relativa por ocurrencia. En la columna cinco de la misma tabla 3-6 se observa la proporción para este ejemplo, que se obtuvo al dividir la frecuencia de cada intervalo de clase por el total de niños (297). Por ejemplo, la proporción de valores entre 69 y 74 es 0.165; es decir, 0.165 de los valores está entre 69 y 74. Algunas veces esta proporción se multiplica por 100 para obtener la distribución porcentual. Entonces, al multiplicar 0.165 por 100 se obtiene que 16.5% de los 297 niños tuvieron entre 69 y 74% de respuestas correctas cuando fueron evaluados en lenguaje oral.

Al igual que las frecuencias brutas, las frecuencias relativas pueden acumularse para facilitar la obtención de información referente a la frecuencia relativa de los valores dentro de dos o más intervalos de clase. En la tabla 3-6 se muestran los intervalos de clase, las frecuencias, las frecuencias acumuladas, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

Por lo general, la distribución de frecuencias no es suficiente para tener una visión clara de la forma en que se distribuyen los datos; por lo tanto, es recomendable representar de manera gráfica dicha distribución. Los métodos más comunes para este fin son: el histograma o diagrama de columnas, el polígono de frecuencias o diagrama de líneas, y la curva de percentiles u ojiva.

# Representación gráfica para variables cuantitativas

El **histograma** que es un conjunto de barras en el que los valores de la variable que ha de considerarse se representan en el eje de las abscisas, mientras que la escala en el eje de las ordenadas es la frecuencia de ocurrencia; de este modo, la base de la barra es el intervalo de clase, en tanto que la altura es el número de casos por intervalo. Las barras deben estar unidas y para lograrlo se utilizan los límites reales de los intervalos de clase que se muestran en la tabla 3-7.

En la figura 3-2 se representa el histograma de la tabla 3-7.

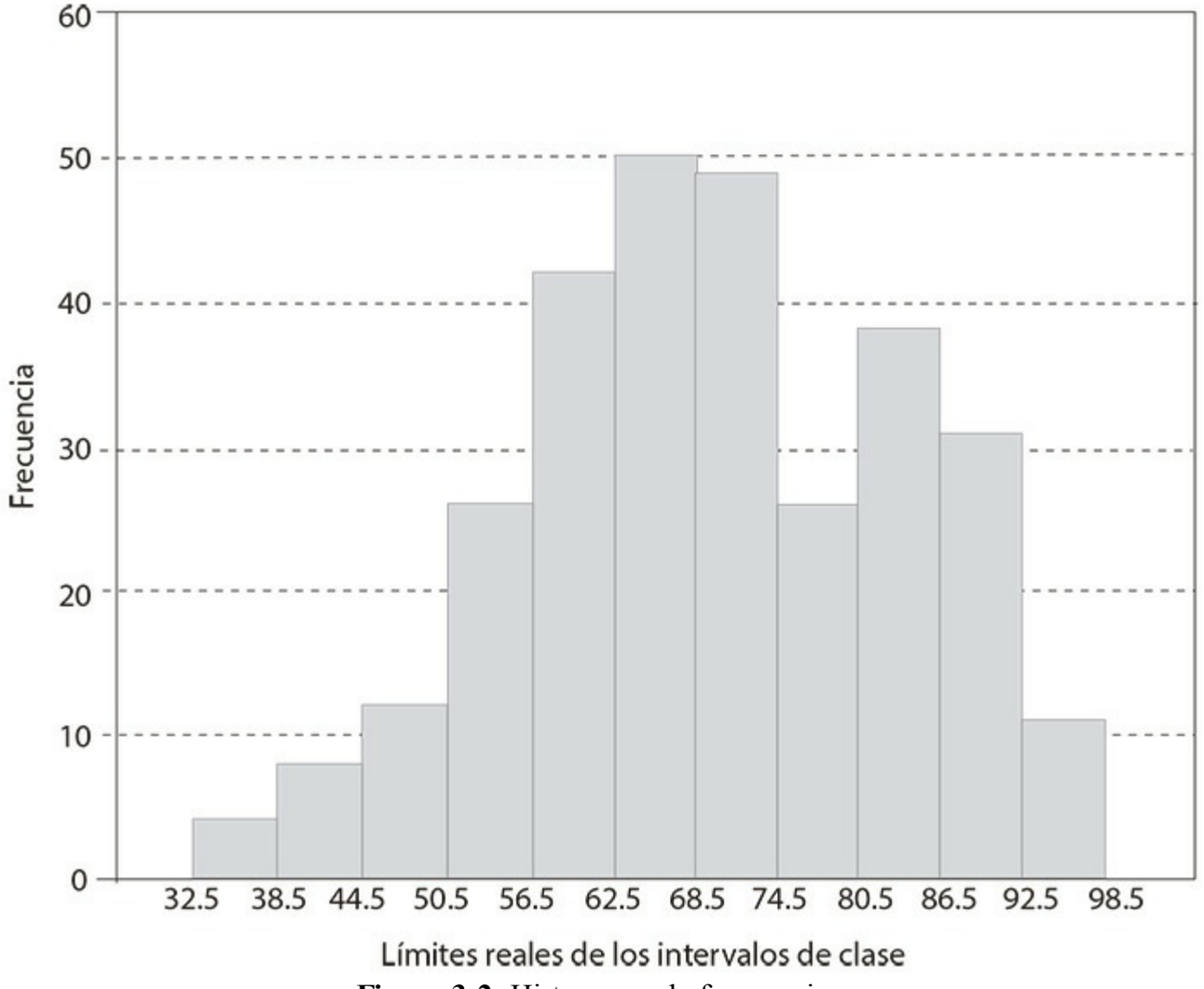



**Figura 3-2.** Histograma de frecuencias.

**Tabla 3-7. Límites reales y puntos medios de la distribución de frecuencias agrupadas**

| Límite real inferior | Límite real superior | Puntos medios | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| 32.5 | 38.5 | 35.5 | 4 |
| 38.5 | 44.5 | 41.5 | 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 44.5 | 50.5 | 47.5 | 12 |
| 50.5 | 56.5 | 53.5 | 26 |
| 56.5 | 62.5 | 59.5 | 42 |
| 62.5 | 68.5 | 65.5 | 50 |
| 68.5 | 74.5 | 71.5 | 49 |
| 74.5 | 80.5 | 77.5 | 26 |
| 80.5 | 86.5 | 83.5 | 38 |
| 86.5 | 92.5 | 89.5 | 31 |
| 92.5 | 98.5 | 95.5 | 11 |
| | **Total** | | **297** |

Puesto que en el intervalo 62.5 a 65.5 la frecuencia más alta es 50, no es necesario extender la escala de la ordenada más allá de 50, y ya que las puntuaciones van del intervalo 32.5 a 38.5 al 92.5 a 98.5, la escala de las abscisas se representa hasta esa distancia.

La forma de hacer el **polígono,** que es el otro método para representar distribuciones de frecuencias agrupadas, es muy semejante a la del histograma. En el polígono de frecuencias los intervalos de clase se sustituyen por los puntos medios, sobre los cuales se localizan un punto que corresponde a la frecuencia de dicha clase, y después esos puntos se unen por medio de rectas. Con la finalidad de unir el polígono a la abscisa, es necesario agregar otros dos puntos medios, uno para cada extremo. En la figura 3-3 se muestra el polígono de frecuencias para los datos de la tabla 3-7.

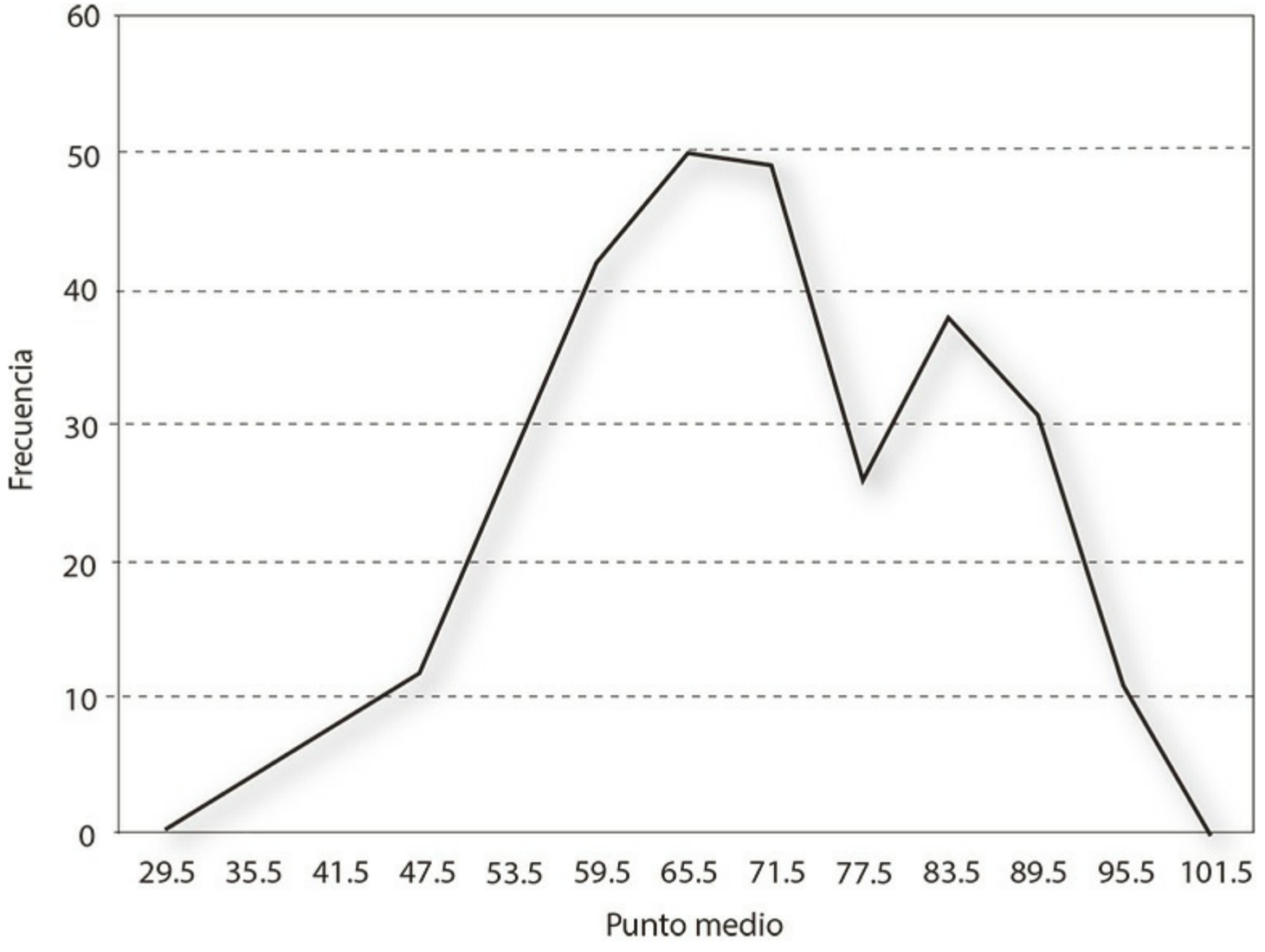



**Figura 3-3.** Polígono de frecuencias.

La forma de obtener los puntos medios es:

$$PM = \frac{LR1 + LRS}{2}$$

Para este caso, el primer punto medio resulta de hacer la siguiente operación:

$$PM_1 = \frac{32.5 + 38.5}{2} = 35.5$$

Por último, el tercer método es la **ojiva**, que corresponde a la representación gráfica de la frecuencia acumulada o de la frecuencia porcentual acumulada; y cuando esta última es representada, la gráfica resultante se denomina curva de percentiles.

Para el proceso de construcción se toma la columna de las frecuencias acumuladas o los porcentajes acumulados y

se representa por medio de un punto en el límite superior del intervalo de clase, es decir, el límite que separa dos clases consecutivas. Esta gráfica es de gran utilidad en el cálculo de los percentiles, los cuartiles y la mediana, como se verá más adelante. En la figura 3-4 se aprecia la ojiva que se obtiene a partir de los datos de la tabla 3-6.

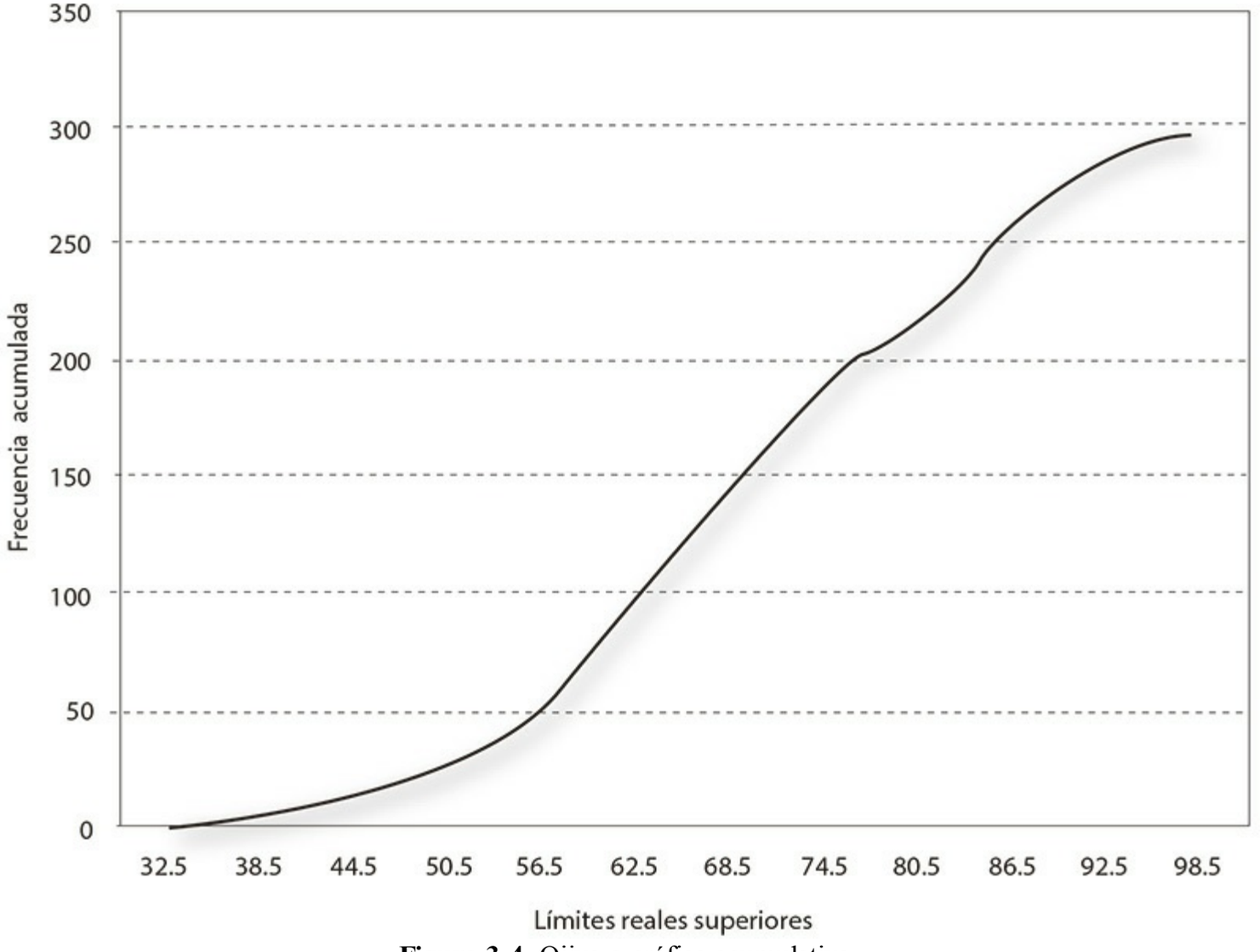



**Figura 3-4.** Ojiva o gráfica acumulativa.

En las figuras 3-2 y 3-3 se muestra la forma que adquiere el histograma y el polígono de frecuencias, respectivamente, del porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral en una muestra de 297 niños en edad preescolar. En el caso del histograma, el eje horizontal muestra los límites reales de cada intervalo de clase. En este sentido, se puede mencionar que cuatro niños (de acuerdo con la tabla 3-6) obtuvieron una calificación en lenguaje oral entre 32.5 y 38.5; ocho obtuvieron una calificación de 38.5 y 44.5; y 50 niños tuvieron una calificación entre 62.5 y 68.5; y así sucesivamente. En la figura 3-2 también se observa que la distribución del porcentaje de respuestas correctas en los niños una forma muy semejante a la distribución normal teórica, aunque ligeramente negativa

(cargada a los valores altos), es decir, la mayoría de los sujetos investigados se agrupó alrededor de la media y muy pocos obtuvieron valores extremos, ya sea que estos hayan sido muy altos o muy bajos. En los siguientes párrafos se ahondará más en esta información.

# MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

En la sección anterior se explicó cómo un grupo de datos puede ser ordenado de manera gráfica o en forma de tabla. Éste es un primer acercamiento para analizar los datos; sin embargo, la mayoría de las veces es necesario resumir los datos en unas cuantas medidas descriptivas, llamadas medidas de tendencia central, que evalúan cuantitativamente la agrupación de los datos alrededor de un valor central. La ventaja de estos índices estadísticos es que permiten reducir un conjunto de datos a un valor cuantitativo, lo que permite resumir los resultados de una investigación. Las medidas de tendencia central más comunes son: la moda, la media, la mediana, los cuartiles y los percentiles.

## Moda

La moda es el valor que se repite un mayor número de veces en un conjunto de datos. Por ejemplo, en el siguiente conjunto de datos: 1, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9 y 10, la moda es 4, ya que es la puntuación más frecuente. Nótese que la moda es la puntuación más frecuente (en este caso 4) y no la frecuencia de esa puntuación (en este caso 3).

Cuando todos los valores son diferentes se dice que no existe moda. Por otra parte, cuando dos puntuaciones adyacentes tienen la misma frecuencia y ésta es la mayor, la moda es el promedio de las dos puntuaciones. Por ejemplo, en un grupo de puntuaciones: 1, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6 y 7, la moda es 4.5, ya que tanto el 4 como el 5 se repiten tres veces y son puntuaciones adyacentes.

En algunos conjuntos de datos pueden existir dos o más puntuaciones no adyacentes cuya frecuencia es la misma, y esta frecuencia común puede ser mayor que la de cualquier otra puntuación, entonces se dice que existen varias modas. En caso de que sean sólo dos puntuaciones no adyacentes que comparten la misma frecuencia máxima, se denomina **bimodal;** cuando son tres o más se llama **multimodal.** Por ejemplo, en el conjunto de puntuaciones 18, 19, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 22, 22, 22, 23 y 24, tanto 19 como 22 son modas, ya que ambas aparecen cuatro veces, por lo que es un grupo de datos bimodal.

Autores como Spiegel (1970) propusieron una fórmula para obtener la moda de datos agrupados en distribuciones de frecuencia; sin embargo, es común obtener la moda por inspección y no por cómputo, de manera que la moda se designa como el punto medio del intervalo de clase que contiene la mayor frecuencia. De acuerdo con este punto de vista, la moda de los datos de la tabla 3-7 es la calificación de 65.5, puesto que es el punto medio del intervalo 62.5 a 68.5, al cual corresponde la mayor frecuencia (50 niños tuvieron un porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral entre 62.5 y 68.5%).

## Mediana

En un conjunto finito de valores, la mediana es el valor que divide la distribución en dos partes iguales, de tal forma que la mitad de las puntuaciones son mayores que la mediana y las de la otra mitad son menores que ésta, es decir, la mediana divide la distribución en dos mitades, por lo que el número de casos o puntuaciones es igual en cada mitad. Si el número de puntuaciones en un conjunto de datos es impar, la mediana será la puntuación que está en medio, cuando todas las puntuaciones se han arreglado en orden de magnitud. Es decir, cuando el conjunto de datos es un

número impar, por ejemplo: 12, 14, 25, 31 y 40, la mediana es la puntuación de la mitad, en este caso:

$$Md = 25$$

Por otro lado, si los datos son un número par, la mediana es el punto medio entre los valores centrales cuando las puntuaciones han sido ordenadas. En el siguiente conjunto de datos 49, 50, 57, 59, 60 y 61, la mediana es:

$$Md = \frac{57 + 59}{2} = 58$$

En distribuciones de frecuencia el cálculo de la mediana presenta algunas variantes de las técnicas vistas con anterioridad. Por ejemplo, suponga que las participaciones en clase de 26 alumnos de la carrera de psicología tienen una distribución de frecuencias no agrupadas como se muestra en la tabla 3-8.

**Tabla 3-8. Número de participaciones de 26 alumnos en la asignatura de métodos cuantitativos**

| Participación en clase | Frecuencia | Frecuencias acumulada | Porcentaje acumulado |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3.9 |
| 2 | 1 | 2 | 7.7 |
| 4 | 1 | 3 | 11.5 |
| 5 | 3 | 6 | 23.1 |
| 6 | 3 | 9 | 34.6 |
| 7 | 1 | 10 | 38.5 |
| 8 | 4 | 14 | 53.9 |
| 9 | 5 | 19 | 73.1 |
| 10 | 4 | 23 | 84.5 |
| 11 | 3 | 26 | 100.0 |

La fórmula de la mediana para distribuciones de frecuencia no agrupadas está dada por:

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - fa}{f_i}$$

Donde:

L = límite real inferior del valor que contiene a la mediana.

*fa* = frecuencia acumulada por debajo del número mediano.

*fi* = frecuencia del número mediano.

*n* = total de observaciones.

En el ejemplo, la mediana sería 26/2 = 13 puntuaciones; si se parte desde el extremo inferior se observa que la decimotercera puntuación se sitúa en el número 8, y como la sensibilidad de la medida es de una participación, sus límites reales inferiores y superior serán 7.5 y 8.5., respectivamente. La frecuencia acumulada por debajo del número 8 es 10 y la frecuencia del valor mediano es 4. Con todos estos datos es posible sustituir en la fórmula para obtener la mediana. Así:

$$Md = 7.5 + \frac{\frac{26}{2} - 10}{4} = 7.5 + \frac{13 - 10}{4} = 8.25$$

De este modo, la mediana de participación de ese grupo de alumnos es de 8.25; es decir, 50% de los alumnos tuvo menos de 8.25 participaciones en el curso.

Este cálculo es muy similar al que se hace para una distribución agrupada. La fórmula que se emplea para una distribución de intervalos es la siguiente:

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - fa}{fi}(C)$$

Donde:

*L* = límite real inferior del intervalo de clase que contiene a la mediana.
*fa* = frecuencia acumulada de todos los intervalos de clase por debajo de la clase mediana.
*fi* = frecuencia del intervalo de clase que contiene a la mediana.
*n* = total de observaciones.
*C* = amplitud del intervalo de la clase mediana.

Nótese que esta fórmula es similar a la de las distribuciones de frecuencia no agrupadas, cuando C = 1 .

En la tabla 3-6 se muestra la distribución de frecuencias agrupadas del porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral de 297 participantes. Para el cálculo de la mediana se divide 297/2 = 148.5, que representa la frecuencia acumulada de una calificación en la mitad de la distribución. Este porcentaje está situado en el intervalo 69 a 74 con frecuencia 49, cuyos límites reales son 68.5 a 74.5 9, y la frecuencia acumulada por abajo del intervalo mediano es 142, con una amplitud del intervalo de 6; entonces:

$$Md = 68.5 \quad \frac{148.5 - 142}{49} \quad (6) = 69.3$$

De este modo, 50% de los niños obtuvo menos de 69.3% de respuestas correctas en lenguaje oral.

# Media

La media constituye el índice de tendencia central más importante, puesto que es el más sensible y figura en la mayoría de los procedimientos estadísticos que se utilizan en las investigaciones psicológicas, especialmente cuando la

distribución presenta un sesgo. El símbolo que generalmente se emplea para representar la media de un conjunto de puntuaciones es $\bar{x}$, que se define como la suma de las puntuaciones o de los valores de una variable, dividida entre el número de casos que conforman el conjunto. Expresado de forma algebraica:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Donde:

$\bar{x}$ = la media, y se llama X barra o testada.
$n$ = número de valores en el conjunto.
$X_i$ = el elemento del conjunto.

Ahora, supóngase que los siguientes valores representan la duración de la conducta de aislamiento de un niño autista durante los seis días que fue observado en el patio de juegos: 50, 49, 59, 57, 61 y 60 minutos. Entonces la media será:

$$\bar{X} = \frac{50 + 49 + 59 + 57 + 61 + 60}{6} = \frac{336}{6} = 56$$

Este resultado indica que, en promedio, durante los seis días que se observó al niño autista en el patio de juegos, éste se pasó en promedio 56 min aislado.

Para el cálculo de la media en una distribución de frecuencias se utiliza la siguiente fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{n}$$

Donde:

$X_i$ = puntuación $i$.
$f_i$ = número de veces que aparece la puntuación $i$.

Así, al tomar como punto de referencia los datos de la tabla 3-8, en donde se muestra el número de participaciones de 26 alumnos en la asignatura de Métodos cuantitativos, por medio de la columna encabezada como frecuencia se sabe que cuatro alumnos tuvieron ocho participaciones. Como se recordará, la multiplicación es una suma repetida; por ejemplo: 8 + 8 + 8 + 8 = 8(4). En consecuencia, la suma de todas las puntuaciones en un grupo se obtiene multiplicando cada puntuación $X_i$ por su frecuencia $f_i$ para formar $X_i f_i$ y después se obtiene la suma de las puntuaciones resultantes. De acuerdo con lo anterior, la media de participaciones es:

$$\bar{X} = \frac{1 + 2 + 4 + 5(3) + 6(3) + 7 + 8(4) + 9(5) + 10(4) + 11(3)}{26} = \frac{197}{26} = 7.58$$

Este valor se interpreta de la siguiente forma: el grupo de 26 alumnos tuvo en promedio 7.58 participaciones en la clase de Métodos cuantitativos.

Cuando la media se calcula a partir de una distribución de frecuencias agrupadas se supone que las puntuaciones a lo largo de cualquier intervalo se distribuyen de manera uniforme. Sin embargo, en la realidad usualmente esto no sucede, por lo que el valor que se calcula es bastante aproximado a la media de los datos no agrupados. Con base en la suposición anterior, la suma de las puntuaciones $f_i$ en cualquier intervalo es igual al producto de $f_i$ y el punto medio del intervalo, de tal manera que el procedimiento es esencialmente el mismo que se utiliza para la distribución de frecuencias. El procedimiento de cálculo de la media a partir de distribuciones de frecuencias agrupadas se aprecia en la tabla 3-9, en la cual se presenta el porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral de los 297 niños.

Conforme a la tabla 3-9 se observa que:

$$\bar{X} = \frac{20725.5}{297} = 69.78$$

De acuerdo con este resultado, en promedio, los 297 niños obtuvieron 69.78% de respuestas correctas en lenguaje oral.

**Tabla 3-9. Cálculo de la media en distribuciones de frecuencia agrupadas**

| Límite real inferior | Límite real superior | Puntos medios ($X_i$) | Frecuencia ($f_i$) | $X_i f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 32.5 | 38.5 | 35.5 | 4 | 142 |
| 38.5 | 44.5 | 41.5 | 8 | 332 |
| 44.5 | 50.5 | 47.5 | 12 | 570 |
| 50.5 | 56.5 | 53.5 | 26 | 1 391 |
| 56.5 | 62.5 | 59.5 | 42 | 2 499 |
| 62.5 | 68.5 | 65.5 | 50 | 3 275 |
| 68.5 | 74.5 | 71.5 | 49 | 3 503.5 |
| 74.5 | 80.5 | 77.5 | 26 | 2 015 |
| 80.5 | 86.5 | 83.5 | 38 | 3 173 |
| 86.5 | 92.5 | 89.5 | 31 | 2 774.5 |
| 92.5 | 98.5 | 95.5 | 11 | 1 050.5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Total** | | 297 | 20 725.5 |

# Cuartiles y percentiles

Al estudiar la mediana se mencionó que ésta es el valor medio que divide al conjunto de datos en dos partes iguales; así, de manera análoga, se establece que aquellos valores que dividen en 4, 5, 10 y 100 partes iguales serán los cuartiles, quintiles, deciles y percentiles, respectivamente. De estos cuatro índices estadísticos, los cuartiles y los percentiles son los que se utilizan con más frecuencia en el ámbito educativo; sin embargo, aquí sólo se explicarán los cuartiles y algunos percentiles, ya que el cálculo de todos los demás índices sigue la misma lógica.

Un **cuartil** es un punto en una escala numérica que divide una serie de observaciones en cuatro porciones, por lo que al dividir el total de observaciones en cuatro partes se obtendrán tres cuartiles: $Q_1$, $Q_2$ y $Q_3$. $Q_1$ es el punto en donde 25% de las observaciones se encuentra por debajo de éste. En ámbitos educativos, a las puntuaciones por debajo del $Q_1$ se las conoce como valores deficientes. La mitad de las observaciones están por debajo de $Q_2$ de ahí que $Q_2 = Md$, y el 75% restante está por debajo de $Q_3$. Las puntuaciones comprendidas entre $Q_1$ y $Q_3$ se consideran valores normales, y excedentes a las puntuaciones que están más allá de $Q_3$. Lo anterior se ilustra en la figura 3-5.

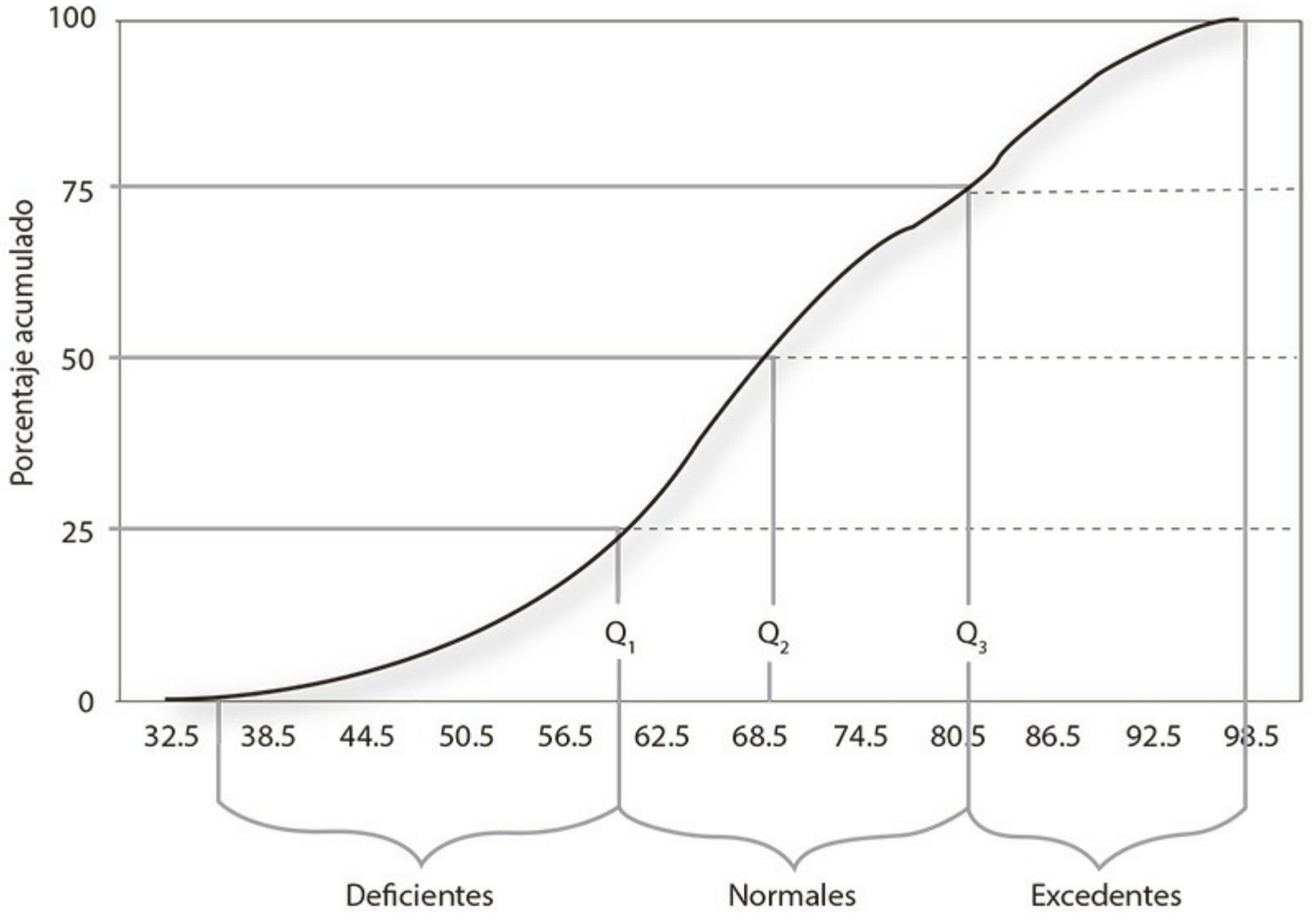



**Figura 3-5.** Formas de interpretar los diferentes cuartiles.

La fórmula que se aplica para obtener cualquier partición de una distribución de frecuencias agrupadas es:

$$Z_k = L + \frac{\frac{k \bullet n}{i} - fa}{fi}(C)$$

Donde:

$Z_k$ = partición particular que se quiere obtener, ya sea cuartiles, quintiles, deciles o percentiles.

$L$ = límite real inferior de la clase que contiene a la partición que se desea.

$C$ = amplitud del intervalo de clase.

$i$ = toma diferentes valores, dependiendo de la partición deseada; si se va a obtener un cuartil, $i = 4$; para un quintil, $i = 5$; para un decil, $i = 10$ y para un percentil, $i = 100$.

$fa$ = frecuencia acumulada por debajo de la partición deseada.

$f_i$ = frecuencia del intervalo de clase que contiene la partición deseada.

$k$ = valor de la partición que se desea obtener.
$n$ = número total de observaciones.

Para distribuciones de frecuencias no agrupadas, la fórmula es la misma, pero sin la constante $C$; es decir:

$$Z_k = L + \frac{\frac{k \bullet n}{i} - fa}{fi} (C)$$

Para ejemplificar la partición, se calcularán $Q_1$, $Q_2$ y $Q_3$ para la distribución de frecuencias agrupadas de la tabla 3-6, que muestra el porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral que obtuvieron 297 niños. Como los cuartiles dividen el conjunto de datos en cuatro partes, $i = 4$; además, como primero se calculará el $Q_1$, entonces $k = 1$. Una vez determinado cuánto vale $i$ y $k$, es relativamente fácil calcular el $Q_1$; por lo tanto:

$$Q_1 = 56.5 + \frac{\frac{1(297)}{4} - 50}{42} (6) = 56.5 + \frac{74.5 - 50}{42} (6) = 60.0$$

$$Q_1 = 60.0$$

En el cálculo de $Q_2$, $k = 2$ e $i$ siguen siendo 4:

$$Q_2 = 68.5 + \frac{\frac{2(297)}{4} - 142}{49} (6) = 68.5 + \frac{148.5 - 142}{49} (6) = 69.3$$

$$Q_2 = 69.3$$

Obsérvese que el valor de $Q_2$ y de la *Md* son idénticos, puesto que ambos dividen el conjunto de datos en dos partes iguales. Así, el $Q_3$ es:

$$Q_3 = 80.5 + \frac{\frac{3(297)}{4} - 217}{38} (6) = 80.5 + \frac{222.75 - 217}{38} (6) = 81.4$$

$$Q_3 = 81.4$$

En conclusión, de acuerdo con la interpretación de los cuartiles, en este caso se consideran niños con “dificultades” en lenguaje oral a todos aquellos que hayan tenido menos de 60.0% de respuestas correctas. Los porcentajes

"normales" son los mayores de 60.0 y menores de 81.4, y se consideran excedentes todos aquellos mayores de 81.4. Otra denominación de las puntuaciones obtenidas entre $Q_1$ y $Q_2$ es normodeficientes, que corresponden al rango entre $Q_1$ y $Md$, mientras que normoexcedentes son las puntuaciones $Md$ y $Q_3$.

Como ya se mencionó, es posible separar esta misma distribución de frecuencias agrupadas en otro tipo de divisiones, tales como los deciles, quintiles y percentiles. Con fines de explicación se calculará el percentil 45. Los percentiles dividen el conjunto de datos en 100 partes, por lo que $i = 100$, y como se calculará el percentil 45, entonces $k = 45$.

$$Q_3 = 62.5 + \frac{\frac{45(297)}{100} - 92}{50}(6) = 62.5 + \frac{133.65 - 92}{50}(6) = 67.5$$

# MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medias de tendencia central proporcionan información limitada acerca del conjunto de datos, puesto que pasan por alto la variabilidad entre las puntuaciones. Resulta evidente que para tener información más completa es necesario disponer de medidas relacionadas con la forma en que los individuos difieren en esa medición; es decir, se requiere encontrar información auxiliar que acompañe a la media o a la mediana. Esta información adicional debe, de cierta forma, indicar el grado de dispersión de las calificaciones alrededor de la medida de tendencia central.

El concepto de dispersión se refiere a la variabilidad entre un conjunto de observaciones. Si las puntuaciones en un conjunto son distintas y estas diferencias son considerables, la magnitud de la dispersión también será grande; por el contrario, cuando las diferencias son muy pequeñas, la dispersión es mínima. Por último, si todas las puntuaciones son las mismas no existe dispersión.

Así como hay índices que describen la forma en que las puntuaciones tienden a agruparse respecto a un valor central, existen otros que miden la dispersión, heterogeneidad o esparcimiento de los mismos. Los más comunes son: el rango, el rango semiintercuartilar, la desviación media, la varianza y la desviación estándar.

## Rango

El rango mide la distancia total a lo largo de la cual varían las puntuaciones, de tal forma que la diferencia entre dos puntuaciones, cualquiera que ésta sea, nunca será mayor que el valor del rango. Hay dos tipos de rangos: excluyente e incluyente.

El rango excluyente es la diferencia entre la puntuación mayor y la puntuación menor. Mientras que el rango incluyente se refiere a la diferencia entre el límite real superior del intervalo que abarca la mayor puntuación y el límite real inferior del intervalo que abarca la puntuación más pequeña.

En los métodos cuantitativos, independientemente del tipo, la utilidad del rango es muy limitada debido a que es una medida que sólo toma en cuenta dos valores del conjunto de datos; además, su inestabilidad dificulta aún más su uso.

## Rango intercuartilar

Cuando se calculan los cuartiles y advierte que las puntuaciones comprendidas entre los intervalos $Q_1$ y $Q_3$ se conocían como puntuaciones normales, lo que realmente se está obteniendo es el rango intercuartilar, que es la distancia entre el primero y el tercer cuartil ($Q_3$ - $Q_1$), y precisamente a la mitad de dicha distancia se le denomina rango semiintercuartilar. Se tiene entonces que:

$$Q_{semi} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Donde:

$Q_{semi}$ = rango semiintercuartilar.
$Q_3$ = tercer cuartil.
$Q_1$ = primer cuartil.

Por ejemplo, con los datos de la tabla 3-7 se encontró que $Q_1$ = 60 y $Q_3$ = 814; el rango semiintercuartilar es entonces:

$$Q_{semi} = \frac{81.4 - 60}{2} = 10.7$$

El cálculo de $Q_{semi}$ es muy útil cuando se desea comparar dos conjuntos de datos. Si ambos conjuntos tienen un mismo valor de $Q_{semi}$ es muy probable que los patrones de heterogeneidad de los mismos se asemejen entre sí.

## Desviación media absoluta

La desviación media es un estadístico que evalúa la desviación de las puntuaciones individuales respecto a la media, con la finalidad de obtener una estimación de la variación promedio de las puntuaciones. La desviación media se obtiene al sumar todas las desviaciones y dividir el resultado entre $n - 1$.

En el ejemplo de la duración de la conducta de aislamiento, que se presentó en el apartado de la media, la desviación media es:

$$DM = \frac{(50 - 56) + (49 - 56) + (59 - 56) + (57 - 56) + (61 - 56) + (60 - 56)}{6 - 1}$$

$$DM = \frac{(-6) + (-7) + 3 + 1 + 5 + 4}{5} = 0$$

Como se advierte, en algunos casos las diferencias son negativas (dos primeras), mientras que en otros resultan positivas (cuatro últimas), de manera que la suma de dichas desviaciones es cero. Por consiguiente, si se respetan los

signos, la desviación media resulta un promedio de desviación siempre igual a cero.

Ahora, si se suman todas las desviaciones sin considerar el signo, el estadístico resultante estaría basado en las desviaciones absolutas, y por lo tanto se eliminaría la dificultad de tener el numerador igual a cero. El valor absoluto de una desviación positiva es el valor mismo; mientras que el valor absoluto de un número negativo se obtiene cambiándole el signo de negativo a positivo. El símbolo que se utiliza para representar un valor absoluto consiste en dos líneas verticales (| |). Por consiguiente, en el ejemplo en estudio:

$$DM = \frac{|50 - 56| + |49 - 56| + |59 - 56| + |57 - 56| + |61 - 56| + |60 - 56|}{5} = \frac{26}{5} = 5.2$$

Esto significa que, en promedio, la variación entre las puntuaciones y la media es de 4.33.

En conclusión, la desviación media de un conjunto de datos se expresa simbólicamente como:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{n-1}$$

Para datos agrupados en distribuciones de frecuencias, la fórmula es:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}| \, f_i}{n-1}$$

La desviación media es un índice estadístico muy fácil de calcular; sin embargo, su uso como medida de variabilidad es poco común debido a que su teoría no está tan estructurada como la de varianza; además, el hecho de usar valores absolutos propicia la aparición de dificultades muy grandes para derivar algunas fórmulas.

# Varianza

La varianza es el índice cuantitativo altamente sensible a todas las puntuaciones de un conjunto de datos. La varianza considera las desviaciones de las puntuaciones respecto a la media, pero cada una de ellas elevada al cuadrado, con la finalidad de evitar el obstáculo de que su suma sea igual a cero. Por lo tanto, para un conjunto de datos, una medida del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2,$$

será alta cuando haya gran heterogeneidad en las puntuaciones y baja si existe homogeneidad. No obstante, la magnitud de la suma del cuadrado de las desviaciones (también llamada suma de cuadrados) está en función del total

de datos en el conjunto. De tal modo que si se desea comparar dos grupos de datos y estos difieren en cuanto al número de puntuaciones, la suma de cuadrados no permite estimar de manera adecuada la dispersión de las puntuaciones, aunque esto se puede evitar dividiendo la suma de cuadrados por el total de datos. De aquí que, al igual que la desviación media, la varianza es un promedio, sólo que a diferencia de aquélla, la varianza es un promedio cuadrático de dispersión. Se representa de manera simbólica así:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Antes de continuar con el estudio del tema es importante aclarar que esta definición de varianza es cierta, si y sólo si el único interés del investigador es describir la varianza de una población; cuando su propósito es estimar la varianza de la población a partir de la varianza de la muestra, la suma de cuadrados debe dividirse por $n - 1$. En este capítulo se parte de que todos los datos utilizados para ejemplificar los cálculos de los diferentes índices estadísticos fueron recolectados a partir de muestras; por consiguiente, el denominador que se utilizará será $n = 1$ (como ya se había hecho para calcular la desviación media). Existen dos métodos para el cálculo de la varianza: de puntuaciones originales y de desviaciones. En el cálculo de la varianza a partir de las puntuaciones originales se utiliza la fórmula:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

En la tabla 3-10 se presentan todos los cálculos para determinar la varianza, tanto con el método de desviaciones como por medio del método de puntuaciones originales.

**Tabla 3-10. Cálculo para datos no agrupados**

| **Puntuación** $X_i$ | $(X_i - 56)$ | $(X_i - 56)^2$ | $X_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 50 | -6 | 36 | 2 500 |
| 49 | -7 | 49 | 2 401 |
| 59 | 3 | 9 | 3 481 |
| 57 | 1 | 1 | 3 249 |
| 61 | 5 | 25 | 3 721 |
| 60 | 4 | 16 | 3 600 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 336 | | 136 | 18 952 |

Método de desviaciones:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{136}{5} = 27.2$$

Método de puntuaciones originales:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{18952 - \frac{(336)^2}{6}}{50} = 27.2$$

El cálculo de la varianza para datos agrupados se obtiene de la siguiente fórmula:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \ f_i}{n-1}$$

En donde $X_i$ es la puntuación original cuando los datos no se han agrupado; en caso de que lo estén, $X_i$ representa el punto medio del intervalo de clase.

Para el cálculo de la varianza para datos agrupados conforme a las puntuaciones originales, la fórmula es:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ f_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

En las tablas 3-10 y 3-11 se exponen los procedimientos para determinar la varianza en datos no agrupados y agrupados por medio de ambos métodos.

Al sustituir en la fórmula de desviaciones se obtiene:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 f_i}{n-1} = \frac{184.3464}{25} = 7.37$$

Para la fórmula de datos originales:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i f_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{1677 - \frac{(197)^2}{26}}{25} = 7.37$$

El cálculo de la varianza para los datos agrupados de la tabla 3-11,

**Tabla 3-11. Cálculo de la varianza para datos agrupados**

| Participación en clase $X_i$ | Frecuencia $f_i$ | $(X_i - \bar{X})$ | $(X_i - \bar{X})^2$ | $f_i (X_i - \bar{X})^2$ | $f_i X_i$ | $f_i X_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -6.58 | 43.26 | 43.26 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | -5.58 | 31.10 | 31.10 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | -3.58 | 12.79 | 12.79 | 4 | 16 |
| 5 | 3 | -2.58 | 6.64 | 19.92 | 15 | 75 |
| 6 | 3 | -1.58 | 2.49 | 7.46 | 18 | 108 |
| 7 | 1 | -0.58 | 0.33 | 0.33 | 7 | 49 |
| 8 | 4 | 0.42 | 0.18 | 0.72 | 32 | 256 |
| 9 | 5 | 1.42 | 2.03 | 10.13 | 45 | 405 |
| 10 | 4 | 2.42 | 5.87 | 23.48 | 40 | 400 |
| 11 | 3 | 3.42 | 11.72 | 35.15 | 33 | 363 |
| **Totales** | 26 | | | 184.35 | 197 | 1 677 |

por medio de las desviaciones es:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 f_i}{n-1} = \frac{57480.242}{296} = 194.19$$

Y por medio del método de datos originales:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i f_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{1503764.25 - \frac{(20725.5)^2}{297}}{296} = 194.19$$

## Desviación típica o estándar

La desviación típica es la medida que se relaciona de manera estrecha con la varianza. Cuando se desea expresar la dispersión en términos de las unidades originales en las que se encuentran los datos, la varianza no es la medida adecuada, puesto que está expresada en unidades cuadráticas. Por lo tanto, es necesario obtener la raíz cuadrada positiva de la varianza para tener una estimación de la variabilidad de los datos en sus unidades originales. El resultado se conoce como desviación típica y se denota por medio de la *s*. Esto es:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Así, la desviación típica para la conducta de aislamiento es:

$$S = \sqrt{\frac{136}{5}} = \sqrt{27.2} = 5.22$$

Mientras que para la participación (tabla 3-11) es:

$$S = \sqrt{\frac{184.3462}{25}} = \sqrt{7.37} = 2.71$$

Y para el porcentaje de respuestas correctas de los 297 niños en lenguaje oral (tabla 3-11) es:

$$S = \sqrt{\frac{57480.2424}{296}} = \sqrt{194.19} = 13.94$$

# MANERAS DE EVALUAR LA FORMA DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS DATOS

Los índices estadísticos descriptivos se agrupan en tres grandes rubros. El primer rubro, comprende todos aquellos índices que evalúan la manera en que los valores de una variable se agrupan alrededor de un valor central; dentro de estos se encuentran la media, la mediana, la moda y la suma de los valores. Otro rubro de clasificación de los índices estadísticos comprende a los que evalúan la magnitud en que los valores de una variable se dispersan, es decir: el error estándar de la media, la desviación estándar, la varianza, el rango y el valor mínimo y máximo de los valores de la variable. El tercero y el último tipo de índices estadísticos agrupa a los que miden la forma que adquirió la distribución de frecuencias; estos son: la asimetría y la curtosis de la distribución. Los dos primeros rubros se presentaron en las secciones anteriores de este capítulo. Ahora es momento de abordar los estadísticos que evalúan la forma que adopta la distribución de un conjunto de datos en una investigación, pero antes es necesario revisar el concepto de curva normal.

## Curva normal

El concepto de curva normal fue desarrollado por Gauss y Laplace, aunque tiempo atrás, en 1733, DeMoivre fue el primero en obtener la ecuación de dicha curva, y por tal motivo hoy se conoce como curva de Gauss o curva de DeMoivre, o bien, curva de campana.

Esta curva tiene la característica de que su altura máxima está en la media, es decir, la ordenada máxima se encuentra en la media (recordar que en un eje cartesiano la ordenada corresponde al eje vertical, que por lo general se representa con la letra *y*); por consiguiente, las demás ordenadas son más pequeñas. Otra característica es que la curva normal es asintótica. Esto quiere decir que los extremos o colas de la curva se prologan de manera indefinida en uno y otro sentido, puesto que teóricamente nunca toca o cruza la línea de base o eje de las abscisas (eje representado frecuentemente como *x*). No obstante que, en teoría, la curva normal es infinita, se considera que en general a tres desviaciones estándar a uno y otro lado de la curva, incluirá prácticamente todos los casos.

Por sus características, la curva normal es la de mayor relevancia en los métodos cuantitativos, puesto que sirve para comprobar la mayoría de los fenómenos en las ciencias conductuales y educativas. A continuación se presentan sus características principales:

- El área bajo la curva normal es igual a 1.
- Es simétrica respecto a la media, es decir, el número de casos es igual a la derecha que a la izquierda de la media.
- La media, la mediana y la moda son iguales, ya que tanto la máxima frecuencia como la mitad de la distribución coinciden con la media.
- Si se levantan pendientes a la derecha e izquierda de la distribución a una, dos y tres desviaciones estándar, las área comprendidas bajo la curva normal serán de 68.26, 95.46 y 99.73%, respectivamente, como se muestra en la figura 3-6.

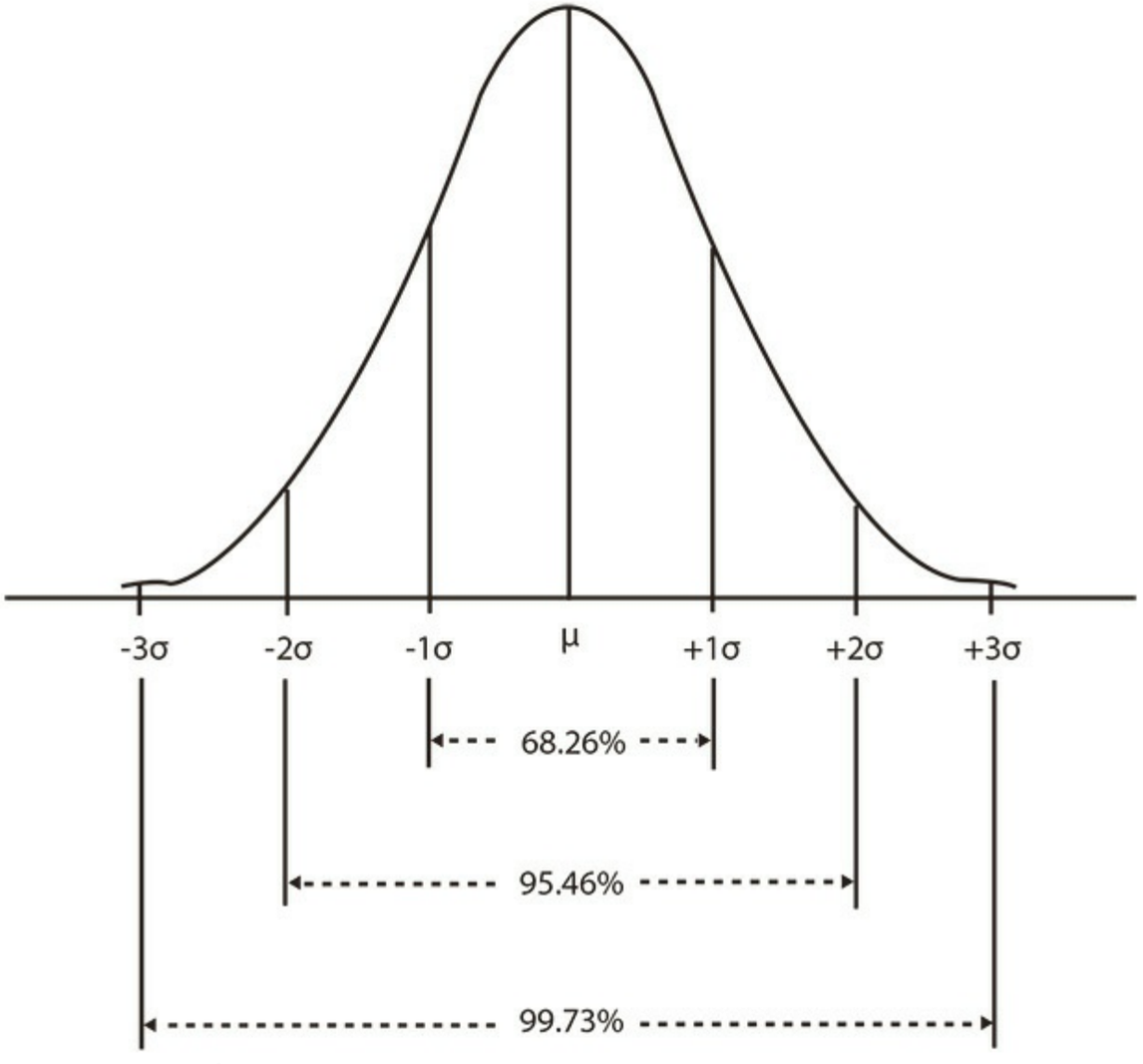



**Figura 3-6.** Áreas bajo la curva normal a una, dos y tres desviaciones estándar.

- Hay una familia de distribuciones o curvas normales que varían en función de la media y la desviación estándar. En otras palabras, existe una distribución normal diferente para cada valor empírico de la media y la desviación estándar. Distribuciones con valores diferentes en la media, pero con igual desviación estándar, trasladan a la gráfica de la distribución a lo largo del eje *x*. Mientras que las distribuciones con valores diferentes de desviación estándar determinan el grado de dispersión de la distribución que se refleja en cambios en la asimetría y la curtosis. Estos temas se abordarán en los siguientes dos apartados.

# Asimetría

En la práctica, casi nunca se encuentran distribuciones de frecuencias completamente simétricas, por lo que el grado en el cual la distribución es asimétrica constituye su sesgo. Dado que obtener un valor de cero para la asimetría

resulta imposible, se consideran simétricas las distribuciones con un índice $g_1$ en el rango de ±0.5.

La asimetría comprende dos parámetros, uno que indica el lugar en donde se encuentran agrupados la mayoría de los casos y el otro que mide la magnitud de dicha asimetría. Así, un signo negativo en la asimetría indica que la mayor parte de los valores se ubica en el extremo superior del campo de variabilidad, en tanto que un signo positivo señala que una gran proporción de casos está colocada en el extremo inferior de la distribución (asimetría positiva), tal y como se muestra en la figura 3-7. Cuando las frecuencias tienden a agruparse en la parte derecha de la gráfica, con una rama que se extiende hacia la izquierda, como la primera distribución de la figura 3-7, recibe el nombre de curva con asimetría negativa.

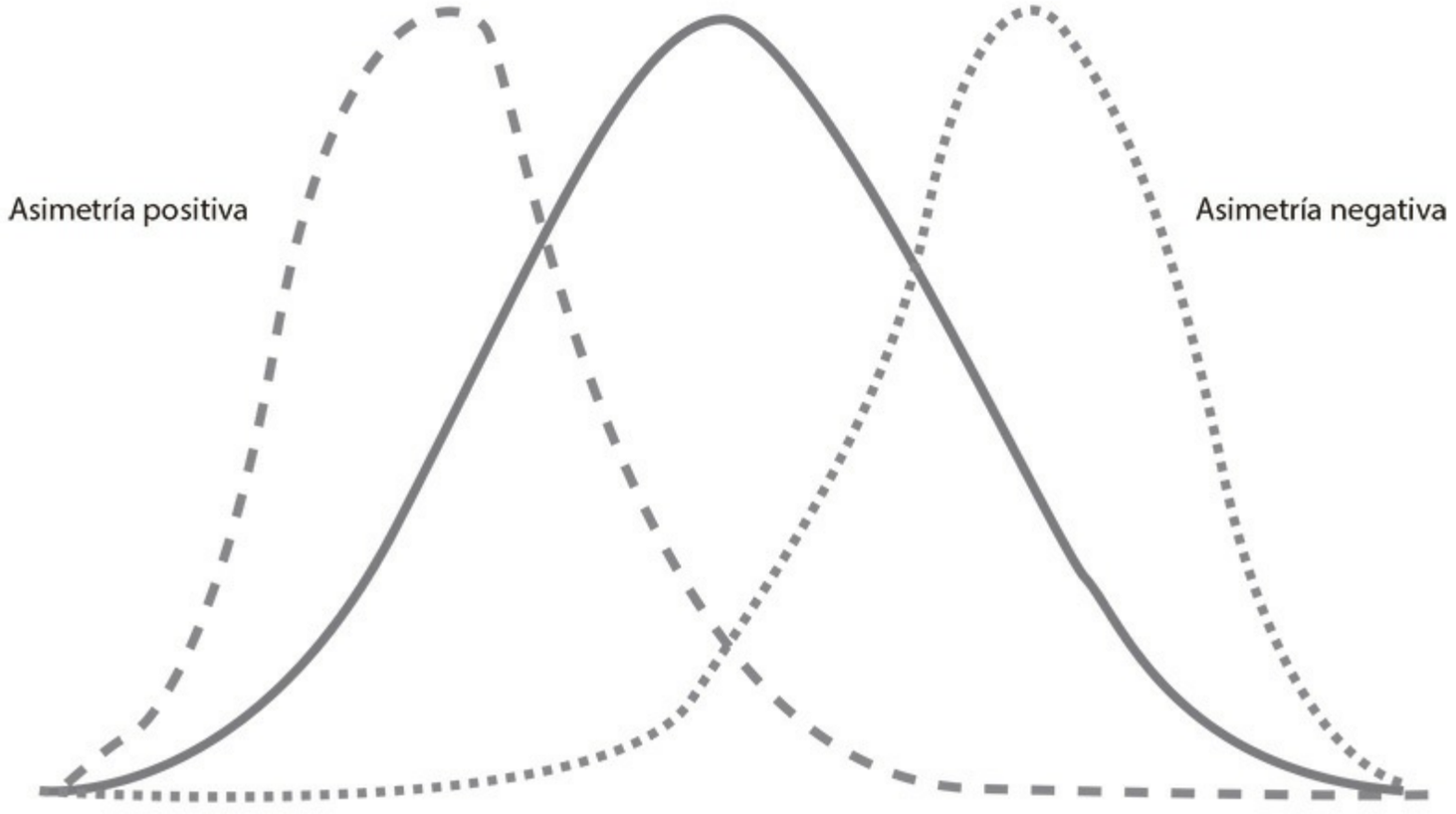



**Figura 3-7.** Patrones característicos de asimetría o sesgo.

En caso contrario, cuando los datos se agrupan en la parte izquierda de la distribución y la rama se extiende hacia la derecha, se dice que la simetría de la curva es positiva. De acuerdo con Downie y Heath (1973), este criterio se adoptó debido a la costumbre que existe en los matemáticos de llamar positivo al sentido hacia la derecha de una recta y negativo a la dirección contraria.

El valor de la asimetría que corresponde a la magnitud del sesgo es el cociente de la media de los cubos de las desviaciones con respecto a la media y al cubo de la desviación típica. Entonces, de forma simbólica, la media del sesgo o asimetría para una muestra se convierte en:

$$\frac{(X_i-\bar{X})^3}{s_x^3} = \left(\frac{(X_i-\bar{X})}{s_x}\right)^3 = Z_x^3$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Z^3}{n-1} = \bar{Z}^3$$

A partir de este último desarrollo es evidente que la distribución es simétrica, lo cual significa que adquiere una forma normal, al momento en que la asimetría es cero, puesto que no hay sesgo alguno. Lo anterior implica que todas las puntuaciones tipificadas *Z* negativas tienen su correspondiente puntuación tipificada *Z* positiva, de tal forma que la suma de los cubos de las desviaciones positivas es igual a la suma de los cubos de las desviaciones negativas, y con ello, la suma algebraica de los cubos de las desviaciones es cero. Si la distribución es asimétrica positiva, la suma de los cubos de las desviaciones positivas es mayor que la suma de los cubos de las desviaciones negativas, con lo cual, la asimetría es positiva. De manera análoga, en caso de que suceda lo contrario, la asimetría es negativa. Es así que entre mayor es el valor de la asimetría, mayor será ésta.

El algoritmo que usan los softwares estadísticos más populares, como SPSS y Excel , al igual que este capítulo, parten de la recolección de información en una muestra de datos; por lo tanto, la fórmula que utilizan para calcular la asimetría en datos no agrupados es:

$$g_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{s}\right)^3$$

Así, al tomar como referencia los datos de la duración de la conducta de aislamiento presentados en la tabla 3-10 se desarrollan las operaciones necesarias para hacer el cálculo de la asimetría, lo que da como resultado:

$$g_1 = \frac{6}{(6-1)(6-2)} \left[\left(\frac{50-56}{5.22}\right)^3 + \left(\frac{49-56}{5.22}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{60-56}{5.22}\right)^3\right] = -0.7233$$

El cálculo de la asimetría para distribuciones de frecuencia tiene una ligera modificación, puesto que a la fórmula se le incluye la frecuencia en la que aparecen las proporciones de diferencias cúbicas. En este caso, la asimetría se calcula por medio de:

$$g_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{s}\right)^3 f_i$$

Para los datos de la tabla 3-12, el valor de la asimetría de la distribución del porcentaje de respuestas correctas de 297 niños preescolares es:

$$g_1 = \frac{297}{(296)\,(295)} \left[ \left( \frac{35.5 - 69.78}{13.94} \right)^3 * 4 + \left( \frac{41.5 - 69.78}{13.94} \right)^3 * 8 + \cdots + \left( \frac{95.5 - 69.78}{13.94} \right)^3 * 11 \right]$$

$$g_1 = -0.1372$$

**Tabla 3-12. Cálculo de la varianza en distribuciones de frecuencia agrupadas**

| Intervalo de clase $X_i$ | Punto medio | Frecuencia $f_i$ | $(X_i - \bar{X})$ | $(X_i - \bar{X})^2$ | $f_i (X_i - \bar{X})^2$ | $f_i X_i$ | $f_i X_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 a 38 | 35.5 | 4 | -34.28 | 1175.31 | 4 701.25 | 142.0 | 5 041.00 |
| 39 a 44 | 41.5 | 8 | -28.28 | 799.91 | 6 399.35 | 332.0 | 13 778.00 |
| 45 a 50 | 47.5 | 12 | -22.28 | 496.52 | 5 958.29 | 570.0 | 27 075.00 |
| 51 a 56 | 53.5 | 26 | -16.28 | 265.13 | 6 893.39 | 1391.0 | 74 418.50 |
| 57 a 62 | 59.5 | 42 | -10.28 | 105.74 | 4 440.94 | 2 499.0 | 148 690.50 |
| 63 a 68 | 65.5 | 50 | -4.28 | 18.34 | 917.13 | 3 275.0 | 214 512.50 |
| 69 a 74 | 71.5 | 49 | 1.72 | 2.95 | 144.49 | 3 503.5 | 250 500.25 |
| 75 a 80 | 77.5 | 26 | 7.72 | 59.55 | 1 548.42 | 2015 | 156 162.50 |
| 81 a 86 | 83.5 | 38 | 13.72 | 188.16 | 7 150.11 | 3173 | 264 945.50 |
| 87 a 92 | 89.5 | 31 | 19.72 | 388.77 | 12 051.77 | 2 774.5 | 248 317.75 |
| 93 a 98 | 95.5 | 11 | 25.7172 | 661.37 | 7 275.10 | 1 050.5 | 1003 22.75 |
| **Totales** | | 297 | | | 57 480.24 | 20 725.5 | 1 503 764.25 |

# Curtosis

Otra forma de variación de la distribución es el grado de aplanamiento que presenta la distribución de frecuencias con respecto a la curva normal. A esta variación en la forma se le llama **curtosis.** Ésta es la cuarta propiedad de un conjunto de datos, como se recordará, la primera es la **centralidad,** la segunda la **variabilidad,** la tercera la **simetría;** y esta última propiedad, la curtosis, permite conocer qué tan escarpado o plano es un polígono de frecuencias. Cuando la distribución es muy escarpada se le llama **leptocúrtica** y cuando es relativamente plana se le denomina

**platicúrtica.** El concepto de curtosis de una curva sólo se aplica a distribuciones unimodales y se refiere al empinamiento de la curva en la proximidad de una única moda. En caso de que la distribución tenga dos o más modas, se puede hablar de curtosis únicamente en la proximidad de cada moda.

La forma que toman las distintas distribuciones se muestran en la figura 3-8,

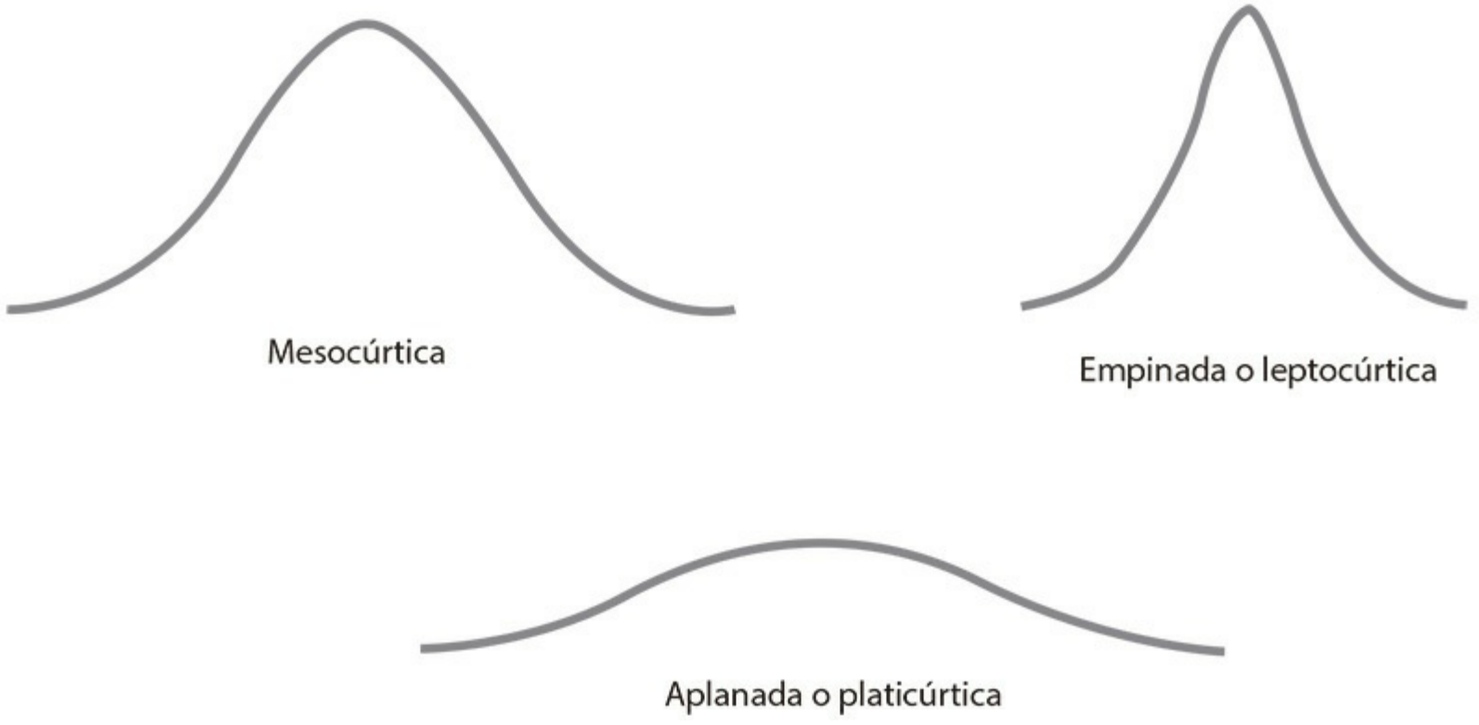



**Figura 3-8.** Patrones característicos de curtosis.

en la cual se ve claramente que cada una de estas distribuciones proporciona información muy importante ya que, por ejemplo, obtener una distribución de datos en forma mesocúrtica informaría de una dispersión de los datos en forma normal, mientras que una leptocúrtica indicaría que en los datos hubo muy poca variación y que la mayoría de estos se concentraron alrededor del valor promedio. Por el contrario, encontrar una distribución platicúrtica sería un indicador de la gran variabilidad y dispersión de los datos a lo largo de todo el intervalo de existencia de la variable evaluada.

La curtosis es el cociente de la media de las cuartas potencias de las desviaciones respecto a la media y la desviación estándar, pero disminuido en tres unidades (Downie y Heath, 1973; Glass y Stanley, 1974; Gravetter y Wallnau, 2012). Representado de manera simbólica, lo anterior quedaría expresado por el algoritmo:

$$Curtosis = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{s}\right)^4}{n-1} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z^4}{n-1} - 3 = \bar{z}^4$$

Los software más populares, como SPSS y Excel, están programados para utilizar el siguiente algoritmo en el cálculo

de la curtosis.

$$g_2 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \bar{X}}{s} \right)^4 - \frac{3(n+1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Retomando los datos de la duración de la conducta de aislamiento presentada en la tabla 3-10, la curtosis para ese conjunto de datos es:

$$g_2 = \frac{6(7)}{(5)(4)(3)} \left[ \left( \frac{50-56}{5.22} \right)^4 + \left( \frac{49-56}{5.22} \right)^4 + \cdots + \left( \frac{60-56}{5.22} \right)^4 \right] - \frac{3(5)^2}{(4)(3)} = -1.8409$$

Por último, para distribuciones de frecuencia, el algoritmo tiene un pequeño agregado, ya que las frecuencias se incorporan como un factor multiplicativo de la siguiente manera:

$$g_2 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \bar{X}}{s} \right)^4 f_i - \frac{3(n+1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Para los datos de la tabla 3-12, el valor de la curtosis para el porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral de 297 niños preescolares es:

$$g_1 = \frac{297(298)}{(296)(295)(294)} \left[ \left( \frac{35.5-69.78}{13.94} \right)^4 * 4 + \cdots + \left( \frac{95.5-69.78}{13.94} \right)^4 * 11 \right] - \frac{3(296)^2}{(295)(294)} =$$

$$g_2 = -0.5758$$

En la tabla 3-13 se muestra la relación que guarda la forma de la distribución con la magnitud de la curtosis. En este sentido, cuando la forma de la distribución es mesocúrtica, el valor de la curtosis es cero. Si el valor es positivo, la curva es leptocúrtica; y en caso de que sea negativo, la curva de la distribución de datos adquiere una forma platicúrtica.

Los valores de la asimetría y la curtosis son importantes para determinar si una distribución de datos adopta una forma de curva normal, y para que esta condición se dé, es necesario que ambos índices estadísticos caigan en el intervalos de ± 0.5. En caso contrario, si $g_2$ es mayor que 0.5, entonces se dice que es una distribución leptocúrtica; por el contrario, si es menor que -0.5, entonces se considera platicúrtica.

Esta regla de decisión es muy importante en estadística inferencial, ya que la mayoría de estos procedimientos requiere que los datos se distribuyan normalmente. Ahondar en este supuesto que se hace en los procedimientos de

estadística inferencial no es materia de este capítulo; sin embargo, esto se estudiará en los capítulos de este libro donde se aborda el tema de contraste de hipótesis.

En conclusión, con respecto a la asimetría y la curtosis, es posible afirmar que, en términos de los momentos que representa el cálculo de cada uno de los índices de variabilidad de un conjunto de datos, la varianza representa el segundo momento, puesto que su cálculo se basa en los mínimos cuadrados, es decir, en el cuadrado de las diferencias de las puntuaciones con:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

La asimetría representa, el tercer momento, ya que su cálculo se sustenta en las diferencias de las puntuaciones individuales con respecto a la media, elevadas a la tercera potencia, es decir, al cubo, con lo que adopta la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^3$$

Por último, la curtosis representa el cuarto momento de la media, puesto que se mide promediando la cuarta potencia de las diferencias:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^4$$

Volviendo al análisis de los datos de la evaluación del lenguaje oral en 297 niños, el cálculo de la distribución de frecuencias agrupadas, así como de la media, la mediana, la moda, la desviación estándar, la varianza, la asimetría, la curtosis, el rango y el valor mínimo y máximo del porcentaje de respuestas correctas, se presentan en la tabla 3-14.

**Tabla 3-13. Relación de la forma de la distribución en función de la curtosis**

| Naturaleza de la distribución | Descripción de la forma | Valores del índice de la curtosis |
|---|---|---|
| Curva normal | Mesocúrtica | Cero o en el intervalo de ±0.5 |
| Curva empinada | Leptocúrtica | Mayor de 0.5 (esto es positivo) |
| Curva plana | Platicúrtica | Menor de -0.5 (esto es negativo) |

A partir de la tabla 3-14 es posible mencionar, con respecto al estudio, que en promedio los niños evaluados obtuvieron un porcentaje promedio de 69.78 respuestas correctas en lenguaje oral, con una desviación estándar de 13.94. Con relación al sesgo de la distribución se encontró que, si bien una mayor cantidad de casos se agrupó en los valores superiores de la distribución (signo negativo), se encontró una asimetría de -0.1372. Lo mismo sucedió con la

curtosis = -0.5758, que por tener un valor negativo, podría decirse que la curva de los datos adquirió una forma ligeramente platicúrtica. El porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral más pequeño obtenido por la muestra de 297 niños fue de 33% y la calificación máxima fue de 97%, con un rango de 65 (97 - 33 = 65).

Con relación a la forma en que se distribuyeron los datos es posible agregar que el valor de la curtosis fue ligeramente mayor a -0.5 ($g_2$ = -0.5758). El porcentaje de respuestas correctas en lenguaje oral de los 297 niños preescolares no adquirió una forma normal, puesto que la curva mostró un ligero aplanamiento en los valores bajos de la escala de evaluación y esto originó un sesgo negativo (tabla 3-14).

**Tabla 3-14. Relación del cálculo de los diferentes índices estadísticos descriptivos**

| Media | Mediana | Moda | Varianza | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|
| 69.78 | 69.3 | 65.5 | 194.19 | 13.94 |
| **Asimetría** | **Curtosis** | **Rango** | **Valor mínimo** | **Valor máximo** |
| –0.1372 | –0.5758 | 65 | 33 | 97 |

# Puntuaciones tipificadas o estandarizadas

La estandarización de puntuaciones es un procedimiento mediante el cual se puede transformar cualquier valor de la distribución a desviaciones estándar. La estandarización de distribuciones que no corresponden con la curva normal, se puede hacer aunque su interprestación, puede no ser del todo confiable (Pedhazur, 1982). El procedimiento consiste básicamente en hacer un cambio de variable, es decir, transformarla en la variable aleatoria $Z$, con lo cual la media de la distribución normal empírica se iguala a cero y la desviación estándar a uno. Además de esto, la transformación permite encontrar la ubicación de un caso con respecto al grupo al que pertenece, y esto se logra al calcular la diferencia que existe entre el valor particular observado $X_i$ y la media de la distribución y dividir esta diferencia por la desviación estándar del grupo. Esto es:

$$Z = \frac{X_i - \overline{X}}{s}$$

Donde:

$Z$ = puntuación estandarizada del perfil del *i* ésimo dominio.
$X_i$ = calificación *i* ésimo sujeto.
$\overline{X}$ = media poblacional esperada del *i* ésimo dominio.
$s$ = desviación estándar del grupo de referencia.

En el campo de la psicología, las puntuaciones estandarizadas se usan con frecuencia para elaborar perfiles de ejecución de los individuos, debido a que son unidades iguales de medición y su tamaño es el mismo de distribución en distribución. Con el uso de las puntuaciones estandarizadas los perfiles se construyen tomando en consideración

varios factores como el tipo de personalidad, carácter, nivel intelectual y grado de ejecución. El perfil psicológico de un individuo se convierte entonces en un conjunto de rasgos o características psicológicas que se materializan en un mapa de las personas, muy parecido a lo que hace un escáner cuando explora un objeto.

Sin embargo, en el campo de la educación el uso de estos perfiles es poco frecuente o casi nulo a pesar de la gran utilidad que tienen, no para identificar los rasgos y las características psicológicas de los alumnos, sino para conocer el perfil de la calidad de los servicios educativos, o bien, para tener conocimiento del desempeño de los docentes. Los perfiles son útiles puesto que dependiendo del enfoque que se utilice y de los instrumentos usados para obtener la información, los mapas construyen una imagen de amplio espectro que inician con una imagen macro y terminan con una representación nano, pasando por los niveles meso y micro del perfil.

Este modelo basado en perfiles se utilizó para representar los hallazgos de la evaluación tanto de la calidad del Sistema de Universidad Abierta y Educación Continua en Psicología como del desempeño de sus profesores, debido a que el interés fue conocer el grado de dominio o maestría con la que se ofrecen los servicios educativos a la sociedad (Silva, 2013).

A través de la aplicación del algoritmo que se presentó al inicio de este apartado fue posible identificar los perfiles macro de la distribución de diversos dominios de la calidad educativa y del desempeño docente. Aunque la magnitud de la puntuación estandarizada de cada dominio suministró información valiosa, la presentación gráfica de los perfiles permitió reconocer visualmente y de manera inmediata las diferencias existentes y la magnitud en que se presenta un dominio educativo determinado.

Una vez que se identificaron los perfiles macro, el siguiente paso fue analizar los hallazgos de forma más minuciosa, a fin de identificar la manera en que cada uno de ellos se relaciona de acuerdo con el nivel en que se manifiesta. En la literatura es común que, una vez que se tiene identificado el perfil, se establezcan criterios de corte para ubicar cada dominio de acuerdo a su magnitud dentro de una taxonomía de naturaleza ordinal que proporcione una idea de su nivel de desempeño, tal y como se observa en la figura 3-9.

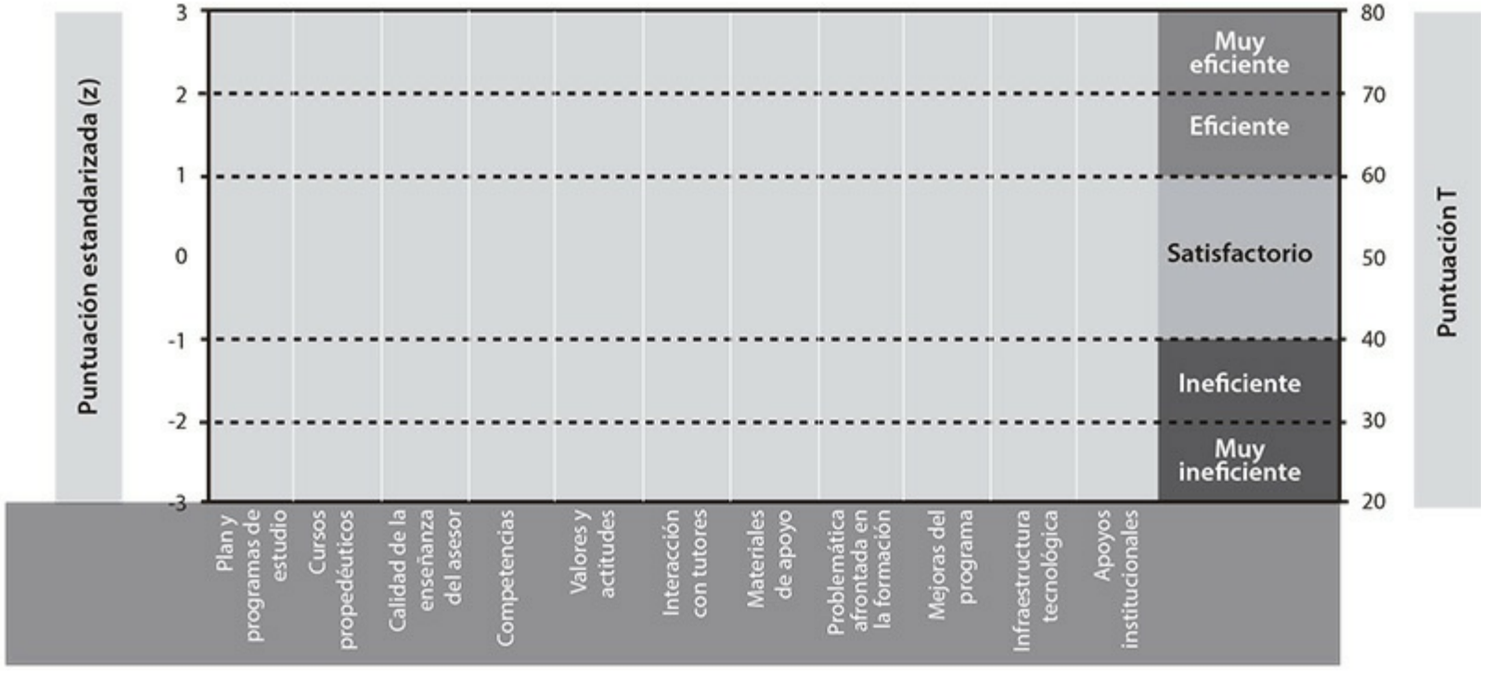


**Figura 3-9.** Prototipo de un perfil de desempeño.

El primer eje de la taxonomía presentada en la figura 3-9 comprende una magnitud de la calidad educativa muy ineficiente, seguida por una ineficiencia en los diferentes procesos involucrados; después un nivel satisfactorio, a continuación se presenta uno eficiente, y finalmente una calidad educativa muy eficiente. Los criterios de corte se construyen con diversas líneas horizontales para dividir la distribución normal en cinco porciones. La primera de esas líneas se ubica en un valor de $Z = 0$, que corresponde a la media poblacional de una distribución normal con $m = 0$ y $\sigma = 1$; las líneas que están por encima y por debajo de esta primera corresponden a los valores de 1 y -1; después hay otras líneas en 2 y -2; y por último se fijan otras entre 3 y -3. A partir de estas divisiones del plano, las áreas de riesgo que se obtienen son las siguientes:

- Un valor de *Z* menor de -2; representa que el alumno mostró un desempeño muy ineficiente.
- Un valor de *Z* igual a -2, pero menor de -1; representa que es ineficiente.
- Un valor de *Z* igual a -1, pero menor de 1; representa que es satisfactorio.
- Un valor de *Z* igual a 1 pero menor de 2; representa que es eficiente.
- Un valor de *Z* más allá de 2; representa que es muy eficiente.

En el ámbito de la investigación de poblaciones es común transformar las puntuaciones *Z* con la finalidad de evitar las fracciones decimales y los signos negativos en una escala que salve estos inconvenientes. Un tipo muy conocido de puntuación estandarizada es la puntuación *T*, que tiene una media de 50 y una desviación estándar de 10 (Gregory, 2001). Esta escala, que se representa en el eje vertical derecho de la figura 3-8, es una transformación simple de *Z* que se realiza mediante el algoritmo:

$$T = 10Z + 50$$

Para cualquier distribución de puntuaciones naturales, las puntuaciones *T* correspondientes tendrán un promedio de 50. Además, para la generalidad de las distribuciones, gran parte de las puntuaciones *T* caerán entre los valores de 20 y 80, como se observa en dicha figura; es decir, dentro de tres desviaciones estándar después de la media.

En el campo educativo los perfiles son muy valiosos debido a que brindan la oportunidad de identificar la forma que adquieren la distribución de la calidad educativa y el desempeño docente, y lo más importante es que con base en estos se pueden construir criterios educativos claros para identificar sectores de población de alumnos en riesgo de rezagarse, abandonar sus estudios, o bien, de no titularse. Una vez conocidos esos sectores poblacionales es posible identificar a los individuos que están en riesgo grave y de presentar alguno de los problemas escolares, y para ello se toma como base la forma en que se distribuye cada uno de los problemas. No obstante, la forma de hacer esto último está fuera de los objetivos de este capítulo.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**1.** De las siguientes variables identifique cuáles son continuas y cuáles son discretas.

**a)** Clase social de los sujetos del estudio.

**b)** Cantidad de metros en que un paciente logró acercarse al objeto fóbico.
**c)** Ciudades en donde se llevó a cabo la investigación.
**d)** Escuelas en donde se recolectó la información de maltrato entre alumnos.

**2.** A continuación se presentan los minutos que tardaron 50 niños en contestar un examen de ciencias naturales.

30, 25, 24, 28, 33, 35, 38, 42, 23, 38, 36, 34, 29, 25, 17, 37, 34, 36, 39, 44, 31, 26, 20, 27, 13, 22, 27, 47, 39, 37, 34, 32, 35, 28, 38, 41, 48, 15, 32, 21, 46, 35, 29, 41, 29, 33, 50, 48, 29, 40.

**a)** Calcule el rango.
**b)** Calcule la amplitud de los intervalos de clase para una distribución de frecuencias agrupadas que contenga ocho intervalos de clase.
**c)** Elabore la distribución de frecuencias agrupadas que contenga ocho intervalos de clase.
**d)** Calcule las frecuencias acumuladas.
**e)** Calcule el porcentaje acumulado.
**f)** Identifique cuál es la moda.
**g)** Calcule la mediana de la distribución de frecuencias agrupadas.
**h)** Calcule la media de la distribución de frecuencias agrupadas.
**i)** Calcule el $Q_1$ y el $Q_3$ de la distribución de frecuencias agrupadas.
**j)** Calcule el rango semiintercuartilar de la distribución de frecuencias agrupadas.
**k)** Calcule el percentil 80 de la distribución de frecuencias agrupadas.
**l)** Calcule la desviación media de la distribución de frecuencias agrupadas.
**m)** Calcule la varianza de la distribución de frecuencias agrupadas.
**n)** Calcule la desviación típica de la distribución de frecuencias agrupadas.
**o)** Calcule la asimetría de la distribución de frecuencias agrupadas.
**p)** Calcule la curtosis de la distribución de frecuencias agrupadas.

# Ejercicios voluntarios

**1.** Examine tres artículos científicos donde logre identificar por lo menos tres de los conceptos tratados en este capítulo (media, mediana, moda, rango, varianza u otro).

**2.** Con el fin de conocer los gustos musicales de jóvenes universitarios, se aplicó un cuestionarios a una muestra de 60 estudiantes, en donde se categorizó al jazz con un valor de 1; al pop se le asignó el 2; al rock 3; a la música clásica 4; a la música banda/norteña 5 y a la música rockabilly 6. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 6 | 3 | 4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 4 | 2 | 4 | 6 | 5 | 5 | 6 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 3 | 5 | 6 | 4 | 3 | 1 | 4 | 4 | 1 |
| 2 | 6 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 5 | 6 |

Con los datos anteriores realice lo siguiente:

**a)** Calcular la moda.
**b)** Calcular la media.
**c)** Calcular la mediana.
**d)** Calcular el rango.

**3.** Un profesor quiere conocer la cantidad de libros que 100 estudiantes leen al año, para lo cual obtuvo los siguientes resultados:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 6 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 1 |
| 0 | 6 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | 5 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 6 | 11 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 5 | 5 | 4 | 3 | 1 | 3 |
| 5 | 5 | 1 | 3 | 4 | 4 | 5 | 3 | 2 | 5 |
| 7 | 4 | 1 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 1 | 4 |
| 8 | 2 | 0 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 6 |
| 11 | 3 | 2 | 3 | 6 | 3 | 3 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 4 | 2 | 6 | 7 | 5 | 2 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 3 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |

Con los datos anteriores realice lo siguiente:

**a)** Calcular la moda.
**b)** Calcular la media.
**c)** Calcular la mediana.
**d)** Calcular el rango.

**4.** Realice la tabla de distribución de frecuencias considerando cinco intervalos para los siguientes datos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 53 | 46 | 58 | 53 | 52 | 46 | 54 | 44 | 65 |
| 44 | 45 | 53 | 51 | 55 | 63 | 51 | 52 | 45 | 55 |
| 64 | 65 | 48 | 42 | 56 | 64 | 51 | 63 | 65 | 55 |
| 53 | 46 | 59 | 65 | 54 | 55 | 61 | 46 | 58 | 54 |
| 64 | 44 | 50 | 48 | 57 | 65 | 65 | 45 | 59 | 53 |

Con los datos anteriores realice lo siguiente:

**a)** Calcular el rango.
**b)** Calcular la amplitud.
**c)** Calcular la frecuencia relativa.
**d)** Calcular la frecuencia acumulada.
**e)** Calcular el porcentaje acumulado.

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

**Ejercicio 1**

**a)** R = Discreta.
**b)** R = Continua.
**c)** R= Discreta.
**d)** R=Discreta.

**Ejercicio 2**

**a)** Rango = 13-15
**b)** R = 5
**c)**

| Intervalos de clase | | Frecuencia |
|---|---|---|
| 13 | 17 | 3 |
| 18 | 22 | 3 |
| 23 | 27 | 7 |
| 28 | 32 | 10 |
| 33 | 37 | 12 |
| 38 | 42 | 9 |
| 43 | 47 | 3 |
| 48 | 52 | 3 |

**d)**

| Frecuencias agrupadas |
|---|
| 3 |
| 6 |
| 13 |

| |
|---|
| 23 |
| 35 |
| 44 |
| 47 |
| 50 |

**e)**

| Porcentaje acumulado |
|---|
| 6 |
| 12 |
| 26 |
| 46 |
| 70 |
| 88 |
| 94 |
| 100 |

**f)** Moda = 35
**g)** R = 33.33
**h)** R = 32.90
**i)** R, $Q_1$ = 27.14; R, $Q_3$ = 39.89
**j)** R = 33.52
**k)** R = 41.28
**l)** R = 7.09
**m)** R = 77.64
**n)** R = 8.81
**o)** R = –0.1148
**p)** R = –0.2618

# Solución a los ejercicios voluntarios

**Ejercicio 1**

A discusión grupal.

**Ejercicio 2**

**a)** 1
**b)** 3.41666667
**c)** 3
**d)** 5

**Ejercicio 3**

**a)** 3
**b)** 3.34
**c)** 3
**d)** 11

**Ejercicio 4**

**a)** 23
**b)** 4.6 = 5
**c)** Frecuencia relativa.
**d)** Frecuencia acumulada.
**e)** Porcentaje acumulado.

Respuesta a los incisos c, d y e:

| Intervalos | Frecuencia | Frecuencia relativa | Frecuencia acumulada | Porcentaje acumulado |
|---|---|---|---|---|
| 40 a 44 | 4 | 0.08 | 4 | 8 |
| 45 a 49 | 10 | .2 | 14 | 28 |
| 50 a 54 | 14 | .28 | 28 | 56 |
| 55 a 59 | 10 | .2 | 38 | 76 |
| 60 a 64 | 6 | .12 | 44 | 88 |
| 65 a 69 | 6 | .12 | 50 | 100 |
| Total | **50** | **1** | | |

# GLOSARIO

**Asimetría:** es un indicador que informa sobre la manera en que se agrupan con relación a la media.
**Cuartiles:** punto en una escala numérica que divide una serie de observaciones en cuatro porciones.
**Curtosis:** grado de aplanamiento que tiene la distribución de frecuencias con respecto a la normal.
**Desviación media:** estadístico que evalúa la desviación de las puntuaciones individuales con respecto a la media, con

la finalidad de obtener una estimación de la variación promedio de las puntuaciones.
**Desviación típica o estándar:** es la raíz cuadrada de la varianza.
**Distribución de frecuencias agrupadas:** datos organizados en agrupaciones en función de intervalos de clase.
**Distribución de frecuencias:** Datos organizados en función de sus frecuencias.
**Dispersión:** variabilidad entre un conjunto de observaciones.
**Histograma:** gráfica de datos continuos construida mediante barras unidas.
**Intervalos de clase:** intervalo de datos contiguos y mutuamente excluyentes.
**Media:** suma de las puntuaciones o de los valores de una variable, dividida por el número de casos que conforman el conjunto.
**Mediana:** en un conjunto finito de valores; la mediana es el valor que divide la distribución en dos partes iguales.
**Moda:** valor que se repite el mayor número de veces en un conjunto de datos.
**Normoexcedente:** es una equivalencia, es decir, que los valores son semejantes.
**Ojiva:** representación gráfica, en forma de línea creciente, de las distribuciones agrupadas.
**Polígono de frecuencias:** gráfica construida mediante líneas.
**Puntuaciones tipificadas:** procedimiento mediante el cual se puede transformar cualquier distribución normal empírica en una distribución normal teórica.
**Rango intercuartilar:** distancia entre el primero y el tercer cuartil.
**Rango:** el rango mide la distancia total a lo largo de la cual varían las puntuaciones.
**Rango excluyente:** diferencia entre la puntuación mayor y la puntuación menor.
**Rango incluyente:** se refiere a la diferencia entre el límite real superior del intervalo, que abarca la mayor puntuación, y el límite real inferior del intervalo, que abarca la puntuación más pequeña.
**Sensibilidad del instrumento de medición:** unidad mínima que es registrada por un instrumento de medición.
**Tabla:** ordenamiento que muestra valores, por lo común, exactos y dispuestos en filas y columnas.
**Variable continúa:** variable en la que siempre existen otros valores entre dos valores potencialmente observables; es decir, estas variables toman un número ilimitado de valores intermedios.
**Variable discreta:** variable que toma valores separados, lo cual significa que toma un número finito de valores.
**Varianza:** estadístico que mide la dispersión de los datos con respecto de la media, es decir, la manera en que difieren los datos de un conjunto.

# BIBLIOGRAFÍA


American Psycological Association (2010). *Manual de publicaciones de la American Psychological Association*. México: Editorial El Manual Moderno.

Aron, A., Coups, E. y Aron, E. (2010). *Statistics for the Behavioral and Social Sciences: A Brief Course*. Nueva York: Editorial Prentice Hall.

Downie, N.M. y Heath, R.W. (1973). *Métodos estadísticos aplicados*. México: Editorial Harper & Row Publishers.

Glass, V.G. y Stanley, C.J. (1974). *Métodos cuantitativos aplicados en las ciencias sociales*. México: Editorial Prentice-Hall.

Gravetter, J.F. y Wallnau, B.L. (2012). *Statistics for the Behavioral Sciences.* Nueva York: Editorial Wadsworth.

Gregory, R.J. (2001) *Evaluación psicológica. Historia principios y aplicaciones*. México: Editorial El Manual Moderno.

Guarneros, R.E. (2013). *Análisis del desarrollo de las habilidades lingüísticas orales y escritas en niños preescolares*. (Tesis de doctorado inédita). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Pedhazur, J.E. (1982). *Multiple Regression in Behavioral Research: Explanation and Prediction.* Chicago: Harcourt College Pub.

Rumsey, D. (2008). *Estadística para Dummies*. EUA: Willey Publishing.

Silva, R A. (2013). *La educación a la distancia en la UNAM. Una semblanza desde el SUAyED Psicología*. México: UNAM. Disponible en: http://cuved.com.mx/campus/pluginfile.php/3551/mod_forum/attachment/4066/VERSION_FINAL_DEL_LIBRO.p

Spiegel (1970). *Estadística.* México: Editorial McGraw-Hill.

# Capítulo 4

# INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

*Carlos N. Nava Quiroz, Cynthia Zaira Vega Valero*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

El objetivo de este capítulo es que el estudiante conozca y se introduzca en el campo de la estadística inferencial, la cual incluye tres grandes áreas: muestreo, estimación de parámetros y pruebas de hipótesis. Sin embargo, el capítulo hace énfasis en la última área, pues se busca que el alumno conozca y domine los pasos para realizar un contraste de hipótesis dentro del marco de un problema de investigación.

## Presentación del problema: teoría científica y desarrollo de hipótesis comprobables

Aunque no existe una definición única acerca de qué es una teoría científica, hay cierto consenso en que ésta se compone de un conjunto de enunciados relacionados con algún fenómeno, y a partir de dichos enunciados se generan hipótesis que permiten desarrollar una investigación. Las hipótesis son de interés particular debido a que constituyen el puente entre la teoría y los hechos de la realidad. A partir de lo anterior es posible identificar dos grandes tipos de hipótesis: las hipótesis científicas y las hipótesis estadísticas.

Las **hipótesis científicas** intentan establecer relaciones entre por lo menos dos variables. A este tipo de hipótesis corresponden aquellas que indican la presencia de algún fenómeno específico dentro de un contexto específico (hipótesis de valor); o las que mencionan que ante el cambio de una variable en particular ocurrirán cambios en otra (sin que necesariamente una sea la causa de la otra); este caso se denominan **hipótesis correlacionales**. Hay otras hipótesis que intentan establecer diferencias entre grupos, pero no implica por fuerza la explicación o causalidad del contenido de los mismos; éstas se denominan **hipótesis de diferencias entre grupos;** y un tipo más postula que cuando una variable adquiere un valor particular otra cambia en una dirección predecible; a éstas se les llama **hipótesis causales**.

Por otro lado, las **hipótesis estadísticas** fungen como parte de la metodología para probar posibles diferencias entre grupos, tratamientos o muestras poblacionales. Este grupo (hipótesis estadísticas) está conformado por las hipótesis nulas (Ho), las cuales afirman que no hay diferencias entre grupos o tratamientos; y su contraparte son las hipótesis alternas (Hi), las cuales indican que sí hay diferencias entre grupos o tratamientos.

En el caso de la psicología no se cuenta con una teoría científica única o hegemónica; por el contrario, existen diversos modelos teóricos que intentan explicar fenómenos psicológicos diversos. A continuación se presenta un ejemplo de esto. Suponga que un grupo de psicólogos organizacionales (PO) es solicitado por una institución hospitalaria para conocer o determinar en qué medida los niveles de estrés afectaban o interferían en el trabajo del personal que laboraba en la institución. De inicio, el equipo de PO decidió enfocar el problema a partir del modelo teórico de estrés-afrontamiento de Lazarus y Folkman (1991), quienes afirman que los episodios estresantes (cuando la gente se estresa) se presentan cuando los individuos perciben que sus capacidades de afrontamiento son rebasadas ante alguna exigencia del medio; mientras que el afrontamiento se refiere a las estrategias cognitivas o conductas con las que el individuo cuenta para responder a las exigencias cambiantes del medio.

Como hipótesis científica general se establece que: a mayor estrés, menos estrategias de afrontamiento, y a menor estrés más estrategias de afrontamiento. Este modelo teórico y sus hipótesis generales permiten tener un marco de referencia que guiará la investigación y al mismo tiempo permitirá explicar los hallazgos.

Supóngase además, que el equipo de PO decidió aplicar varios instrumentos de medida y plantear sus hipótesis particulares. El primer instrumento fue una cédula de entrevista para conocer las características demográficas de la muestra que elegirían y tres escalas: Estrés en el trabajo, Afrontamiento laboral y Escala de Fatiga laboral. Algunas de las hipótesis son:

- A mayor estrés laboral menores estrategias de afrontamiento.
- A mayor fatiga laboral mayor estrés.
- A menores estrategias de afrontamiento mayor fatiga laboral.
- En los grupos de más responsabilidad laboral el estrés será mayor.
- En los grupos de más responsabilidad laboral el cansancio será mayor.

En los tres primeros casos las hipótesis son correlacionales y las dos restantes son de diferencias entre grupos.

Después, el equipo de PO decidió elegir una muestra, aplicar los instrumentos de evaluación y procesar la información. También se realizó el análisis de los datos a partir de coeficientes de correlación y sus respectivas pruebas de significación, y en el caso de los grupos a comparar, se eligieron las pruebas de significación estadística correspondiente para valorar la pertinencia de sus análisis.

Lo anterior parece sencillo; sin embargo, para algunos resulta difícil y hasta cierto punto enigmático. La pregunta más frecuente es: ¿cómo elegir las pruebas para analizar los datos? Esta interrogante se intentará responder en las siguientes secciones.

# Inferencia estadística

La inferencia estadística puede ser desarrollada de dos maneras: con base en el marco de la estimación intervalar o a través de las pruebas de hipótesis. En el presente caso sólo se tomarán en cuenta las pruebas de hipótesis.

Las pruebas de hipótesis se dividen en dos grandes grupos, las pruebas paramétricas (prueba F o análisis de varianza, prueba t de Student, entre otras); y las no paramétricas (chi cuadrada, Kruskal Wallis, T de Wilcoxon, entre otras). Las primeras se basan en modelos estadísticos robustos (p. ej., distribución normal, distribución t, etc.), mientras que las segundas no cuentan con tales modelos.

El modelo más característico, que sirve como guía para otros tipos de distribuciones, es el de distribución normal (véase figura 4-1), que es considerada como la distribución madre por sus propiedades e importancia. Las características de ésta son:

- El valor de su media es cero ($\mu = 0$).
- Tanto la media como la moda y la mediana caen en el mismo lugar.
- La media ($\mu = 0$) parte la distribución en dos mitades iguales, lo cual hace que cada una de ellas tenga igual número de valores (.5 de cada lado).
- La desviación estándar es igual a 1 ($\sigma = 1$), lo cual hace que existan tres desviaciones a la derecha de la media y tres a la izquierda; los valores que están a la izquierda de la media poseen un signo negativo para indicar su ubicación en la curva, no significa valor de resta.
- Los extremos de la curva son asintóticos, lo cual significa que sus valores tienden a infinito y de ahí que no se junten con el piso del gráfico, eje de las *x* o abscisa.
- Entre la media y una desviación estándar se encuentra 34.13% de los casos (cuando se considera la suma de $\pm 1\sigma$ el valor es de 68.26%, como se muestra en la figura 4-1), para dos desviaciones estándar es de 47.73% y para tres desviaciones es de 49.87%.

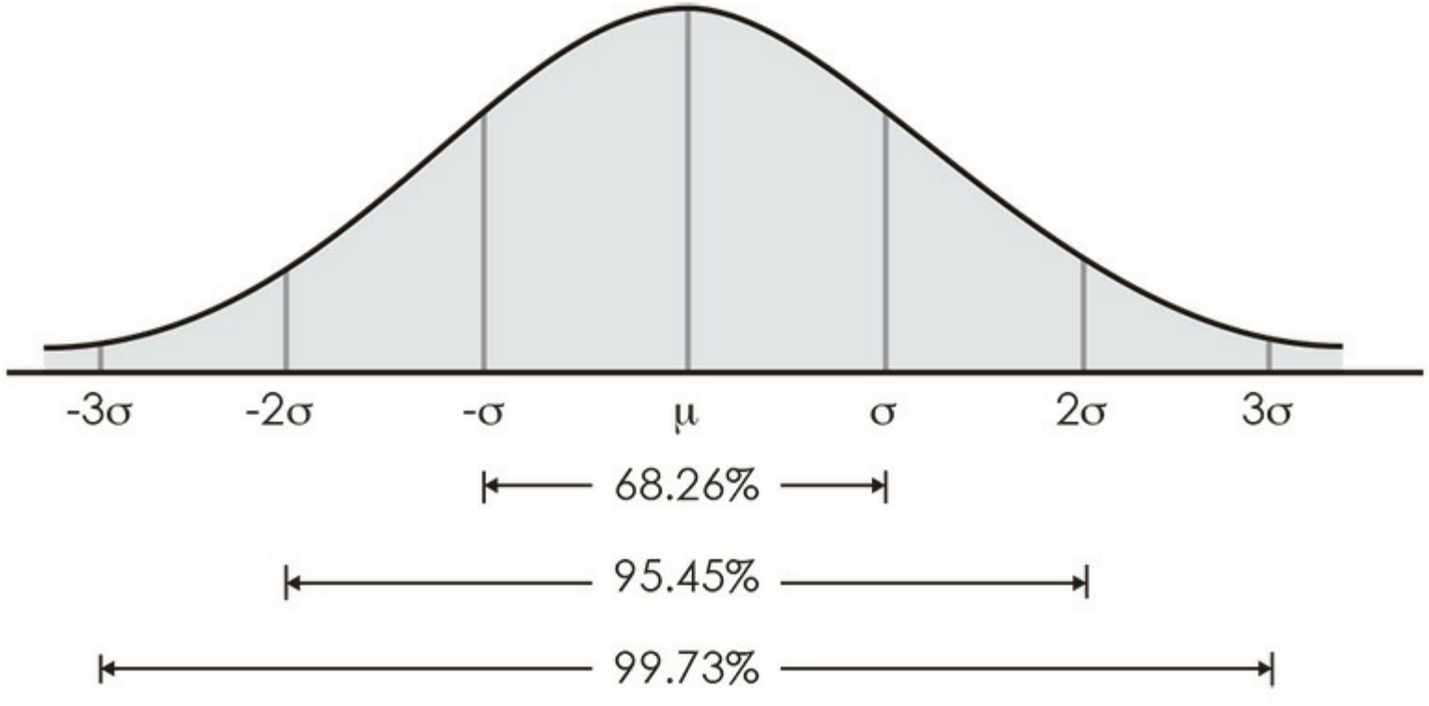



**Figura 4-1.** Distribución normal.

- Además, las variables que son comparadas con este modelo deben ser continuas y las observaciones son independientes.

El propósito de este apartado no es exponer los diferentes modelos que sustentan a cada una de las pruebas de hipótesis, sino que los lectores tengan una idea de lo que es un modelo estadístico y que de éste se derivan requerimientos para su uso. Así, el modelo puede ser muy robusto pero quizá no sea de utilidad si los datos disponibles no se ajustan a tales exigencias. Debido a lo anterior, la prueba estadística se elige dependiendo de las propiedades de los datos. Como ya se mencionó, las pruebas pueden ser paramétricas o no paramétricas, y para tomar una decisión respecto a cuál utilizar, resulta de utilidad apoyarse en el diagrama para la elección del tipo de

prueba a emplear en un estudio, como se muestra la figura 4-2.

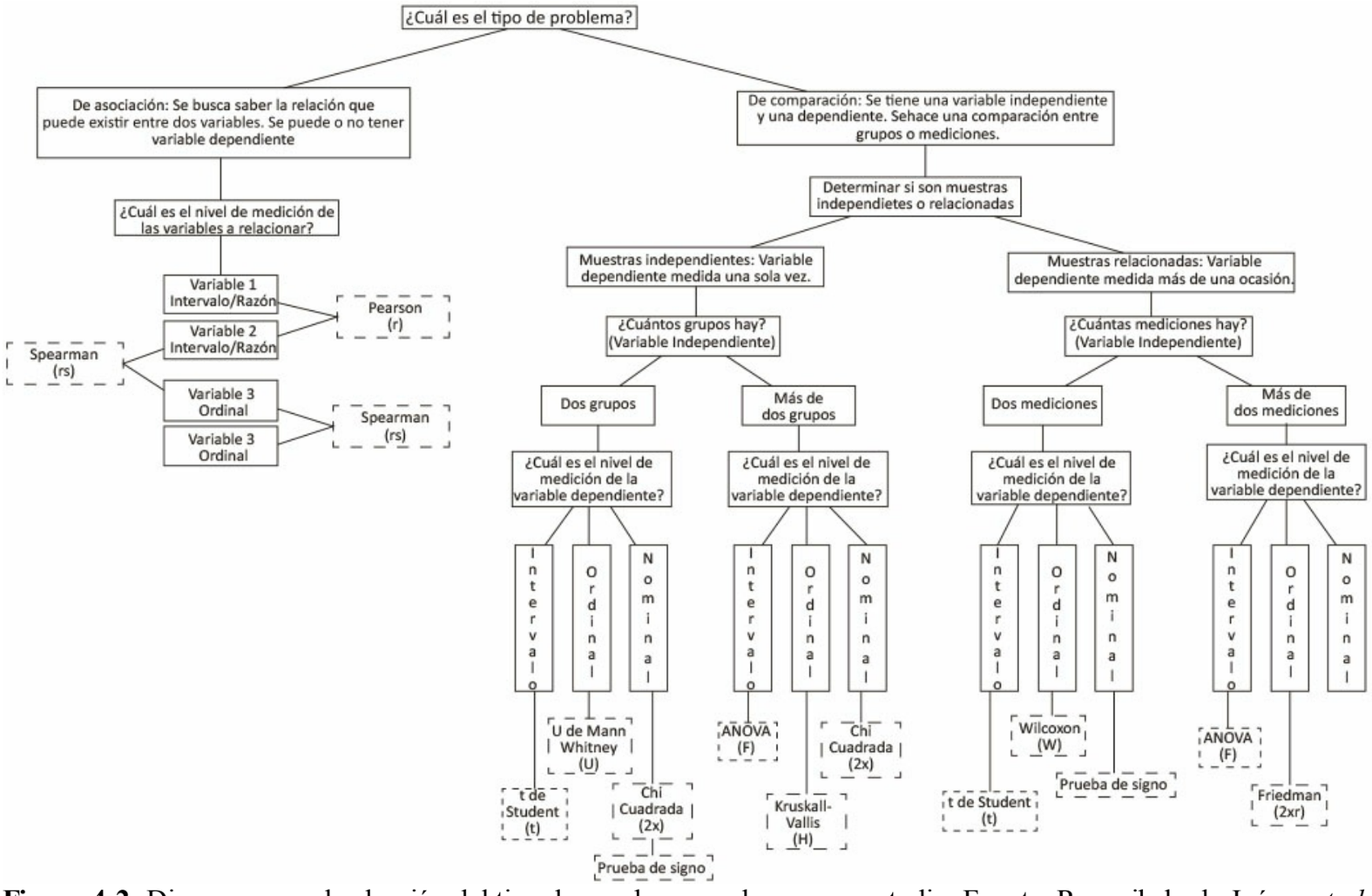

¿Cuál es el tipo de problema?
De asociación: Se busca saber la relación que puede existir entre dos variables. Se puede o no tener variable dependiente
De comparación: Se tiene una variable independiente y una dependiente. Sehace una comparación entre grupos o mediciones.
¿Cuál es el nivel de medición de las variables a relacionar?
Variable 1 Intervalo/Razón
Variable 2 Intervalo/Razón
Pearson (r)
Spearman (rs)
Variable 3 Ordinal
Variable 3 Ordinal
Spearman (rs)
Determinar si son muestras independietes o relacionadas
Muestras independientes: Variable dependiente medida una sola vez.
Muestras relacionadas: Variable dependiente medida más de una ocasión.
¿Cuántos grupos hay? (Variable Independiente)
¿Cuántas mediciones hay? (Variable Independiente)
Dos grupos
Más de dos grupos
Dos mediciones
Más de dos mediciones
¿Cuál es el nivel de medición de la variable dependiente?
¿Cuál es el nivel de medición de la variable dependiente?
¿Cuál es el nivel de medición de la variable dependiente?
¿Cuál es el nivel de medición de la variable dependiente?
Intervalo
Ordinal
Nominal
Intervalo
Ordinal
Nominal
Intervalo
Ordinal
Nominal
Intervalo
Ordinal
Nominal
U de Mann Whitney (U)
t de Student (t)
Chi Cuadrada (2x)
Prueba de signo
ANOVA (F)
Kruskall-Vallis (H)
Chi Cuadrada (2x)
t de Student (t)
Wilcoxon (W)
Prueba de signo
ANOVA (F)
Friedman (2xr)

**Figura 4-2.** Diagrama para la elección del tipo de prueba a emplear en un estudio. Fuente: Recopilado de Juárez *et al*. (2002).

Las propiedades de los datos también se conocen como supuestos de la prueba. En general, muchos de estos supuestos comparten más de una prueba y en la medida que se cumplen o no, es posible elegir un tipo específico de prueba para analizar los datos, éstos son:

- Si los participantes son elegidos al azar de una población definida (muestreo aleatorio).
- Número de grupos a comparar.
- Si los grupos son independientes o relacionados.
- La escala de medida en que están los datos.
- Normalidad de los datos.
- Homogeneidad de varianzas.

En principio, es importante definir a la población en estudio. En el caso del ejemplo que se está exponiendo, la

población está definida por la solicitud que los dirigentes del hospital hacen al equipo de PO. De esta manera, la población bajo estudio son los trabajadores del hospital, es decir: médicos, enfermeras, personal administrativo y de intendencia. Nótese que son sólo los que trabajan en esta institución y no en otro hospital. En caso de que se quisiera que el estudio abarcara un rango más amplio, el universo de investigación se tendría que definir de manera diferente, por ejemplo: "todos los trabajadores de hospitales regionales del estado X" o "los trabajadores médicos de hospitales del estado X". La manera en que se define la población tiene que ver con el tipo de muestreo que es realizado y con los alcances de la investigación. Así, una población está conformada por aquellos elementos que comparten una o más características en común.

Es interesante conocer a toda la población en cuanto a las características que se busca medir, por ejemplo estrés en el trabajo; sin embargo, esto no es posible en todos los casos debido al esfuerzo y costo económico que representa para tal empresa, por lo que sólo se elige una pequeña parte de tal población (muestra) y se infiere que los valores encontrados en ésta sean muy cercanos a los valores reales. Para que esto sea cierto, es indispensable que la muestra sea elegida aleatoriamente (que todos tengan la misma posibilidad de ser elegidos). En el caso que se está desarrollando, suponga que el hospital cuenta con 2 000 trabajadores y se decide elegir una muestra de 40 trabajadores.

En este punto ya se cuenta con una planeación metodológica que es necesaria en todo proyecto de investigación. Además, antes de elegir la prueba estadística a desarrollar es necesario considerar las propiedades de los datos que se analizarán.

# Estimación de parámetros y contraste de hipótesis

Una vez realizada la planeación metodológica, es necesario aplicar los instrumentos de medida pertinentes a la muestra elegida, después se codifica la información en algún programa estadístico, y entonces se efectúa el análisis de resultados.

**Pasos de la inferencia**

Por practicidad, es posible definir dos grandes pasos en la elección de la prueba estadística a desarrollar: el primero es de carácter metodológico y el segundo se relaciona con las propiedades de los datos.

En el ámbito metodológico, es importante determinar la cantidad de grupos y si estos son independientes o relacionados (supuesto b). Los grupos, de manera habitual, tienen que ver con las hipótesis o preguntas que se plantean con respecto al estudio: en el ejemplo se desea conocer si es que se presentan los mismos niveles de estrés en los diferentes estratos de trabajo (médicos, enfermeras, administrativos e intendentes), o entre personal femenino y masculino o entre enfermeras y médicos.

En el primer caso (estratos de trabajo) hay cuatro grupos; mientras que en el segundo caso (género: hombre, mujer) son dos grupos; lo mismo que para el tercero. En todos los casos se dice que las observaciones son independientes (o que son grupos independientes), es decir, el médico sólo pertenece al grupo de médicos y no puede pertenecer a intendentes o administrativos, o la secretaria pertenece al grupo administrativo y no puede pertenecer a otro como el de médicos o enfermeras. En el supuesto de que se planteara la pregunta de si el turno en que laboran las enfermeras tiene que ver con los niveles de estrés, sería necesario medir sus niveles tanto en el día como en la noche, y en este caso se trata de grupos relacionados. Los mismos individuos son medidos en dos momentos diferentes (supuesto c).

Otro aspecto más es la manera de seleccionar a los participantes, en el ejemplo se eligió la muestra de manera

aleatoria (supuesto a) por estratos. Para ampliar la información acerca de los diferentes tipos de muestreo véase el capítulo 2 de este texto o Elorza (2007); Ojeda y Díaz (2012).

Una vez que se ha seleccionado el tamaño de muestra y se han definido los grupos a comparar, el siguiente paso es aplicar los instrumentos para recoger la información pertinente y capturarla en una base de datos de algún programa estadístico para su procesamiento, por ejemplo, SPSS, SYSTAT, MINITAB, STATISTICS o R.

**Selección de la prueba, comprobación de supuestos**

Antes de elegir alguna prueba estadística es conveniente preguntarse acerca de las propiedades de los datos (supuesto d para elegir la prueba) y el tipo de preguntas que es necesario responder es: ¿en qué escala están las variables medidas?, ¿las variables se distribuyen normalmente?, ¿existe homogeneidad de varianzas?

A manera de recordatorio, existen cuatro tipos de escalas de medida: nominal, ordinal, intervalo y razón. Las dos primeras son tal vez las más frecuentes en psicología. La de intervalo es menos frecuente, pero aun así existe en psicología. Para mayor información acerca de las escalas véase el capítulo 2 de este texto o Kerlinger y Lee (2002). En el ejercicio expuesto existen razones para suponer que los datos son de intervalo, debido a las propiedades de la escala (estrés laboral) y los puntajes que arroja (supuesto e).

Para determinar si la o las variables se distribuyen normalmente (el concepto de normalidad se refiere a si la distribución de nuestros datos son comparables con la curva normal, antes descrita) existen diferentes aproximaciones (supuesto e).

La tabla 4-1 muestra los datos de los 40 participantes, que corresponden a los cuatro grupos independientes del estudio de estrés laboral.

**Tabla 4-1. Puntajes de estrés por estrato laboral**

| Participantes | Médicos | Enfermeras | Administrativos | Intendentes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 9 | 9 | 4 |
| 2 | 18 | 14 | 8 | 5 |
| 3 | 16 | 13 | 9 | 6 |
| 4 | 20 | 12 | 6 | 3 |
| 5 | 19 | 15 | 9 | 7 |
| 6 | 15 | 14 | 7 | 3 |
| 7 | 16 | 11 | 10 | 9 |
| 8 | 17 | 9 | 11 | 10 |
| 9 | 14 | 10 | 9 | 11 |
| 10 | 18 | 9 | 12 | 8 |

El primer paso para probar la normalidad de la variable **estrés laboral** consiste en solicitar el histograma de los datos con la curva normal. La figura 4-3 muestra la distribución de dichos datos.

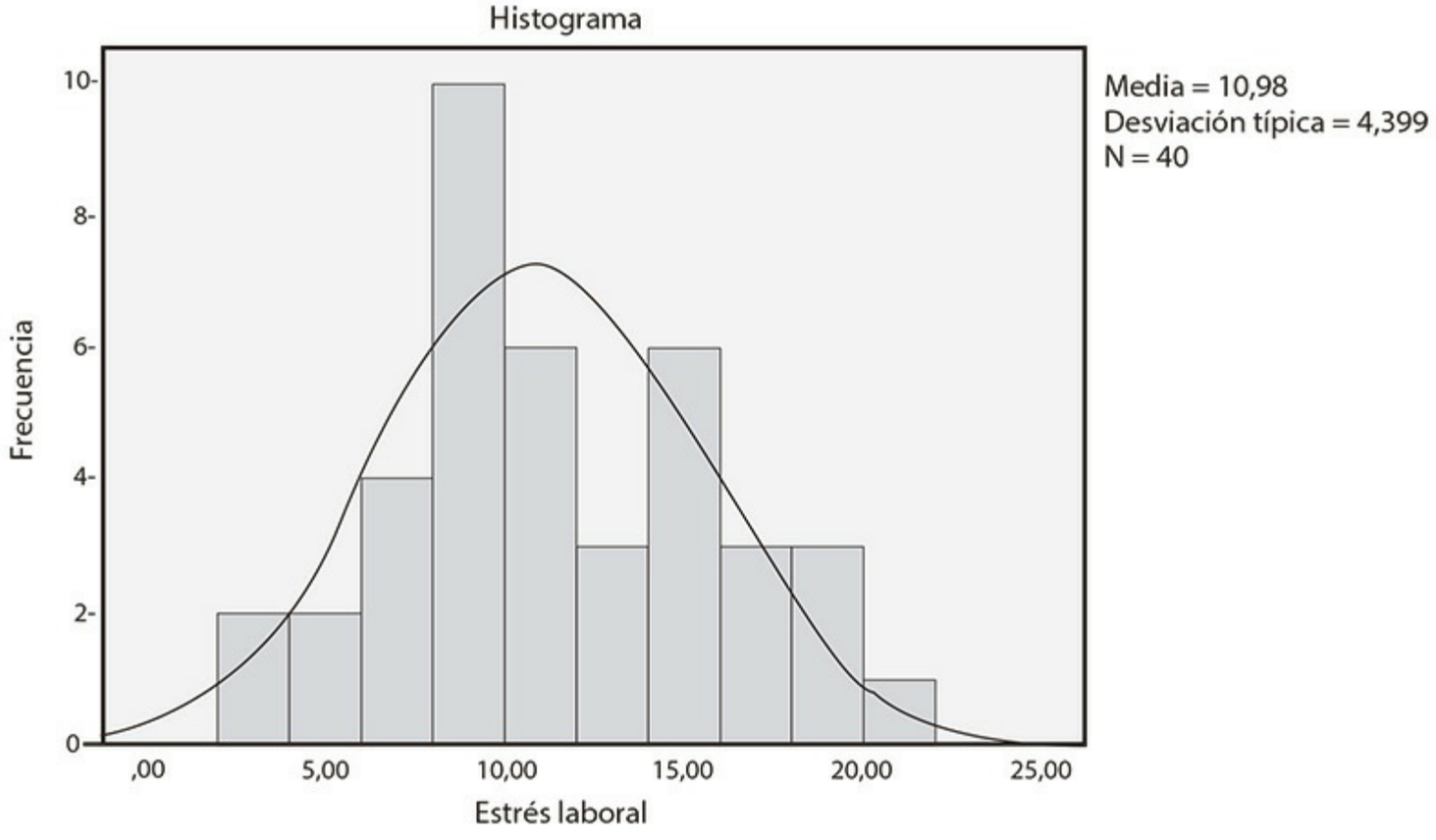



**Figura 4-3.** Estrés laboral con curva normal.

Aunque esta primera figura es un buen referente, puede dejar lugar a dudas, en este caso es necesario recurrir a gráficos más específicos como los Q-Q. Las figuras 4-4 y 4-5 muestran los mismos datos.

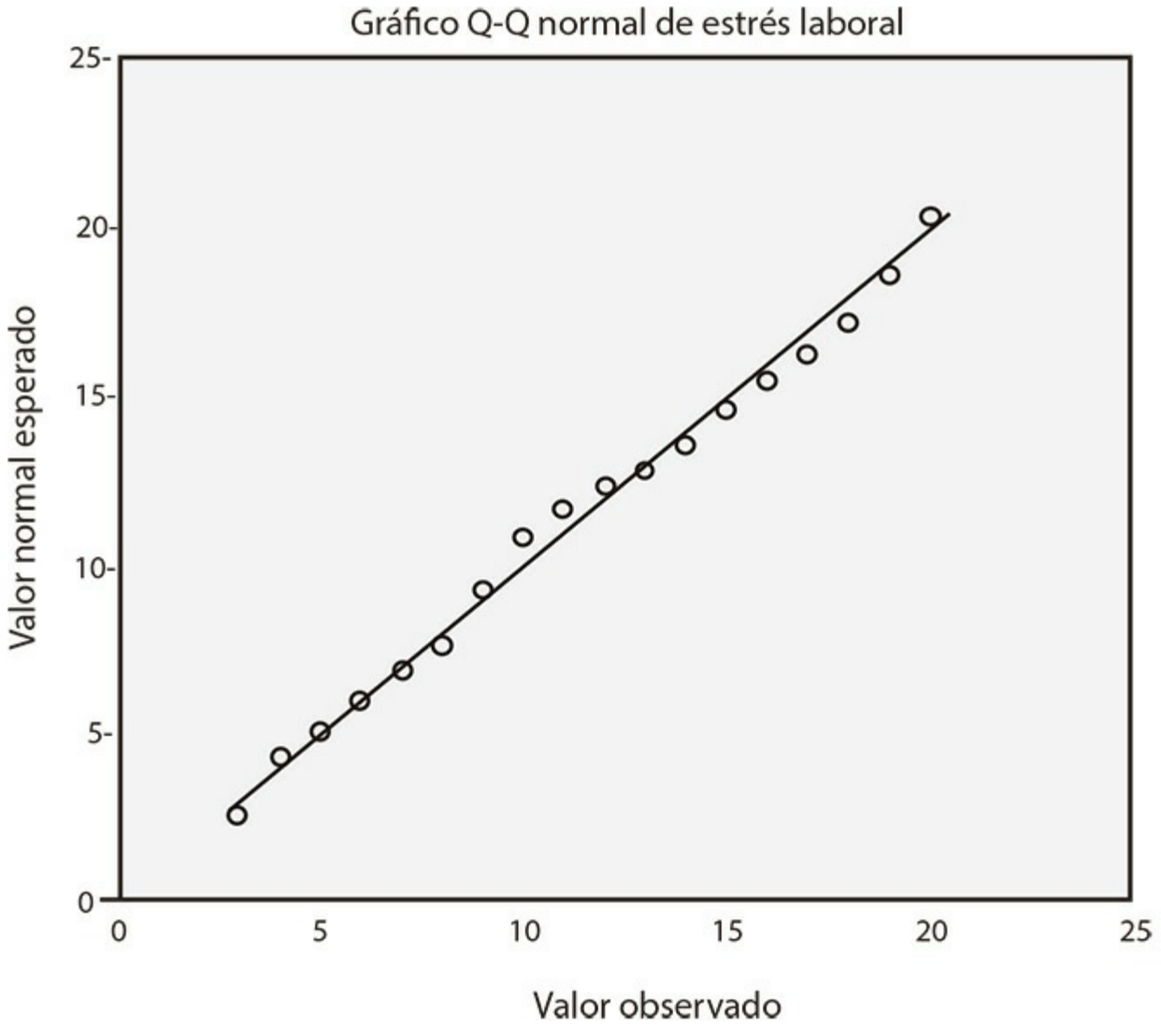



**Figura 4-4.** Comparación de los valores normales y observados.

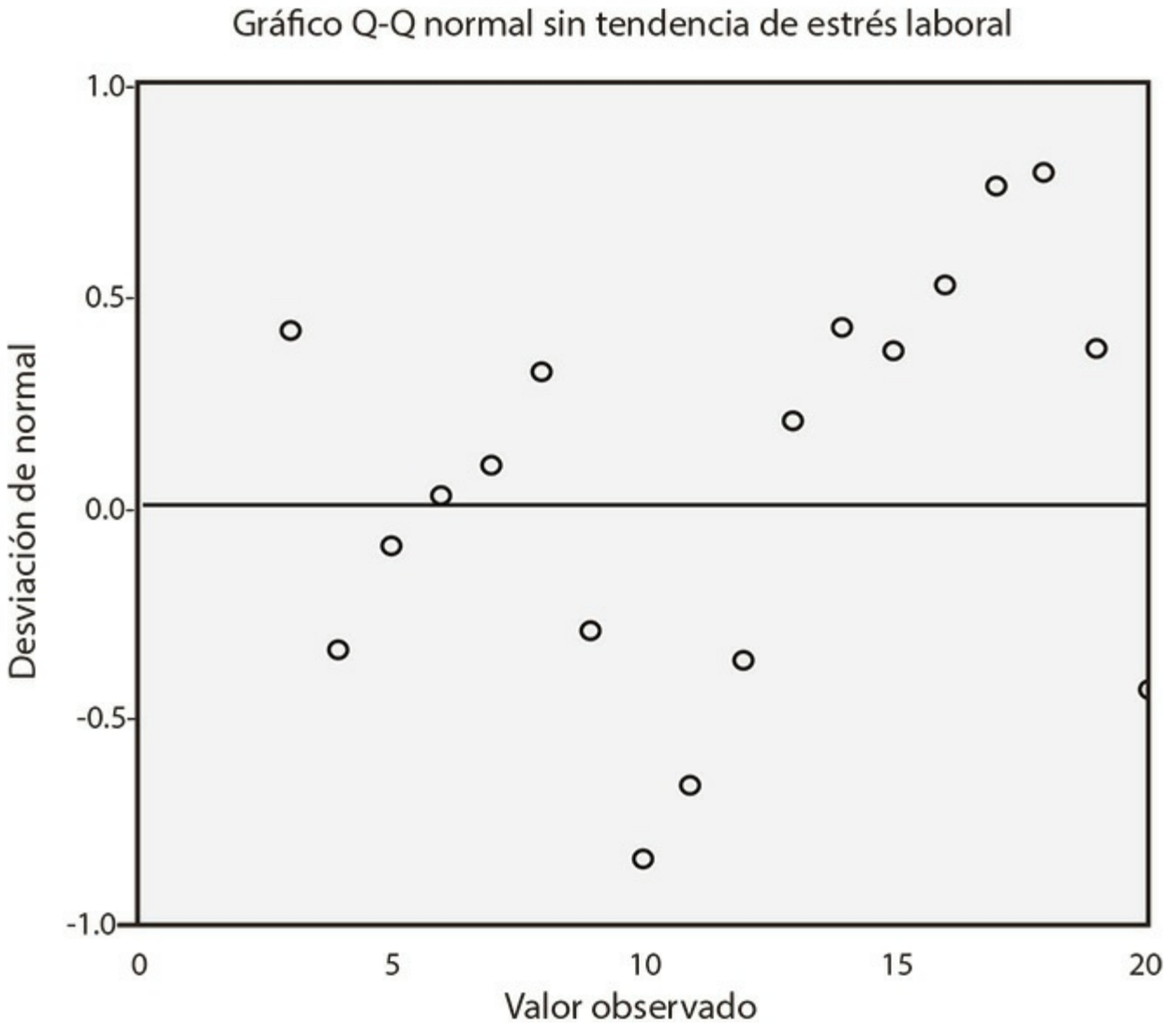



**Figura 4-5.** Comparación de las desviaciones normales y observadas.

En la figura 4-4, los valores observados (puntos) caen sobre la línea o se aproximan mucho a ella (que representa a la curva normal), por lo que se asume que los datos poseen normalidad. Para corroborar lo anterior se presenta la figura 4-5, donde no se muestra tendencia alguna de las desviaciones con respecto a la normal. El caso contrario se daría si se intentara establecer el modelo de distribución t de Student para los mismos datos. En esta evaluación los datos se alejan de la línea recta (distribución t) y se nota una tendencia en las desviaciones (figuras 4-5 y 4-6).

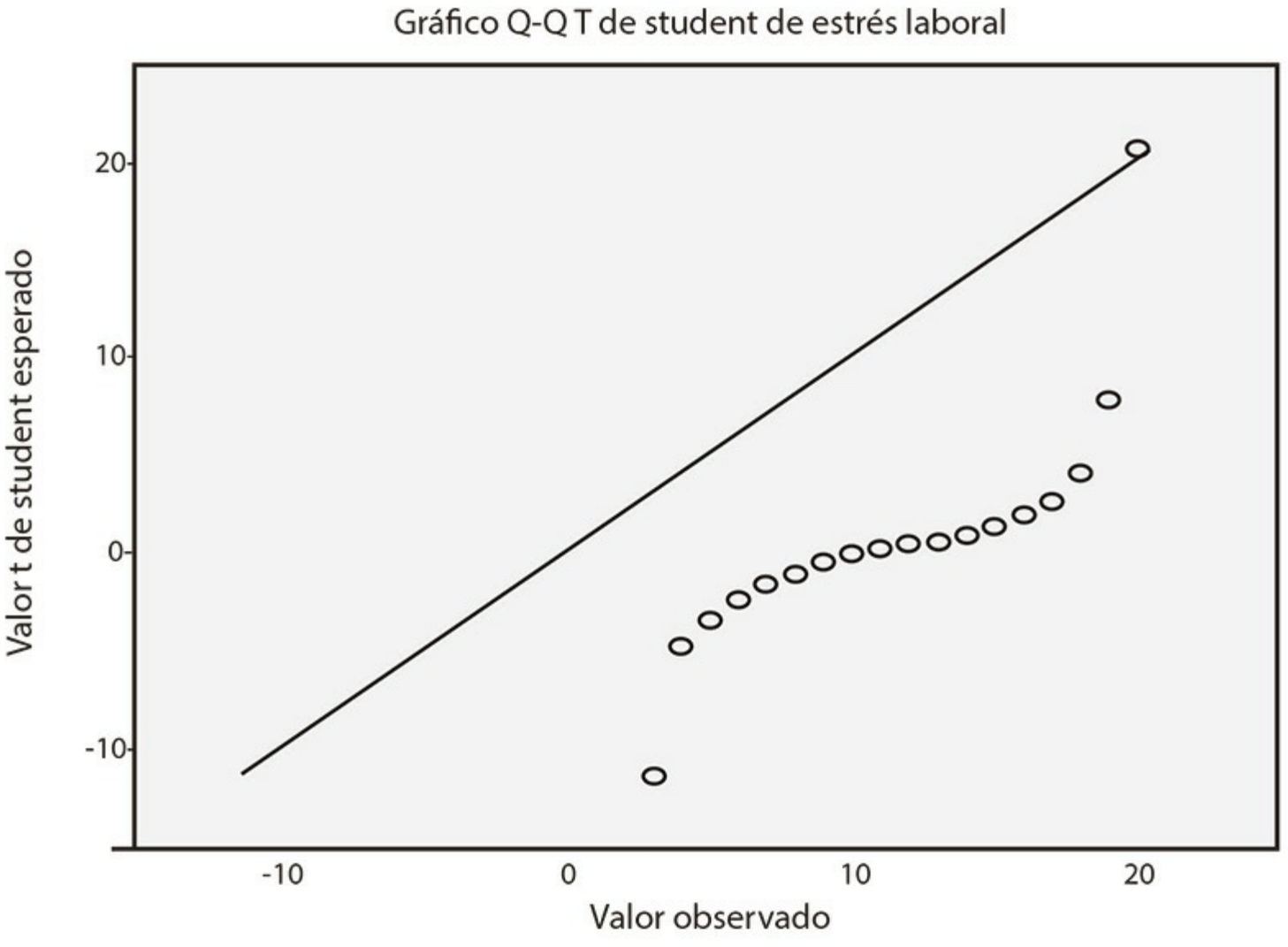



**Figura 4-6.** Comparación de los valores t de Student con los observados.

En cuanto a los criterios numéricos, existen pruebas para verificar la normalidad e igualdad de varianzas: prueba de Anderson-Darling (AD), que se utiliza para probar normalidad; así como la de Levene (L), para probar la homogeneidad de las varianzas (supuesto f). Para la prueba de AD, el resultado indicó que los datos se distribuyen normalmente (AD = 0.42, $p$ = .32 y $\alpha$ = .05). Lo mismo muestra la prueba L, es decir, hay homogeneidad de varianzas ($Levene_{(gl.\ 3,36)}$ = 1.92, $p$ = .14 y $\alpha$ =.05). En un apartado posterior se describirán con mayor detalle estas pruebas.

En el ejercicio que se está realizando se observa que se cumplen los supuestos, aunque no siempre ocurre esto. Dicha situación no es excepcional, por el contrario, es común que alguno o algunos de los supuestos no se cumplan como el que no sea posible realizar el muestreo al azar o que existan dudas acerca de si los datos están en una escala ordinal o de intervalo; sin embargo, queda a juicio del investigador si es que prosigue con la prueba estadística que tenía proyectada o se decide por otra. En cualquier caso se debe tener presentes las limitaciones que implica lo anterior. De continuar con la prueba que se tenía planeada, por ejemplo el análisis de varianza que se tenía proyectado, los resultados estarán acotados por la falta del supuesto o supuestos que no se cumplen; y en caso de que

se decida elegir otra prueba, es necesario considerar la pérdida de información que esto conlleva al seleccionar una prueba menos robusta y más sencilla. En cuanto al incumplimiento de los supuestos existe una excelente discusión al respecto en Kerlinger y Lee (2004).

**Hipótesis estadísticas, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico**

Una vez que el equipo de PO ha valorado el cumplimiento de los supuestos para desarrollar el análisis de varianza, el siguiente paso es establecer las hipótesis estadísticas, el nivel de significación y los grados de libertad.

Entonces, la hipótesis nula postula que no hay diferencia del nivel de estrés entre los diferentes estratos de trabajadores del hospital, $H_o$: Médicos (M) = Enfermeras (E) = Administrativos (A) = Intendentes (I). De manera formal $H_0$: M = E = A = I. Por el contrario, la hipótesis alterna sostiene que sí hay diferencias entre los grupos de trabajo del hospital, $H_i$: M ≠ E ≠ A ≠ I.

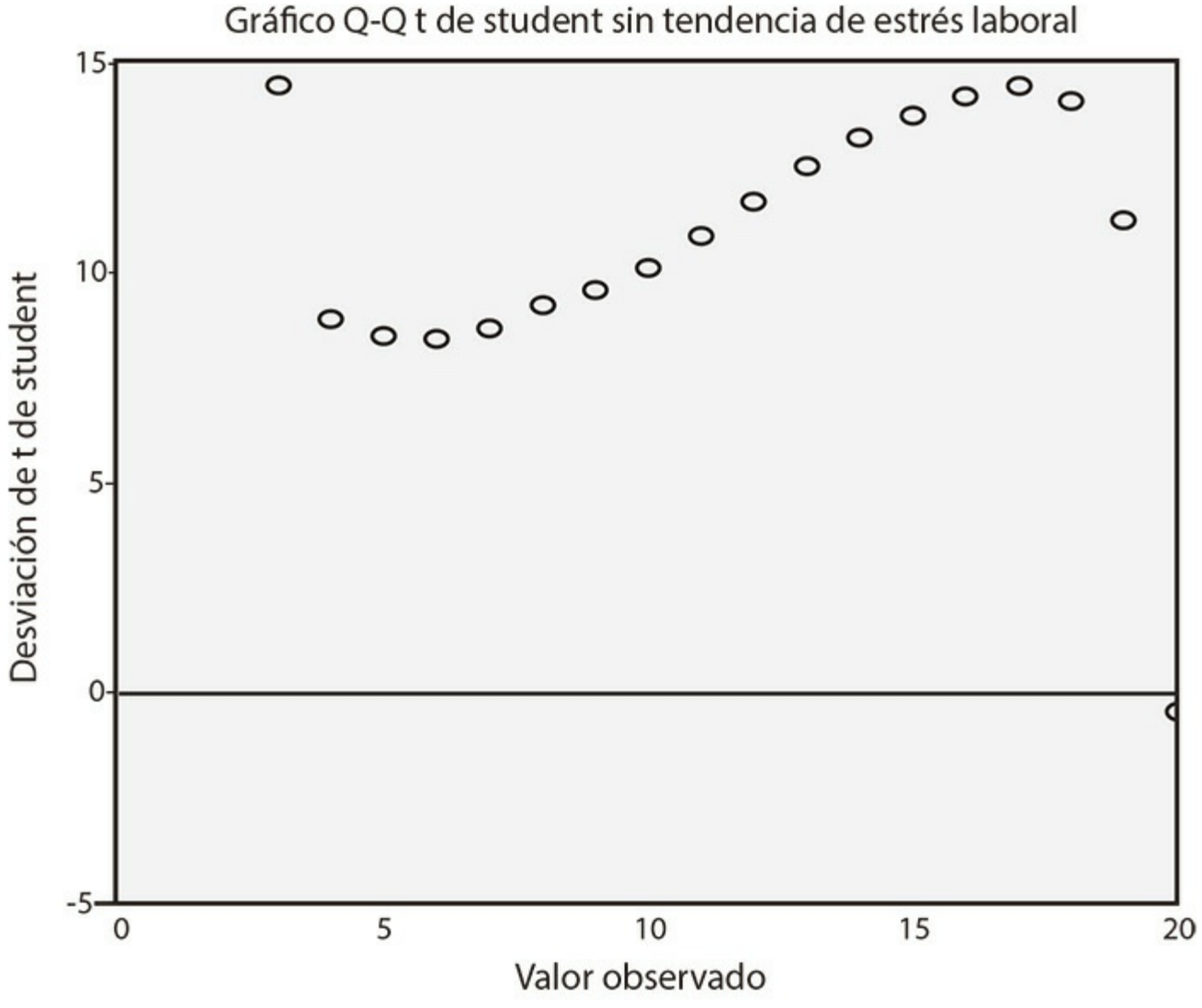



**Figura 4-7.** Comparación de las desviaciones de la distribución t de Student con los valores observados.

Enseguida, los PO determinan el nivel de significación (NS) y eligen el $\alpha = .05$ (alfa o nivel de significación). El NS puede ser interpretado como la cantidad de error que se puede aceptar al realizar la investigación; en otras palabras, el equipo de PO está dispuesto a aceptar que si hicieran 100 veces el estudio podrían equivocarse cinco veces o menos (.05). El NS de .05 se ha convertido en una convención cuando se trabaja en ambientes poco controlados, es decir, ambientes naturales como escenarios de trabajo, escuelas, hospitales. Sin embargo, hay circunstancias donde las exigencias en la precisión de los resultados son un requisito indispensable. En este caso, hay que pensar en NS más estrictos, como $\alpha = .01$, es decir, un error en 100. Otro caso es, por ejemplo, la aplicación de una vacuna y sus posibles efectos nocivos en la salud. En esta situación sería conveniente pensar en un NS muy exigente $\alpha = .0001$, un error en 10 000.

Por otro lado, es importante determinar los grados de libertad (gl). Desde el punto de vista técnico los gl son la libertad de variación en un conjunto de datos. Por ejemplo, si existen cinco puntajes de una prueba, cuatro son libres de variar, mientras que uno de ellos es fijo, es decir, una vez elegidos los cuatro primeros, el último no podrá variar, de ahí que $gl = n - 1$; para el caso, $gl = 5 - 1 = 4$. Se debe tener presente que cuando se realizan las pruebas de hipótesis, es importante conocer los gl, ya que se requieren para determinar el valor crítico, para aceptar o rechazar la $H_o$.

El valor crítico se obtiene de las tablas estadísticas, las cuales se encuentran al final del libro (Apéndice), y éste se contrasta con los valores obtenidos de las muestras. En muchos casos, dichos valores críticos son aproximados; no obstante, los programas estadísticos como el SPSS los proporcionan con precisión. Aunado a lo anterior está la regla de decisión, la cual, para la mayoría de las pruebas expresa si el valor obtenido de la prueba (de los datos empíricos) es mayor o igual que el de tablas (p. ej., $F_o \geq F_t$), entonces se rechaza $H_o$ y se acepta $H_i$. Es decir, se rechaza la igualdad entre los grupos y se acepta que son diferentes.

En el presente caso, los PO desarrollaron el análisis de varianza (ANOVA) obteniendo diferencias significativas. Las tablas 4-2 a 4-4 muestran el resumen de información del ANOVA.

La tabla 4-2 presenta los descriptivos de la muestra bajo estudio. En ésta se aprecia que los médicos presentan los mayores niveles de estrés; mientras que los intendentes registran menor estrés, y entre ambos grupos hay una diferencia de casi 10 puntos.

**Tabla 4-2. Descriptivos para la muestra de acuerdo con los estratos laborales**

| Estrés laboral | N | Media | Desviación típica |
|---|---|---|---|
| Médicos | 10 | 16.70 | 2.06 |
| Enfermeras | 10 | 11.60 | 2.32 |
| Administrativos | 10 | 9.00 | 1.76 |
| Intendentes | 10 | 6.60 | 2.88 |
| Total | 40 | 10.98 | 4.39 |

Como lo muestra la tabla 4-3, la prueba para corroborar la igualdad de varianzas no fue significativa ($p > .05$). En el caso de la tabla 4-4 se muestran las sumas de cuadrados, grados de libertad, medias cuadráticas, razón F (ANOVA) y valor de probabilidad (Sig.). Aunque aquí se presenta la tabla que proporciona toda la información del ANOVA, ésta

también se puede presentar de manera escrita. Por ejemplo, el análisis de varianza resultó significativo ($F_{(gl = 3.36)}$ = 35.71, $p < .000$), que es la manera más común de presentación e incluye el valor de la razón $F$, con sus respectivos grados de libertad y el valor de probabilidad $p$. De esta manera, el grupo de PO está casi listo para tomar decisiones.

**Tabla 4-3. Prueba de homogeneidad de varianzas de Levene para el ANOVA de estrés**

| Estadístico de Levene | gl1 | gl2 | Sig. |
|---|---|---|---|
| 1.91 | 3 | 36 | .14 |

**Tabla 4-4. ANOVA de un factor para diferencias de estrés y los estratos laborales**

| | Suma de cuadrados | gl | Media cuadrática | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Intergrupos | 562.08 | 3 | 187.36 | 35.71 | .000 |
| Intragrupos | 188.90 | 36 | 5.25 | | |
| Total | 750.98 | 39 | | | |

### Decisión de aceptación o rechazo de la $H_o$ (error de tipo I y II) e interpretación

Si bien en el apartado anterior ya se esbozó la toma de decisiones respecto a las posibles diferencias entre los grupos (estrés en relación con las categorías laborales), es conveniente tomar en consideración algunos aspectos que resultan importantes antes de redactar las conclusiones.

De manera formal, la hipótesis nula afirma que no hay diferencias entre los grupos y la alterna plantea que sí existen diferencias, esto es: $H_o$: M = E = A = I y $H_i$: M ≠ E ≠ A ≠ I, respectivamente (con un nivel de significación de .05), a = .05. El equipo PO decidió rechazar la $H_0$ debido a que el valor de $p < .000$, por lo que se apoya la $H_i$, lo cual indica que hay diferencias importantes de estrés entre los estratos laborales. Sin embargo, es importante recordar que la aceptación o rechazo de las hipótesis se relaciona con el número de observaciones realizadas o el tamaño de la muestra. En cualquier tabla de valores críticos para la prueba F, al igual que para otras pruebas, el valor de n cambia la posible aceptación del estadístico bajo análisis. Supóngase que el valor de F es 4.11 y se cuenta con cinco grupos, mientras que los grados de libertad son 4, ya que 5 – 1 = 4 grupos, se considera un a = .01 y la n = 40, el valor de tablas del ANOVA es de 3.83 ($F_o > F_t$), con lo cual se rechaza la $H_o$ para establecer diferencias; pero si n = 20, entonces la F de tablas cambia a 4.43, con lo cual se rechaza la hipótesis nula. Una estrategia que muchos han seguido es incrementar su tamaño de muestra para reducir la probabilidad de aceptación de que no haya diferencias, o adoptan NS más conservadores como .05 en lugar de .01.

Una situación como la anterior muestra que se puede incurrir en errores, a los cuales se les conoce como error tipo I y tipo II, y ambos casos se relacionan con la hipótesis nula. El error tipo I se refiere a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, esto es, que los promedios son diferentes cuando en realidad son iguales; y el error tipo II corresponde a la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, es decir, que los promedios no son diferentes cuando en realidad lo son.

Algunos autores sugieren que la mejor estrategia es no confiar en NS de .05 y .01, pues sólo se deben tomar como tentativos; asimismo, se recomienda confiar en NS más estrictos, por ejemplo .001 o más pequeños.

Una solución alternativa es la estimación de la potencia-eficiencia de la prueba, por medio de la cual se intenta construir procedimientos que son independientes del tamaño de la muestra (n), conocidos también como pruebas del tamaño del efecto y poder estadístico. Dicho desarrollo es más o menos reciente y rebasa los propósitos de este capítulo, por lo que se sugiere consultar a Cohen (1988) en caso de que exista interés en el tema.

Por lo anterior, el equipo de PO tiene como conclusiones primarias que el estrés es diferencial entre los estratos laborales del hospital. Por otra parte, existen argumentos de calidad para suponer que los resultados son confiables: la técnica de muestreo empleada, el cumplimiento de la mayoría de los supuestos para el análisis y la calidad de los instrumentos que se usaron.

# Aplicación: Los pasos de la inferencia estadística. Un ejemplo

Para concluir con el ejemplo, los PO decidieron probar si existía alguna diferencia respecto al estrés laboral entre hombres y mujeres, sin importar el estrato al cual pertenecieran los participantes. Entonces, decidieron seleccionar una muestra pequeña para el análisis. Como antecedente, no existen resultados concluyentes acerca de quién es más susceptible de estresarse, si los hombres o las mujeres. En concordancia con el marco teórico seleccionado, las respuestas de estrés tienen que ver con la manera de enfrentar las situaciones que el entorno plantea a los individuos y, desde esta perspectiva, no parece muy importante recurrir a variables atributivas para explicar el estrés. Y en el caso particular que se está describiendo, no existen razones para pensar que el género sea una variable importante en la determinación del estrés laboral, sin embargo, es necesario probar tal suposición.

En la tabla 4-5 está contenida la información para probar las hipótesis de $H_o$: H = M, $H_i$: H ≠ M. En este caso hay dos grupos independientes con pocos datos (menos de 30), y en esencia se puede suponer continuidad de la variable (estrés laboral). La muestra fue elegida al azar y se supone escala de intervalo, sólo resta probar el supuesto de normalidad. El candidato para analizar los datos es la prueba t de Student, por lo que se procede a graficar los datos mediante los gráficos Q-Q y probar que se ajustan a la distribución seleccionada.

**Tabla 4-5. Comparación por género**

| Participante | Hombre | Mujer |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 |
| 2 | 6 | 9 |
| 3 | 9 | 9 |
| 4 | 9 | 9 |
| 5 | 9 | 10 |
| 6 | 12 | 14 |
| 7 | 16 | 14 |
| 8 | 17 | 14 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 18 | 17 |
| 10 | | 18 |
| 11 | | 20 |

En primer lugar se desarrolla el histograma de los datos empíricos con la curva de distribución normal sobrepuesta (figura 4-8).

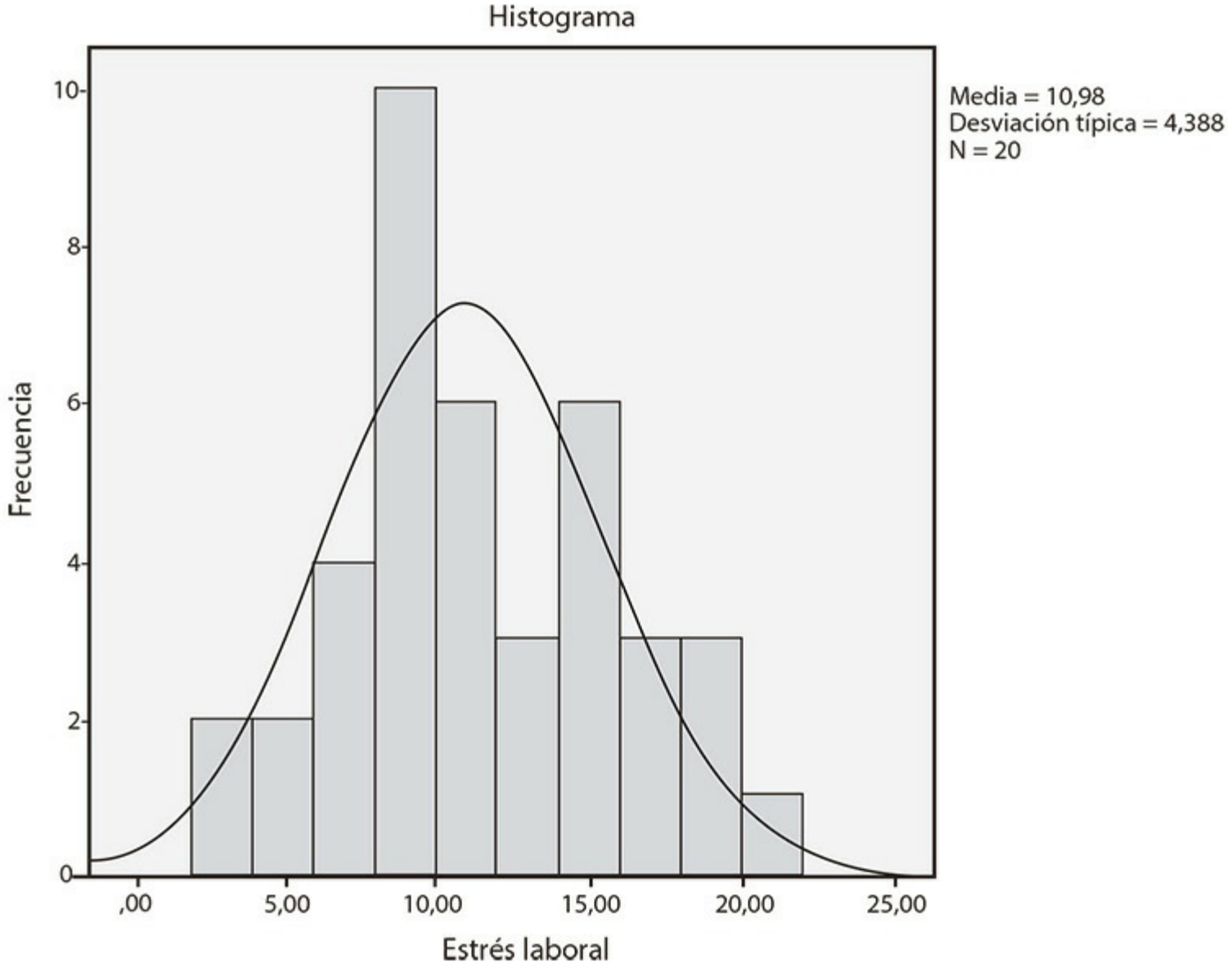



**Figura 4-8.** Distribución de las puntuaciones para la prueba de estrés laboral y curva normal.

La primera apreciación es que los datos presentan poca normalidad, por lo tanto, los siguientes gráficos tienden a verificar o rechazar este análisis inicial.

El gráfico Q-Q (figura 4-9) muestra que muy pocos datos caen sobre la línea recta, aunque un punto a favor es que

no se alejan demasiado de la misma, pues se encuentran bastante cercanos a ésta.

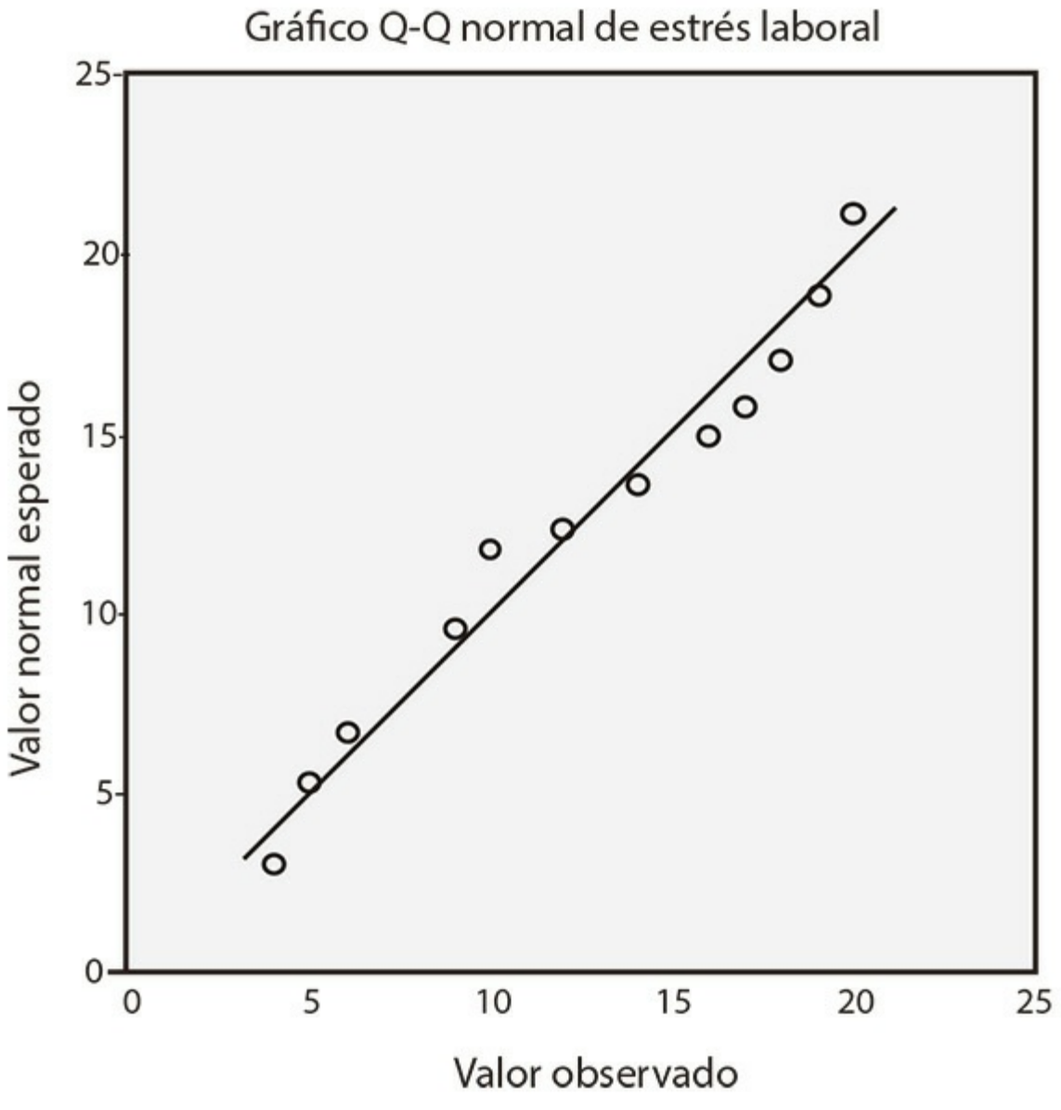



**Figura 4-9.** Gráfico para estrés laboral, género.

La figura 4-10, que es la de tendencias, muestra cierta regularidad en la forma de la distribución -nótese una curva suavizada que primero baja y luego tiende a subir de manera más o menos ordenada.

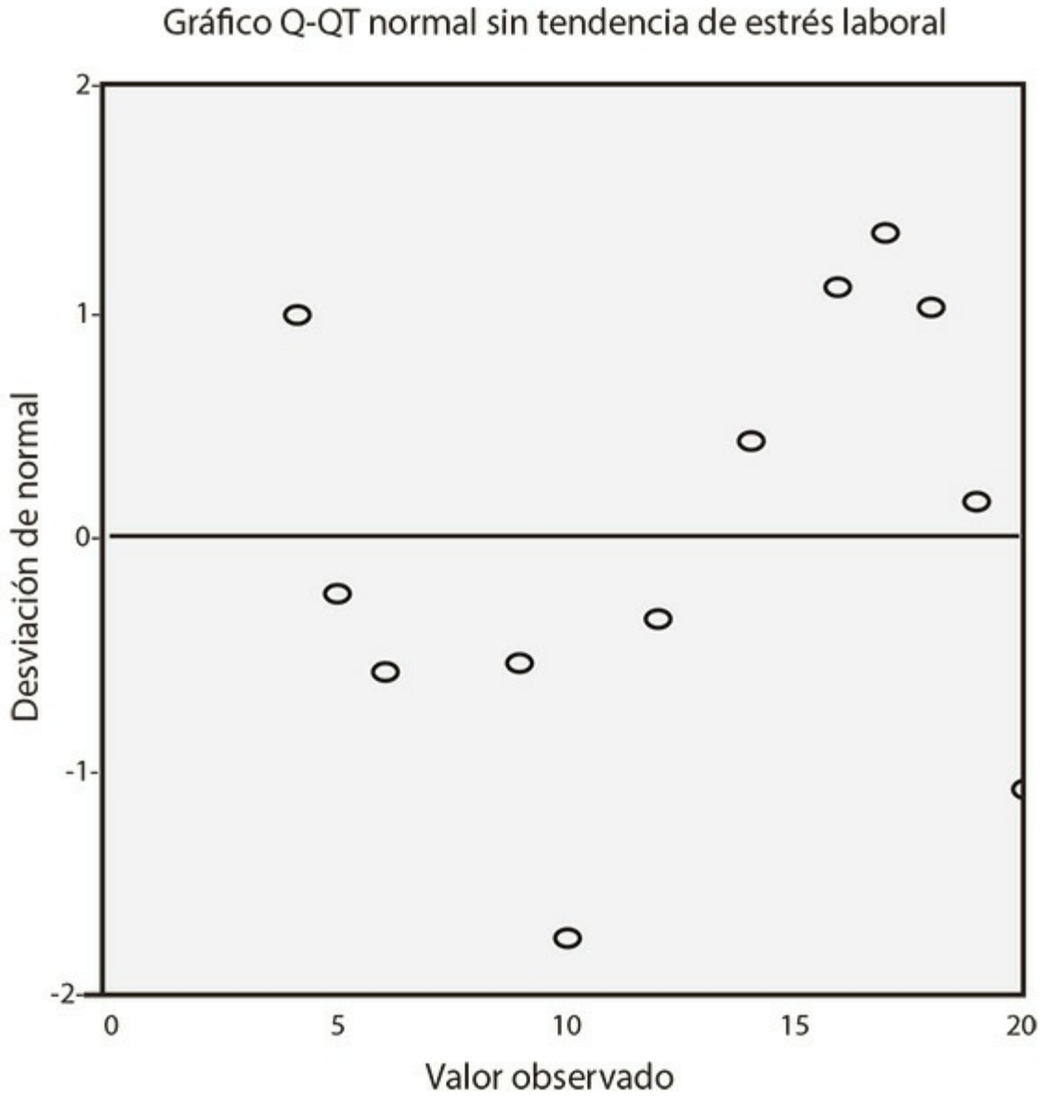



**Figura 4-10.** Gráfico Q-Q normal sin tendencia de estrés laboral, desviación de normal.

Como paso definitorio, se aplicaron las pruebas de Anderson-Darling y Levene para las hipótesis: $H_o$: los datos se distribuyen normalmente, $H_i$: los datos no se distribuyen normalmente. Para el primer caso, AD = 0.30, p = .55, a = .05. En concordancia con la regla de decisión, ya que AD < *p*, no es posible rechazar la hipótesis nula y, por lo tanto, aceptamos que los datos poseen normalidad.

El estadístico de Levene muestra algo similar: $L_{(gl = 1.18)} = .09$, p = .77, a = .05, con lo cual se rechaza la hipótesis alterna (de diferencias) y se acepta la de igualdad de varianzas ($H_0$), ya que la regla de decisión muestra que $L_o < L_t$.

Ahora, el equipo PO está listo para esbozar las primeras conclusiones: de acuerdo con lo requerido por la institución hospitalaria, se encontró que los niveles de estrés son diferentes dependiendo del tipo de trabajo desempeñado, lo que se puede notar en los estadísticos descriptivos (tabla 4-2) y confirmados por el análisis de varianza. En particular, los datos muestran que el grupo con niveles superiores de estrés laboral fue el de los médicos, seguido por el de enfermeras y el de personal administrativo; y el grupo que menos se estresa en el trabajo es el de personal de intendencia. Por otra parte, al margen del estrato laboral, los análisis mostraron que no existen diferencias

entre hombres y mujeres con respecto al estrés laboral (t= .496 (gl=18) p= .626), lo cual muestra, en conjunto, que los puestos de mayor responsabilidad están asociados con el estrés laboral.

Sin embargo, el total de los análisis aún no se ha realizado, falta determinar si la fatiga laboral y el afrontamiento juegan un papel importante en este caso.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**1.** Con base en el planteamiento del problema desarrollado en el capítulo 4, se realizaron los análisis correspondientes a fatiga laboral para los estratos de los trabajadores (médicos, enfermeras, administrativos e intendentes). La tabla 4-1 muestra los datos para la Escala de Fatiga laboral. Realice los pasos de la inferencia estadística.

**a)** Selección de la prueba, comprobación de supuestos.

**b)** Hipótesis estadísticas, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico.

**c)** Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$ e interpretación.

**Tabla 4-1. Puntajes de fatiga laboral por estrato laboral**

| Participantes | Médicos | Enfermeras | Administrativos | Intendentes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 19 | 14 | 14 | 9 |
| 2 | 23 | 19 | 13 | 10 |
| 3 | 21 | 18 | 14 | 11 |
| 4 | 25 | 17 | 10 | 8 |
| 5 | 24 | 20 | 14 | 12 |
| 6 | 19 | 19 | 12 | 8 |
| 7 | 21 | 16 | 15 | 14 |
| 8 | 22 | 14 | 16 | 15 |
| 9 | 19 | 15 | 14 | 16 |
| 10 | 23 | 14 | 17 | 13 |

**2.** Considere la información del ejercicio 1 para responder las siguientes preguntas:

**a)** La prueba estadística pertinente para dicho estudio es:

**i)** t de Student relacionada
**ii)** t de Student no relacionada
**iii)** ANOVA
**iv)** Pearson

**b)** De acuerdo con la naturaleza de la investigación, ésta podría definirse como:
**i)** Investigación de tipo exploratorio
**ii)** Investigación de tipo descriptivo
**iii)** Investigación de tipo correlacional
**iv)** Investigación de tipo comparativo

**c)** En caso de que sólo se buscara comparar el nivel de fatiga laboral entre médicos y enfermeras, la prueba estadística correspondiente sería:
**i)** t de Student relacionada
**ii)** t de Student no relacionada
**iii)** ANOVA
**iv)** Pearson

**3.** A partir del planteamiento del problema desarrollado en el capítulo 4, realice los análisis correspondientes para la Escala de Afrontamiento para los diferentes estratos de los trabajadores del hospital (médicos, enfermeras, administrativos e intendentes).

La tabla 4-2 muestra los datos para la Escala de Afrontamiento. Realice los pasos de la inferencia estadística.

**a)** Selección de la prueba, comprobación de supuestos.
**b)** Hipótesis estadísticas, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico.
**c)** Decisión de aceptación o rechazo de la $H_o$ e interpretación.

**Tabla 4-2. Puntajes de Afrontamiento por estrato laboral**

| Participantes | Médicos | Enfermeras | Administrativos | Intendentes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 24 | 8 |
| 2 | 17 | 19 | 21 | 8 |
| 3 | 19 | 13 | 23 | 9 |
| 4 | 14 | 14 | 21 | 10 |
| 5 | 14 | 10 | 25 | 11 |
| 6 | 18 | 12 | 19 | 12 |
| 7 | 20 | 16 | 22 | 14 |
| 8 | 19 | 14 | 19 | 15 |
| 9 | 16 | 15 | 14 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 23 | 14 | 17 | 13 |

**4.** Responda las siguientes preguntas con base en la información del ejercicio 3:

**a)** Suponga que únicamente se busca comparar la escala de afrontamiento entre administrativos e intendentes, la prueba estadística correspondiente sería:

**i)** t de Student relacionada
**ii)** t de Student no relacionada
**iii)** ANOVA
**iv)** Pearson

**b)** La escala de medición de los datos del ejercicio 3 es:

**i)** Intervalar
**ii)** Nominal
**iii)** Razón
**iv)** Ordinal

**5.** Un investigador quiere saber si existen diferencias en cuanto a la violencia de pareja entre hombres y mujeres (elegidos al azar) de la licenciatura en Ingeniería civil, para lo cual aplica la Escala de violencia e índice de severidad (ISVP), la cual se encuentra estandarizada en población mexicana. Si existieron pruebas de la normalidad de la variable a evaluar ¿Qué prueba estadística es la adecuada para el análisis de los datos?

**a)** Friedman.
**b)** t de Student.

**6.** Un investigador desea comparar el tiempo que las personas de tres grupos distintos diferenciados por su etapa de desarrollo (adultez temprana, adultez, vejez), pueden mantener la atención. Para ello, durante una serie de tareas se mide el tiempo de éstas hacia una actividad. Los datos no presentan normalidad y no hay homogeneidad de varianzas. La prueba estadística que se debe seleccionar para el análisis de los datos es:

**a)** Paramétrica.
**b)** t de Student.
**c)** No paramétrica.
**d)** Kruskal-Wallis.

**7.** Elija la respuesta correcta.

**a)** Es importante conocer a toda la población en cuanto a las características que se desea medir; sin embargo, esto resulta muy complicado por la inversión económica que conlleva, por lo que sólo se elige una parte pequeña de tal población (muestra) y se infiere que los valores encontrados en la muestra están muy cercanos a los reales. Por lo tanto, se considera de suma relevancia al supuesto:

**i)** Número de grupos a comparar.
**ii)** Participantes elegidos al azar de una población definida (muestreo al azar).
**iii)** Los grupos son independientes o relacionados.
**iv)** Homogeneidad de varianzas.

**b)** Cuando en la muestra se menciona que un grupo de sujetos es mutuamente excluyente, o cuando los mismos individuos son medidos en dos momentos diferentes, ¿a qué supuesto de la prueba se hace referencia?

**i)** Participantes elegidos al azar de una población definida (muestreo al azar).
**ii)** Número de grupos a comparar.
**iii)** Si los grupos son independientes o relacionados.

**iv)** Normalidad de los datos.

**c)** Cuando en una investigación se menciona que la distribución de los datos es comparable con la curva normal, ¿a qué supuesto de la prueba se hace referencia?

**i)** Participantes elegidos al azar de una población definida (muestreo al azar).

**ii)** Número de grupos a comparar.

**iii)** La escala de medida en que están los datos.

**iv)** Normalidad de los datos.

**d)** Se considera que la normalidad de los datos es de suma importancia para determinar la prueba estadística, ¿qué prueba puede realizarse para verificar este supuesto?

**i)** Prueba de Levene.

**ii)** Kruskal-Wallis.

**iii)** Prueba de Anderson-Darling (AD).

**iv)** Pruebas no paramétricas.

**e)** ¿Qué prueba puede realizarse para probar la homogeneidad de las varianzas? Considere que este supuesto es de gran relevancia para determinar la prueba estadística.

**i)** Prueba paramétricas.

**ii)** Prueba T de Wilcoxon.

**iii)** Prueba de Anderson-Darling (AD).

**iv)** Prueba de Levene.

**8.** Se puede interpretar como la cantidad de error que es posible aceptar al realizar la investigación:

**a)** Prueba de Levene.

**b)** Nivel de significancia (NS).

**c)** Grados de libertad (gl).

**d)** Hipótesis nula.

**9.** Representan la libertad de variación en un conjunto de datos:

**a)** Prueba de Anderson-Darling (AD).

**b)** Nivel de significancia (NS).

**c)** Grados de libertad (gl).

**d)** Hipótesis nula.

**10.** Es el valor que se contrasta con los valores obtenidos de las muestras, aunque dichos valores son aproximados:

**a)** Prueba de Anderson-Darling (AD).

**b)** Nivel de significancia (NS).

**c)** Grados de libertad (gl).

**d)** Valor crítico o tablas.

**11.** Se refiere a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, esto es, que los promedios son diferentes cuando en realidad son iguales:

**a)** Error tipo I.

**b)** Nivel de significancia (NS).

**c)** Error tipo II.

**d)** Grados de libertad (gl).

**12.** Es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, es decir, que los promedios no son diferentes cuando en realidad lo son:

**a)** Error tipo I.
**b)** Nivel de significancia (NS).
**c)** Error tipo II.
**d)** Grados de libertad (gl).

# Ejercicios voluntarios

**1.** Si al realizar una investigación comparando tres grupos se obtiene un nivel de significancia de 0.001 significa que:
**a)** Se acepta la hipótesis de investigación, puesto que existen diferencias significativas.
**b)** Se acepta la hipótesis nula, puesto que no existen diferencias significativas.
**2.** Si el tamaño de la muestra es muy pequeño, ¿qué tipo de prueba se debe aplicar?
**a)** Paramétrica.
**b)** No paramétrica.
**3.** Son las pruebas que se basan en la realización de cálculos numéricos y se utilizan datos con un nivel de medición de intervalo:
**a)** No paramétricas.
**b)** Paramétricas.
**4.** Son pruebas similares, ya que verifican diferencias entre dos condiciones experimentales:
**a)** No paramétricas y paramétricas.
**b)** Kruskal y Prueba t.
**5.** Son pruebas similares, ya que distinguen entre diseños relacionados e independientes:
**a)** ANOVA y T de Wilcoxon.
**b)** Paramétricas y no paramétricas.
**6.** Método que trata datos categóricos, es decir, con una escala nominal:
**a)** Pruebas no paramétricas.
**b)** Pruebas paramétricas.

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

**Ejercicio 1**

**a) Selección de la prueba, comprobación de supuestos.**

La escala de medición de las variables es intervalar. Por medio de los siguientes gráficos se comprueba la normalidad de la distribución de la variable Fatiga laboral. La distribución es normal. Lo mismo muestra la prueba L, es decir, hay homogeneidad de varianzas ($Levene_{(gl.\ 3.36)} = 1.341$, $p = .27$ y $\alpha = .05$). Por lo tanto, se puede utilizar un ANOVA.

**b) Hipótesis estadísticas, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico.**

La hipótesis nula postula, entonces, que no hay diferencia de fatiga laboral entre los diferentes estratos de trabajadores del hospital, $H_o$: Médicos (M) = Enfermeras (E) = Administrativos (A) = Intendentes (I). De manera formal, $H_0$: M = E = A = I. Por el contrario, la hipótesis alterna sostiene que sí hay diferencias entre los grupos de trabajo del hospital $H_i$: M ≠ E ≠ A ≠ I.

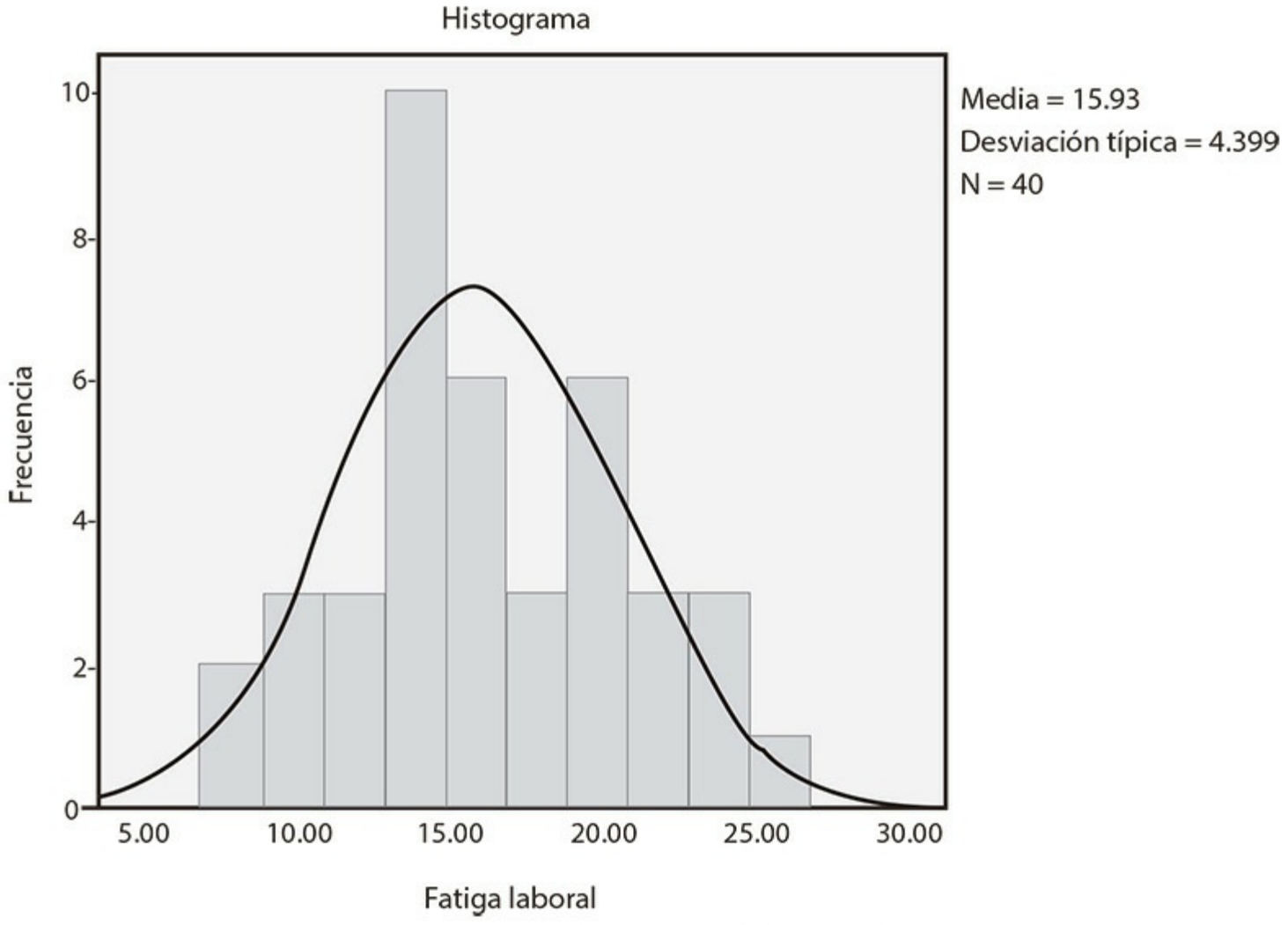



**Figura 4-1.** Histograma de fatiga laboral.

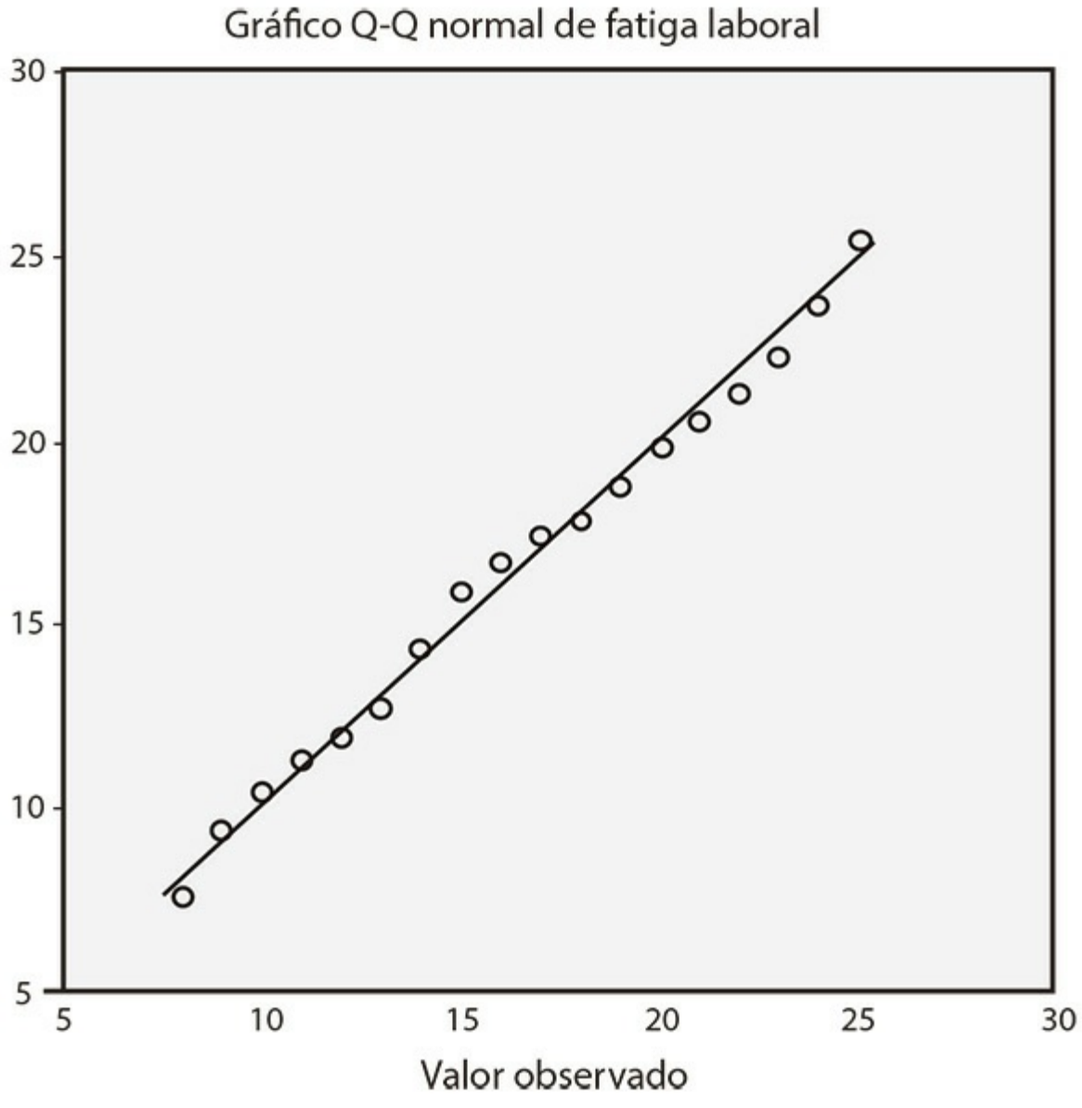



**Figura 4-2.** Gráfico Q-Q normal de fatiga laboral.

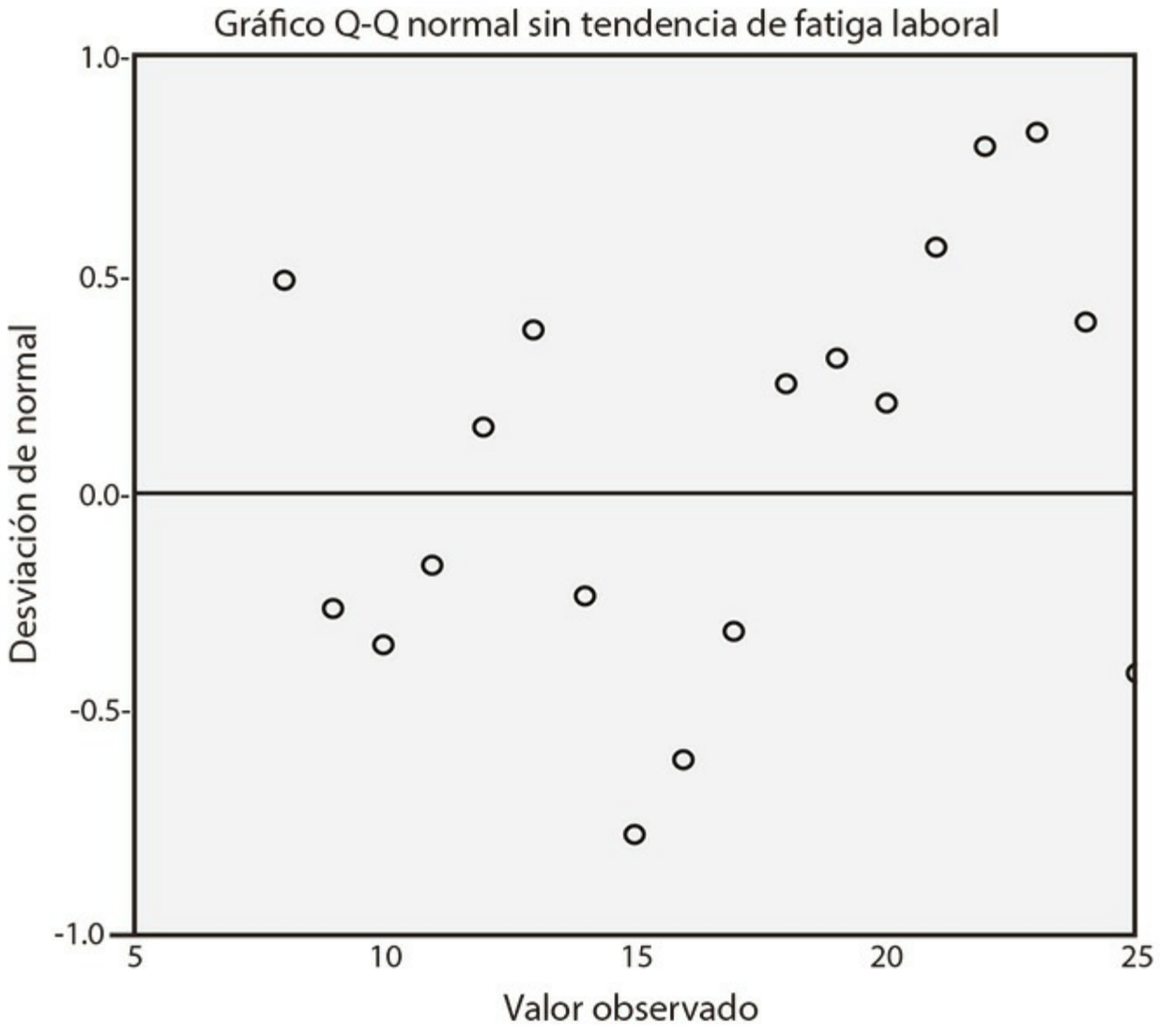



**Figura 4-3.** Gráfico Q-Q normal de fatiga laboral.

El a = .05 (alfa o nivel de significación). Y el valor de los grados de libertad es igual a 4, ya que gl = n - 1 = 5 – 1 = 4; mientras que el valor crítico es 2.86.

**Tabla 4-3. ANOVA de un factor Fatiga laboral**

| | Suma de cuadrados | gl | Media cuadrática | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Intergrupos | 554.675 | 3 | 184.892 | 33.264 | .000 |
| Intragrupos | 200.100 | 36 | 5.558 | | |
| Total | 754.775 | 39 | | | |

**c) Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$ e interpretación.**

Por lo anterior, el equipo de PO tiene como conclusiones primarias que el afrontamiento es diferencial entre los estratos laborales del hospital. Por otra parte, existen argumentos de calidad para suponer que los resultados son confiables: la técnica de muestreo empleada, el cumplimiento de la mayoría de los supuestos para el análisis y la calidad de los instrumentos que se usaron. Así:

$$(F_{(\text{gl.} = 3.36)} = 33.264, p < .000)$$

**Ejercicio 2**

**a)** La prueba estadística pertinente para dicho estudio es: iii) ANOVA.

**b)** De acuerdo con la naturaleza de la investigación, ésta podría definirse como: iv) Investigación de tipo comparativo.

**c)** En caso de que sólo se buscara comparar el nivel de Fatiga laboral entre médicos y enfermeras, la prueba estadística correspondiente sería: ii) T de Student no relacionada.

**Ejercicio 3**

**a)** Selección de la prueba, comprobación de supuestos.

La escala de medición de las variables es intervalar. Con los siguientes gráficos se comprobó la normalidad de la distribución de la variable Escala de Afrontamiento. La distribución es normal. Lo mismo muestra la prueba L, es decir, hay homogeneidad de varianzas ($\text{Levene}_{(\text{gl. } 3.36)} = 1.341$, $p = .27$ y $\alpha = .05$). Por lo que se puede utilizar un ANOVA.

**Tabla 4-4. ANOVA de un factor, afrontamiento**

| | Suma de cuadrados | gl | Media cuadrática | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Intergrupos | 454.475 | 3 | 151.492 | 18.161 | .000 |
| Intragrupos | 300.300 | 36 | 8.342 | | |
| Total | 754.775 | 39 | | | |

**b)** Hipótesis estadísticas, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico.

La hipótesis nula postula, entonces, que no hay diferencia de afrontamiento entre los diferentes estratos de trabajadores del hospital, $H_o$; Médicos (M) = Enfermeras (E) = Administrativos (A) = Intendentes (I). De manera formal, $H_0$: M = E = A = I. Por el contrario, la hipótesis alterna sostiene que sí hay diferencias entre los grupos de trabajo del hospital, $H_i$: $M \neq E \neq A \neq I$.

El $\alpha = .05$ (alfa o nivel de significación). Y el valor de los grados de libertad es igual a 4, ya que gl = n –1 = 5 – 1 = 4; mientras que el valor crítico es 2.86.

**c)** Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$ e interpretación

Por lo anterior, el equipo de PO tiene como conclusiones primarias que el Afrontamiento es diferencial entre los estratos laborales del hospital. Por otra parte, existen argumentos de calidad para suponer que los resultados son confiables: la técnica de muestreo empleada, el cumplimiento de la mayoría de los supuestos para el análisis y la calidad de los instrumentos que se usaron. Así:

($F_{(gl. = 3.36)} = 18.161$, $p < .000$)

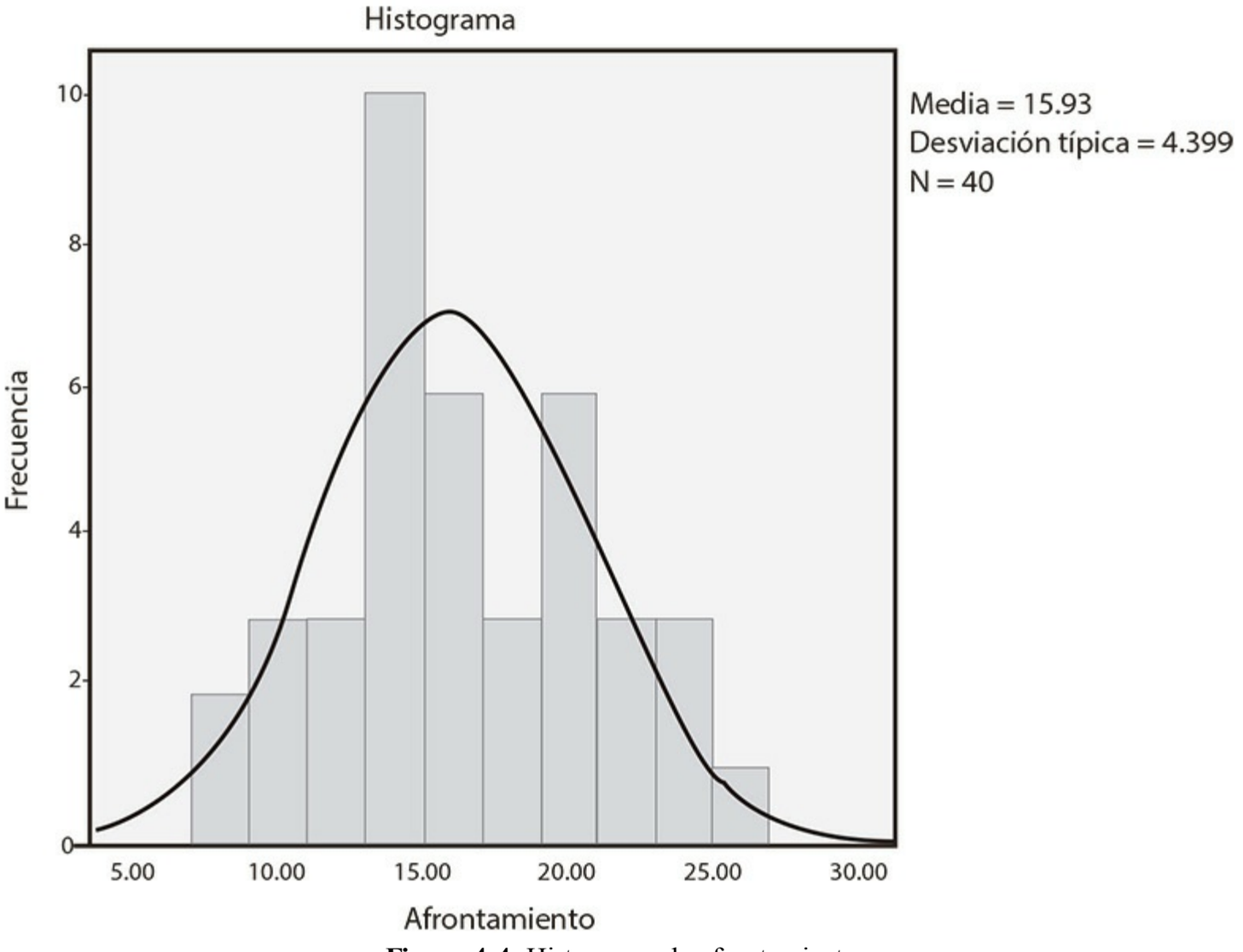



**Figura 4-4.** Histograma de afrontamiento.

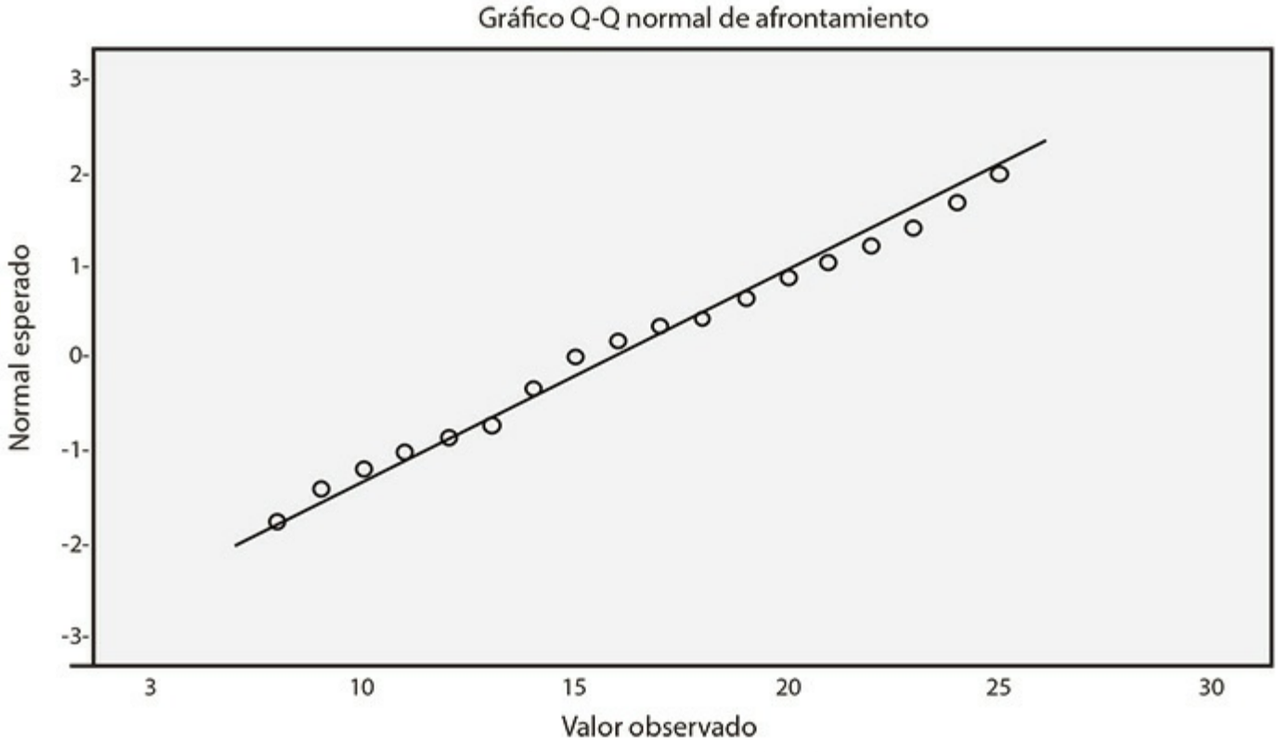



**Figura 4-5.** Gráfico Q-Q normal de afrontamiento.

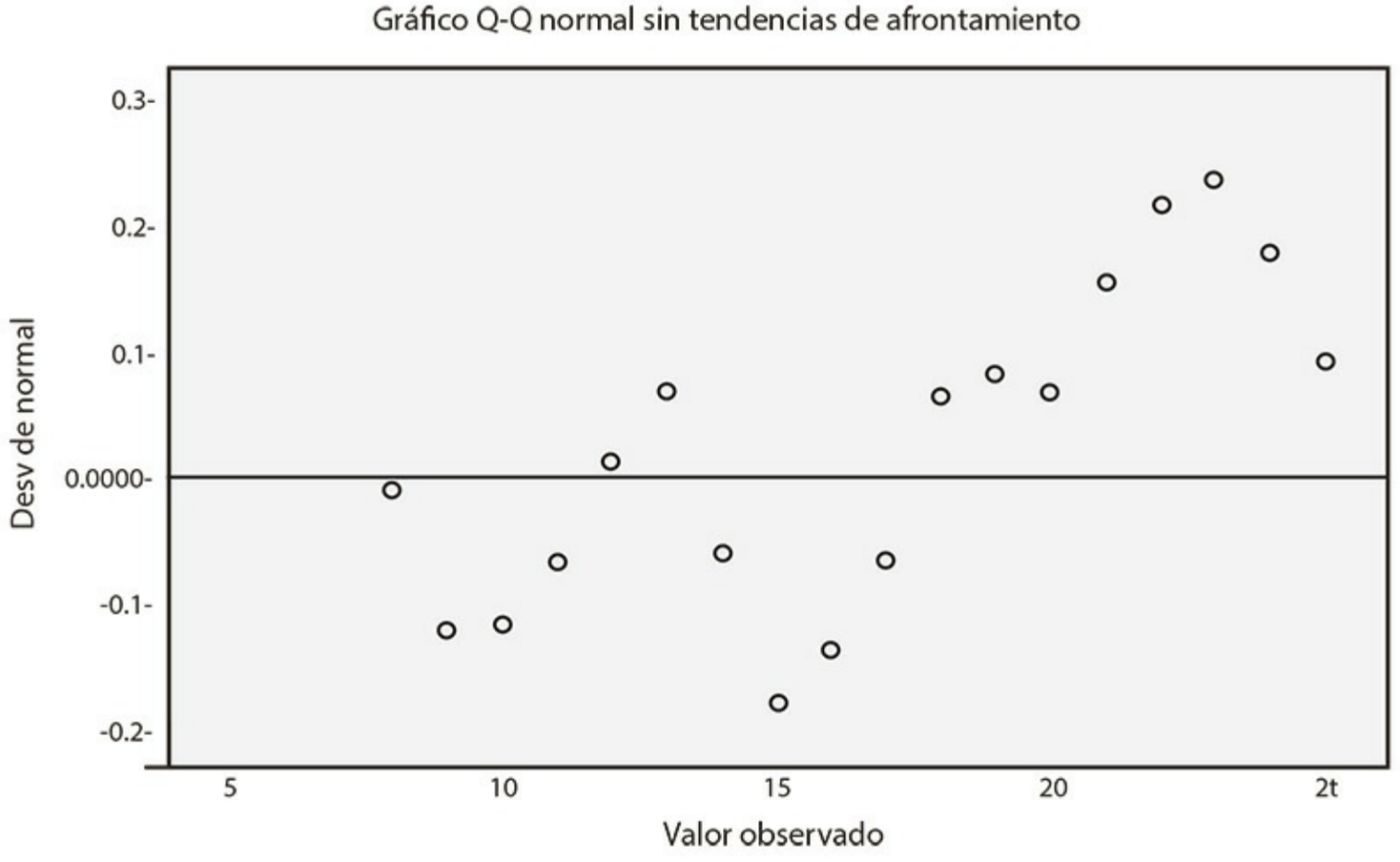



**Figura 4-6.** Gráfico Q-Q normal sin tendencias de afrontamiento.

**Ejercicio 4**

**a)** Suponga que únicamente se busca comparar la Escala de Afrontamiento entre administrativos e intendentes, la prueba estadística correspondiente sería: ii) t de Student no relacionada.

**b)** Debido a las propiedades de sus datos, la prueba estadística anteriormente seleccionada es: i) Paramétrica.

**c)** La escala de medición de los datos del ejercicio 3 es: i) Intervalar.

**Ejercicio 5**

**d)** t de Student.

**Ejercicio 6**

**c)** No paramétrica.

**Ejercicio 7**

**a)** R = ii) Participantes elegidos al azar de una población definida (muestreo al azar).

**b)** R = iii) Si los grupos son independientes o relacionados.

**c)** R = iv) Normalidad de los datos.

**d)** R = iii) Prueba de Anderson-Darling (AD).

**e)** R = iv) Prueba de Levene

**Ejercicio 8**
Se puede interpretar como la cantidad de error que es posible aceptar al realizar la investigación: b) Nivel de significancia (NS).

**Ejercicio 9**
Representan la libertad de variación en un conjunto de datos: c) Grados de libertad (gl).

**Ejercicio 10**
Es el valor que se contrasta con los valores obtenidos de las muestras, aunque dichos valores son aproximados: d) Valor crítico o tablas.

**Ejercicio 11**
Se refiere a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, esto es, que los promedios son diferentes cuando en realidad son iguales: a) Error tipo I.

**Ejercicio 12**
Es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, es decir, que los promedios no son diferentes cuando en realidad lo son: c) Error tipo II.

## Solución a los ejercicios voluntarios

**1.** a) Se acepta la hipótesis de investigación, puesto que existen diferencias significativas.
**2.** b) No paramétrica.
**3.** b) Paramétricas.
**4.** a) No paramétricas y paramétricas.
**5.** b) Paramétricas y no paramétricas.
**6.** a) Pruebas no paramétricas.

# GLOSARIO

**Análisis de varianza (ANOVA):** técnica estadística que es utilizada para determinar posibles diferencias entre más de dos grupos, las cuales pueden deberse a la aplicación de algún tratamiento experimental o existen porque de inicio los grupos pertenecen a poblaciones diferentes. El análisis de varianza es una técnica poderosa, ya que puede ajustarse a una gran diversidad de diseños y convertirse en ANOVA de dos vías, multivariado, para medidas repetidas, entre otros.

**Homogeneidad de varianzas (homocedasticidad):** se refiere a que las varianzas de los tratamientos o grupos sean iguales. Es un supuesto muy importante para las pruebas paramétricas y existen diversos métodos para su comprobación.

**Muestra:** es un subconjunto de la población. Lo más característico de una muestra es la manera en que se elige (de forma aleatoria, por estratos, intencional, entre otras), y que de ello depende la generalización de los hallazgos a la población o que sólo sean válidos para la muestra en estudio.

**Normalidad de los datos o de la variable:** es cuando la o las variables en estudio tienden a comportarse de acuerdo

con el modelo de distribución normal. Para evaluar la normalidad de un grupo de datos es necesario recurrir a procedimientos gráficos y pruebas específicas de normalidad.

**Población:** se define como la colección de elementos que comparten una o más características. Los elementos pueden ser personas, productos de una empresa, plantas, animales, entre otros, y siempre es conveniente tener claras sus características. En muchas ocasiones, cuando se señalan criterios de exclusión, lo que se hace es clarificar la definición de la población bajo análisis.

**Prueba t de Student:** prueba paramétrica muy semejante al ANOVA, con la diferencia de que se emplea cuando sólo hay dos grupos y pocas observaciones (menos de 30). Aunque la versión más conocida es para grupos independientes, también se puede utilizar para grupos relacionados, al igual que cuando difiere el tamaño de estos.

# BIBLIOGRAFÍA


Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Nueva York: LEA.

Elorza, H. (2008). *Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud*. México: Cengage Learning.

Kerlinger, F.N. y Lee, H.B. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales.* México: McGraw-Hill.

Lazarus, R.S. y Folkman, S. (1991). *Estrés y procesos cognitivos*. Barcelona: Martínez Roca.

Moreno, M., Ríos, M., Canto, J., San Martín, J. y Perles, F. (2010). Satisfacción laboral y *burnout* en trabajos poco cualificados: diferencias entre sexos en población inmigrante. *Revista de Psicología del Trabajo y de las Organizaciones*, 26(3), 225-265.

Muchinsky, P. (2007). *Psicología aplicada al trabajo*, 6a ed. México: Thomson Learning.

Ojeda, R.M. y Díaz, C.J. (2012). *Introducción a las técnicas de muestreo. Un enfoque metodológico para aplicaciones a encuestas*. EUA: EAE.

Juárez, F., Villatoro, J.A. y López, E.K. (2002). *Apuntes de estadística inferencial*. México: Instituto Nacional de Psiquiatría Ramón de la Fuente.

# Capítulo 5

# RELACIÓN ENTRE VARIABLES: DOS CUANTITATIVAS (Correlación de Pearson)

*Oscar Armando Esparza Del Villar, Juan Quiñones Soto, Priscila Montañez Alvarado*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo, el lector aprenderá a medir la relación entre dos variables cuantitativas utilizando la correlación producto momento de Pearson. De manera específica, el lector estimará los parámetros y contrastará la hipótesis poniendo en práctica los pasos de la inferencia estadística, hasta calcular los estadísticos e interpretarlos con el fin de rechazar o sostener la hipótesis nula.

## INTRODUCCIÓN

La **correlación** es una técnica estadística que se usa para medir y describir la relación entre dos variables. Las dos variables que se analizan son dependientes, debido a que sólo se miden y no se manipulan. En el diseño experimental la variable independiente es aquella que el investigador manipula; sin embargo, en la correlación, por lo general el investigador no manipula las variables, simplemente las mide tal y como se encuentran en el ambiente. Además, en una correlación se miden estas dos variables y se determina si existe una relación entre ellas.

Por ejemplo, un investigador quiere analizar si existe una relación entre las calificaciones obtenidas en la escuela y el ingreso económico mensual de la familia. El procedimiento consistiría en: pedir permiso a la escuela para acceder a las calificaciones de los estudiantes y después visitar a las familias de los estudiantes para preguntarles acerca de su ingreso económico mensual.

En este ejemplo el investigador no está manipulando ninguna variable, sólo las mide. Esto quiere decir que el investigador no hace que unas familias tengan más ingresos que otras dándoles más dinero cada mes, por ejemplo, simple y sencillamente las visita para preguntarles cuánto dinero obtienen según todos sus miembros. Para determinar la correlación se medirían dos variables en cada participante del estudio, las que comúnmente se identifican como X y Y, y que en el ejemplo corresponden a las calificaciones y al ingreso económico mensual. Los dos puntajes de cada participante se encuentran en la tabla 5-1 y están representados en la figura 5-1.

| Tabla 5-1. Ingreso familiar y el promedio de las calificaciones en una muestra de 10 estudiantes | | |
|---|---|---|
| **Participante** | **Ingreso familiar (miles de pesos)** | **Promedio de calificaciones** |
| A | 3.2 | 7.3 |
| B | 4.3 | 8.0 |
| C | 4.7 | 7.8 |
| D | 5.7 | 8.2 |
| E | 5.9 | 9.3 |
| F | 6.7 | 9.1 |
| G | 7.1 | 9.5 |
| H | 9.3 | 9.4 |
| I | 10.6 | 9.7 |
| J | 13.7 | 9.9 |

En la figura 5-1 los valores de la variable X se encuentran en el eje horizontal y los de la variable Y se encuentran en el eje vertical.

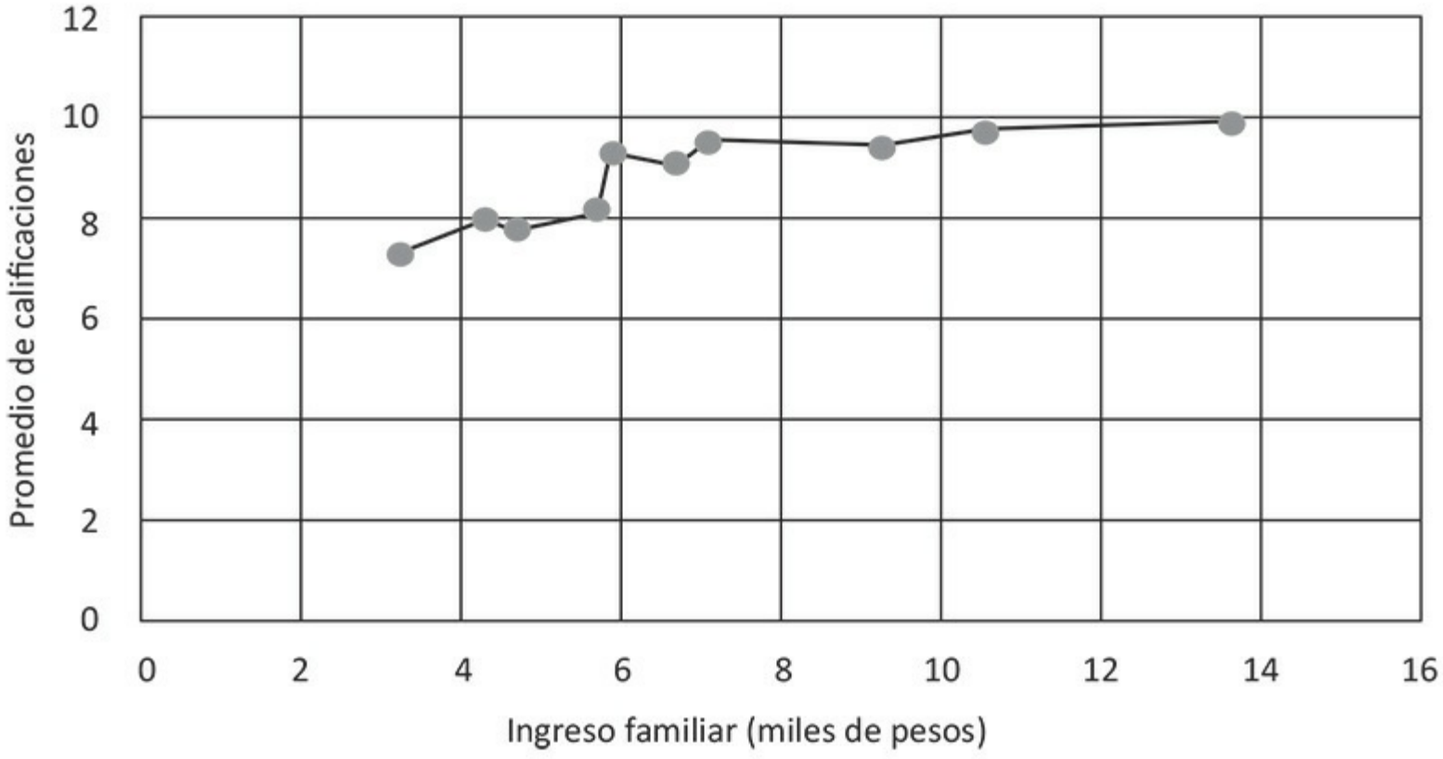



**Figura 5-1.** Asociación entre ingreso familiar (X) y el promedio de las calificaciones (Y) en una muestra de 10 estudiantes.

Cada punto en la gráfica representa los valores en cada una de las variables. Por medio de las gráficas podemos identificar patrones de la relación entre las dos variables, tal como se observa en la gráfica de este ejemplo, que muestra una tendencia en la cual aquellas personas con mayor ingreso económico familiar tienden a obtener mayores calificaciones, o dicho de otra manera, aquellas personas con menor ingreso económico familiar tienden a sacar menores calificaciones.

# CARACTERÍSTICAS DE UNA CORRELACIÓN

La correlación es un valor numérico que describe y mide tres características de la relación entre dos variables: dirección, forma y fuerza o consistencia. Estas características se explican a continuación.

## Dirección de la correlación

La dirección de la correlación es indicada por el signo, que puede ser positivo o negativo. Cuando se encuentra una **correlación positiva** las dos variables cambian en la misma dirección. Esto quiere decir que si la variable X incrementa de un individuo a otro, también la variable Y tenderá a incrementar; asimismo, si la variable X disminuye de un individuo a otro, la variable Y tenderá a disminuir. En cambio, cuando se encuentra una **correlación negativa** las dos variables actúan en dirección opuesta. Lo cual significa que si la variable X incrementa, la variable Y

disminuirá; o si la variable X disminuye, la variable Y aumentará, es decir, la relación es inversa entre las dos variables. En las figuras 5-2 y 5-3 se presentan ejemplos de cada correlación.

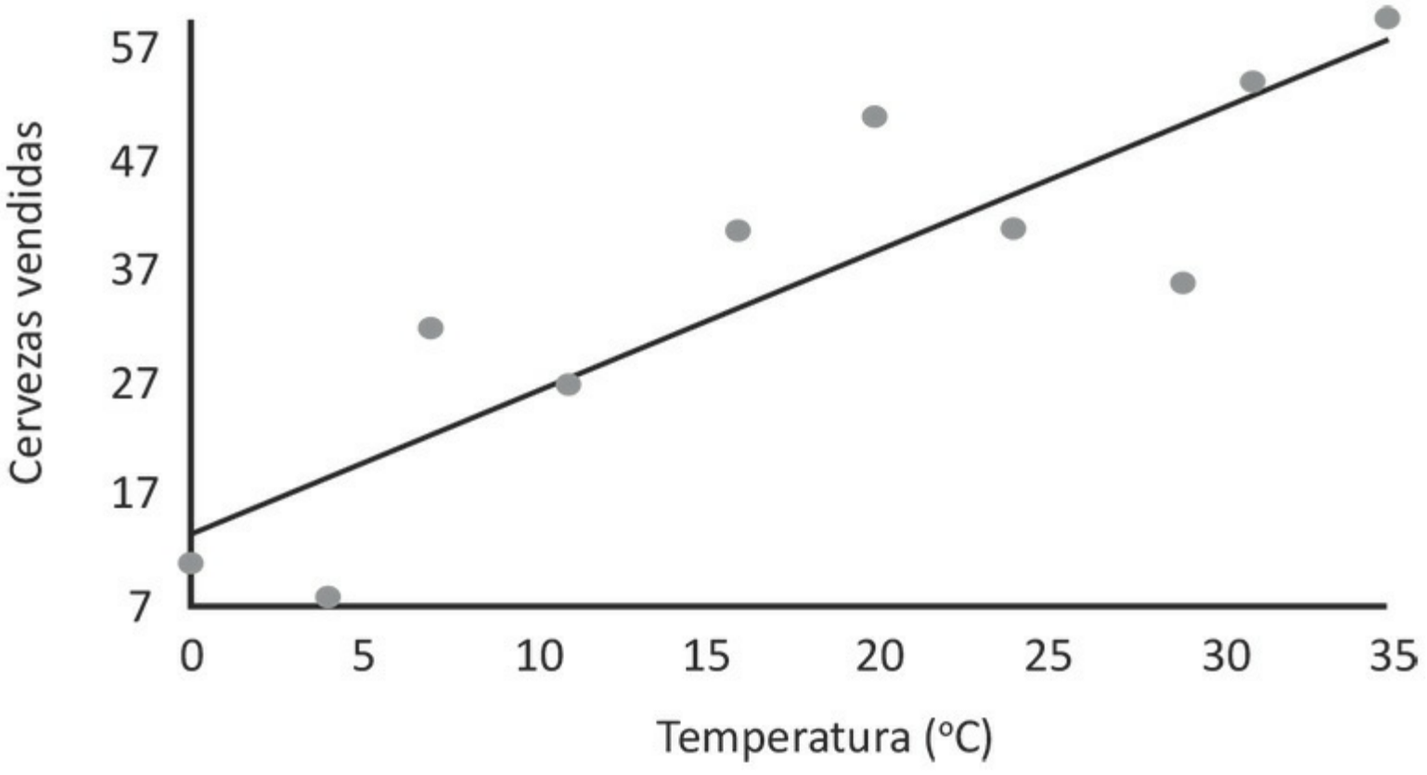



**Figura 5-2.** Ejemplo de correlación positiva.

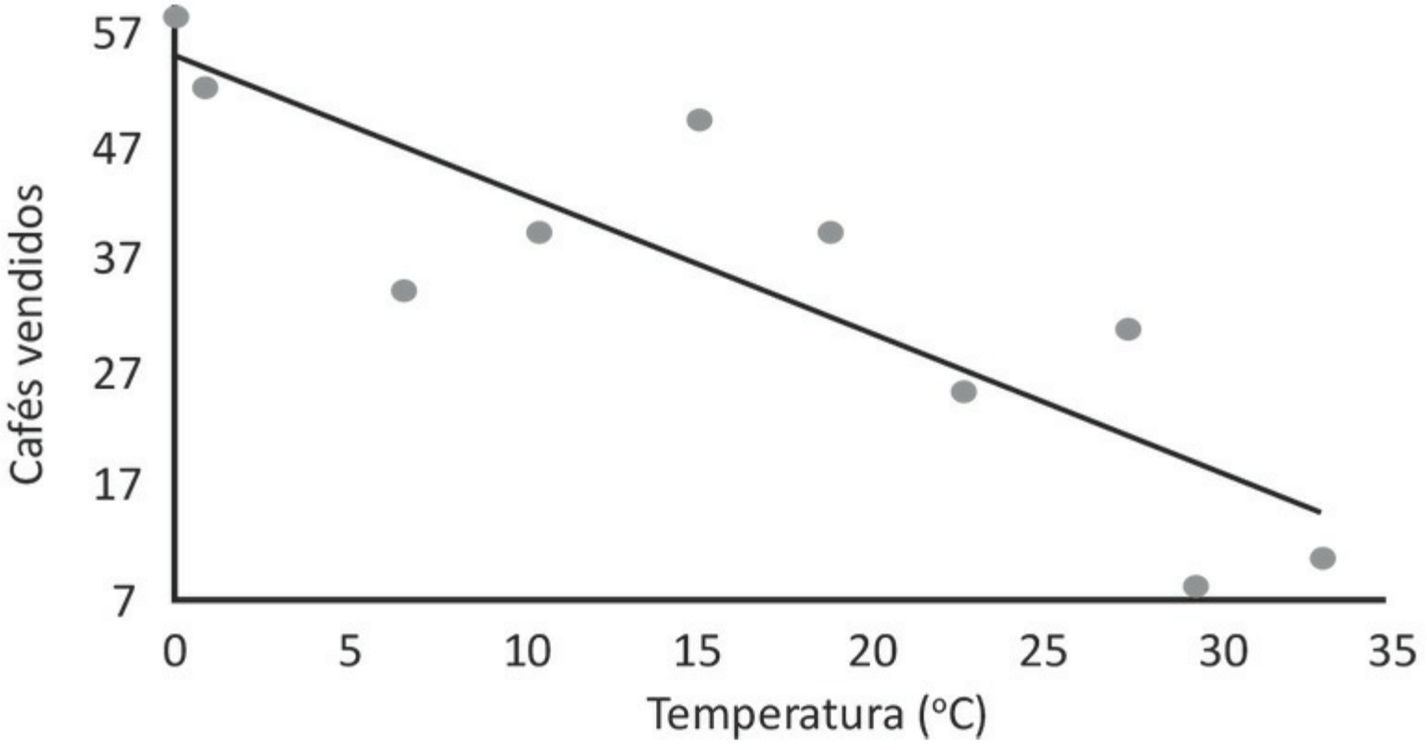



**Figura 5-3.** Ejemplo de correlación negativa.

Un ejemplo de una correlación positiva es la relación entre temperatura ambiental y venta de cerveza, en donde a mayor temperatura, mayor venta de cerveza; o a menor temperatura, menor venta de cerveza (figura 5-2). Mientras que un ejemplo de correlación negativa es la relación entre temperatura ambiental y venta de café, en donde a mayor temperatura, menor venta de café; o a menor temperatura, mayor venta de café (figura 5-3).

***Ejemplos de correlación positiva***

Al analizar la relación entre ansiedad y depresión (figura 5-4), se observa que hay una correlación positiva entre las dos variables (Martin, Usdan, Cremeens, y Vail-Smith, 2014).

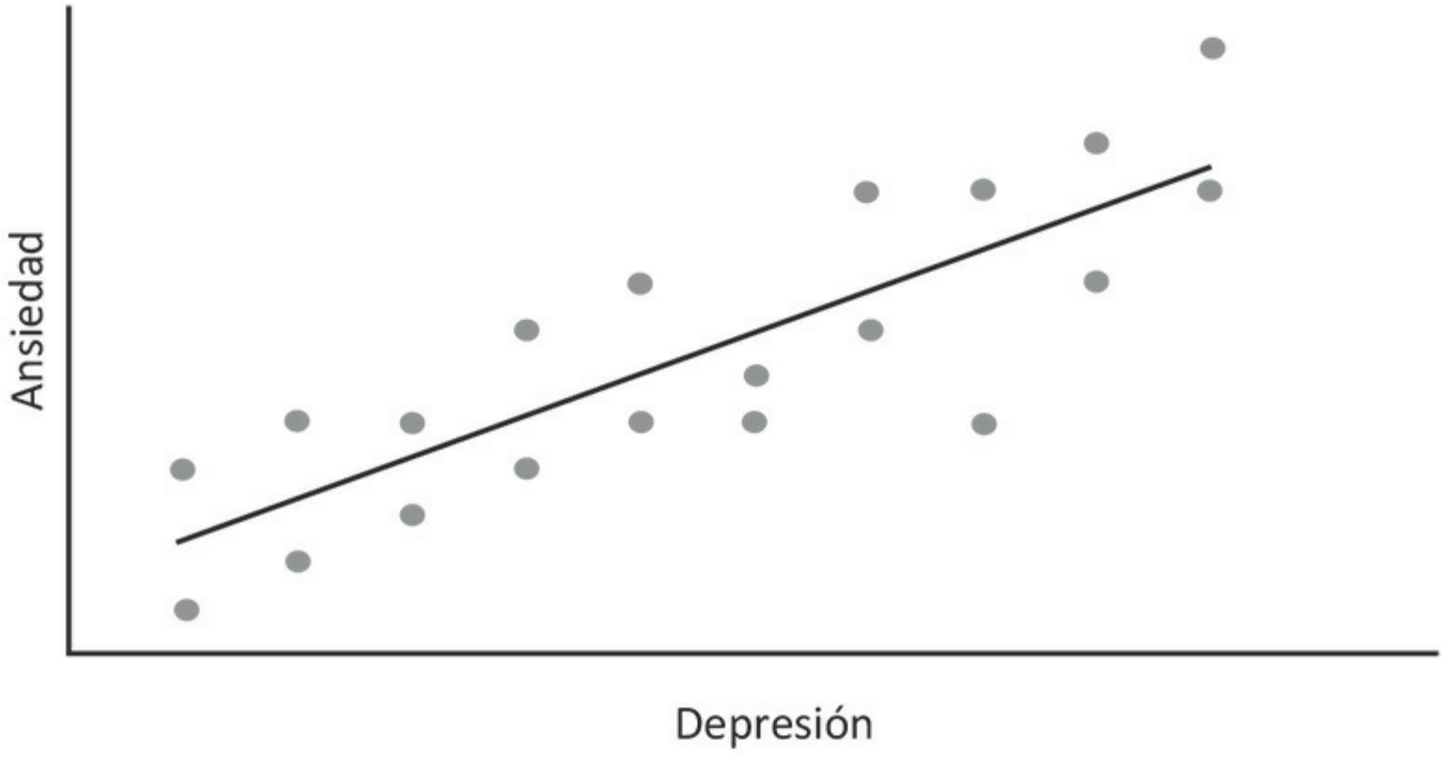



**Figura 5-4.** Correlación positiva entre depresión y ansiedad.

Esta correlación positiva indica que las personas que reportan mayores síntomas de depresión también reportan mayores síntomas de ansiedad. De igual manera, significa que las personas que reportan menores síntomas de depresión, también reportan menores síntomas de ansiedad. En la correlación no importa el orden de las variables, pues también es posible decir que a mayores síntomas de ansiedad, mayores síntomas de depresión. Esta relación es interesante porque indica que si algún terapeuta recibe un paciente o cliente con síntomas de depresión, entonces automáticamente debería de preguntarle por sus síntomas de ansiedad, ya que es muy probable que también los presente, según lo reportado por esta investigación y otras más.

Otro ejemplo de correlación positiva es la que sucede entre las variables de consumo de alcohol y tener relaciones sexuales sin condón (figura 5-5) en personas que tienen VIH/sida (Gerbi, Habtemariam, Tameru, Nganwa, y Robnett, 2009).

**Figura 5-5.** Correlación positiva entre consumo de alcohol y sexo sin condón.

Este tema es muy relevante en la psicología de la salud, ya que ofrece datos útiles para prevenir el contagio del VIH, además de que otorga fundamentos para promover el uso de condón en personas no contagiadas. Al mismo tiempo, brinda otro enfoque que posibilita la intervención en pacientes que tienen VIH/sida para que no lo contagien a otras personas. La correlación que se encontró es positiva, e indica que a mayor consumo de alcohol antes de tener relaciones sexuales, hay mayor número de relaciones sexuales sin condón. Esta correlación también indica que las personas con VIH/sida que están con alguna pareja y que empiezan a consumir alcohol, es probable que no usen condón al momento de tener relaciones sexuales. Por esta razón es importante que, como parte de la intervención en personas contagiadas de VIH/sida, se maneje esta información para prevenir el contagio a otras personas.

Un último ejemplo es la correlación positiva que existe entre la actividad física y la autoestima (figura 5-6).

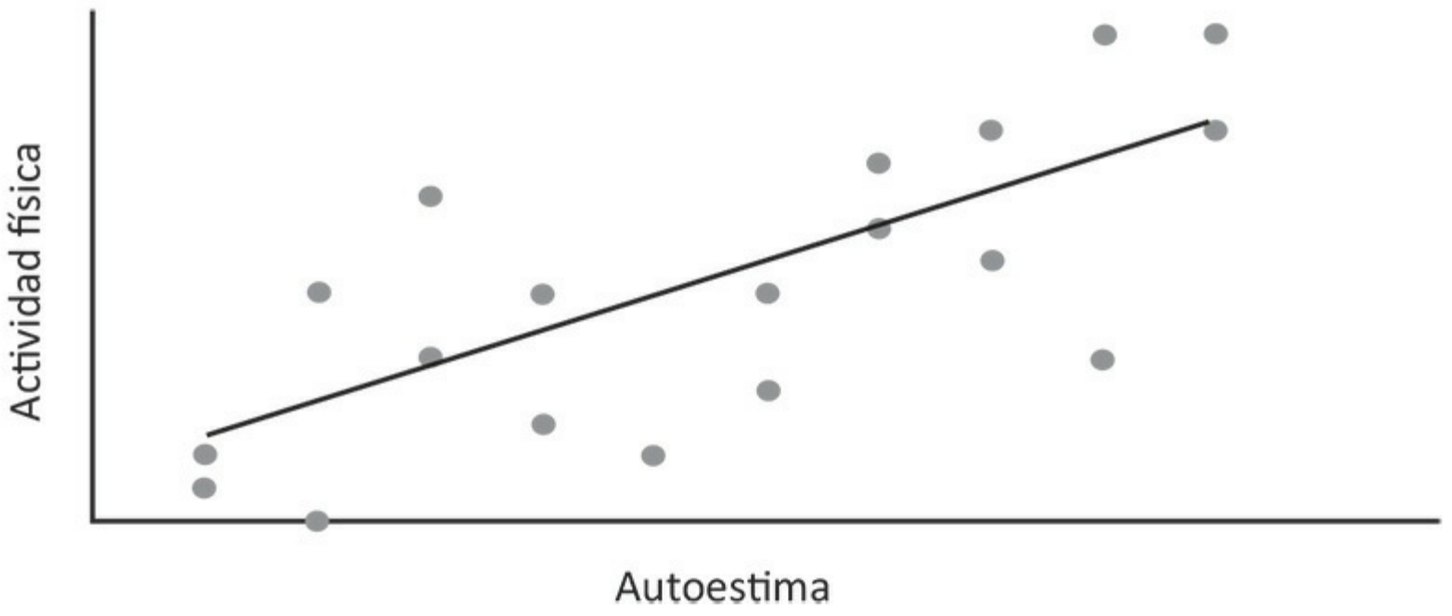



**Figura 5-6.** Correlación positiva entre actividad física y autoestima.

En un estudio realizado en estudiantes de China se encontró esta correlación estadísticamente significativa (Li, Xu, y Lui, 2014). Esta relación indica que las personas que tienen baja autoestima también realizan poca actividad física, o que los estudiantes que reportan alta autoestima realizan más actividad física. Conocer esta relación contribuye de dos maneras: la primera es que si una persona tiene baja autoestima se le puede sugerir que realice actividad física para tratar de aumentarla. La otra es que al promover la actividad física se podría averiguar si al aumentar la autoestima es posible ayudar a las personas a que se activen físicamente. Como una correlación no indica causalidad, no se sabe realmente cuál de las dos variables puede ser la causa y cuál el efecto, porque inclusive las dos podrían ser un efecto de otra tercer variable no medida, como se explicará más adelante en el capítulo.

***Ejemplos de correlación negativa***

El primer ejemplo de correlación negativa se refiere a la correlación entre las variables de depresión y autoestima (figura 5-7).

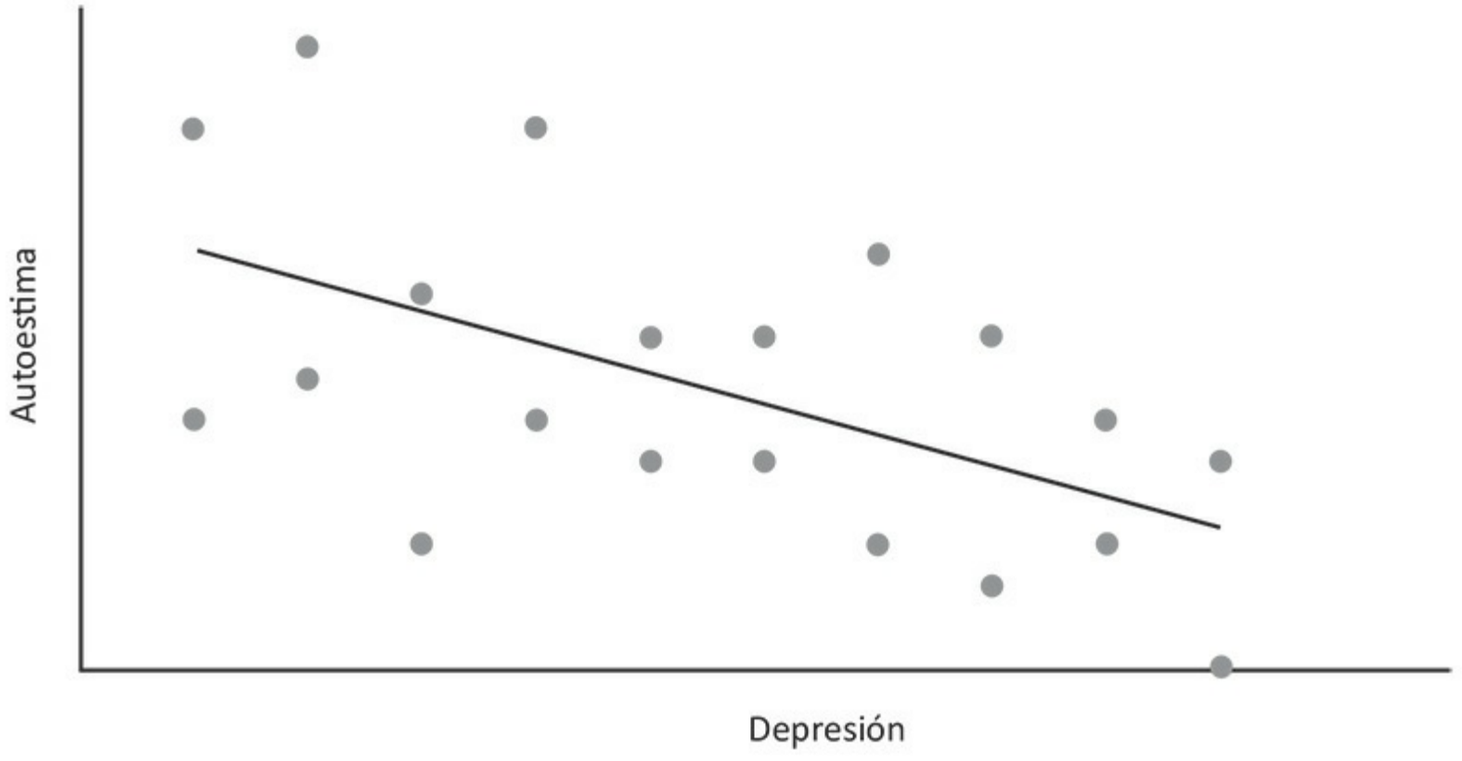



**Figura 5-7.** Correlación negativa entre depresión y autoestima.

La correlación es negativa porque a mayores niveles de depresión reportados por una persona, ésta reportará menores niveles de autoestima. También aquellas personas que reporten menor depresión también reportarán una mayor autoestima. En algunas terapias para reducir los síntomas de depresión se maneja el tema de la autoestima, ya que las personas que presentan este problema también es probable que muestren síntomas de baja autoestima. Debido a que esta correlación no es perfecta, se considera que hay una tendencia muy fuerte en la relación de las dos variables; no obstante, se podría presentar el caso de alguien que tenga síntomas de depresión pero no presente una baja autoestima.

Un segundo ejemplo consiste en analizar la correlación entre faltas a una clase y la calificación final en la misma (figura 5-8).

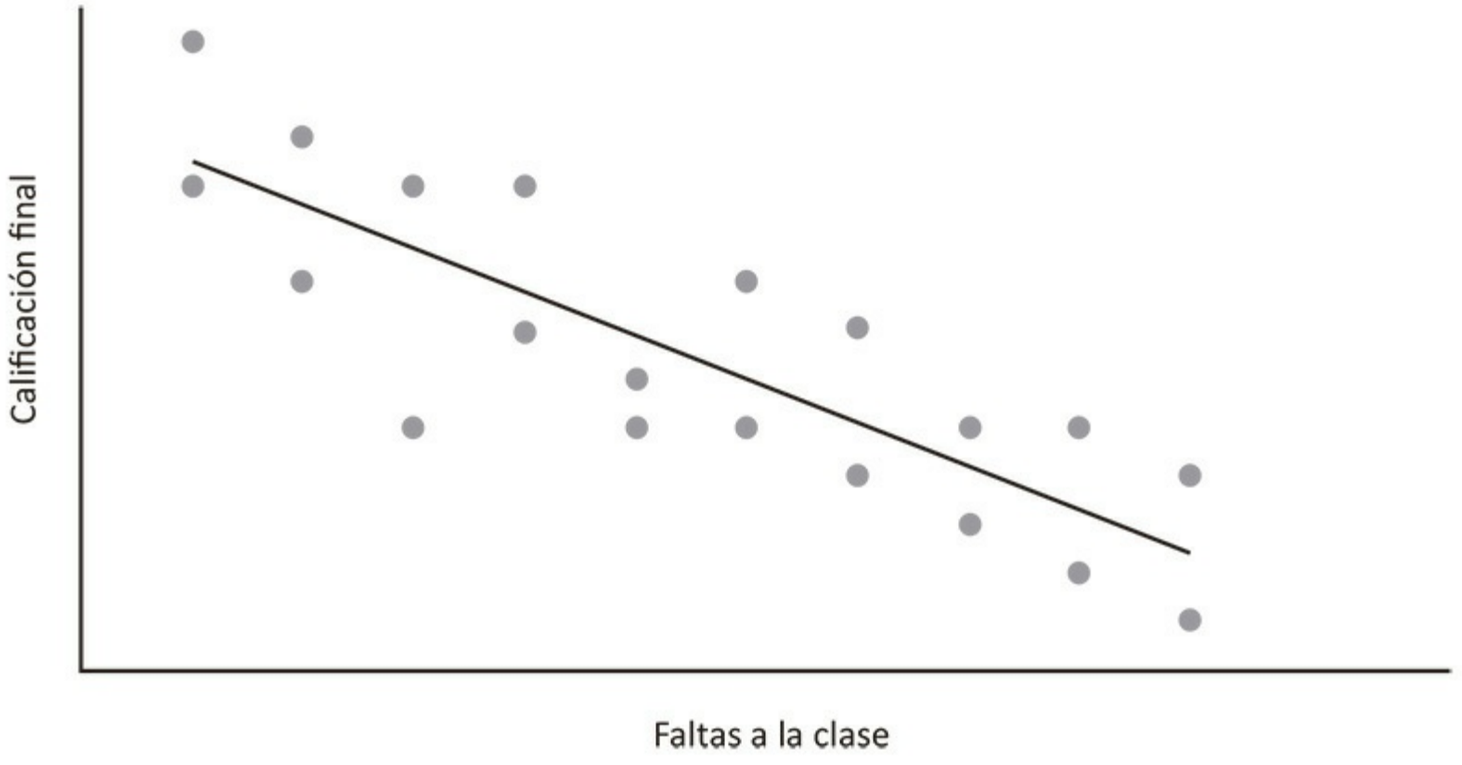



**Figura 5-8.** Correlación negativa entre faltas a la clase y calificación final.

La correlación sería negativa debido a que personas con más inasistencias, tendrían una menor calificación final. Mientras que aquéllos con menos faltas a la clase tendrían una mayor calificación final. Al analizar los valores de cada estudiante por separado, se podría notar que no siempre ocurre que quien más falta a clase obtiene una menor calificación; sin embargo, la tendencia general de todas las personas indicaría esta correlación negativa.

Un último ejemplo es la correlación negativa entre estrés y calidad de vida (figura 5-9).

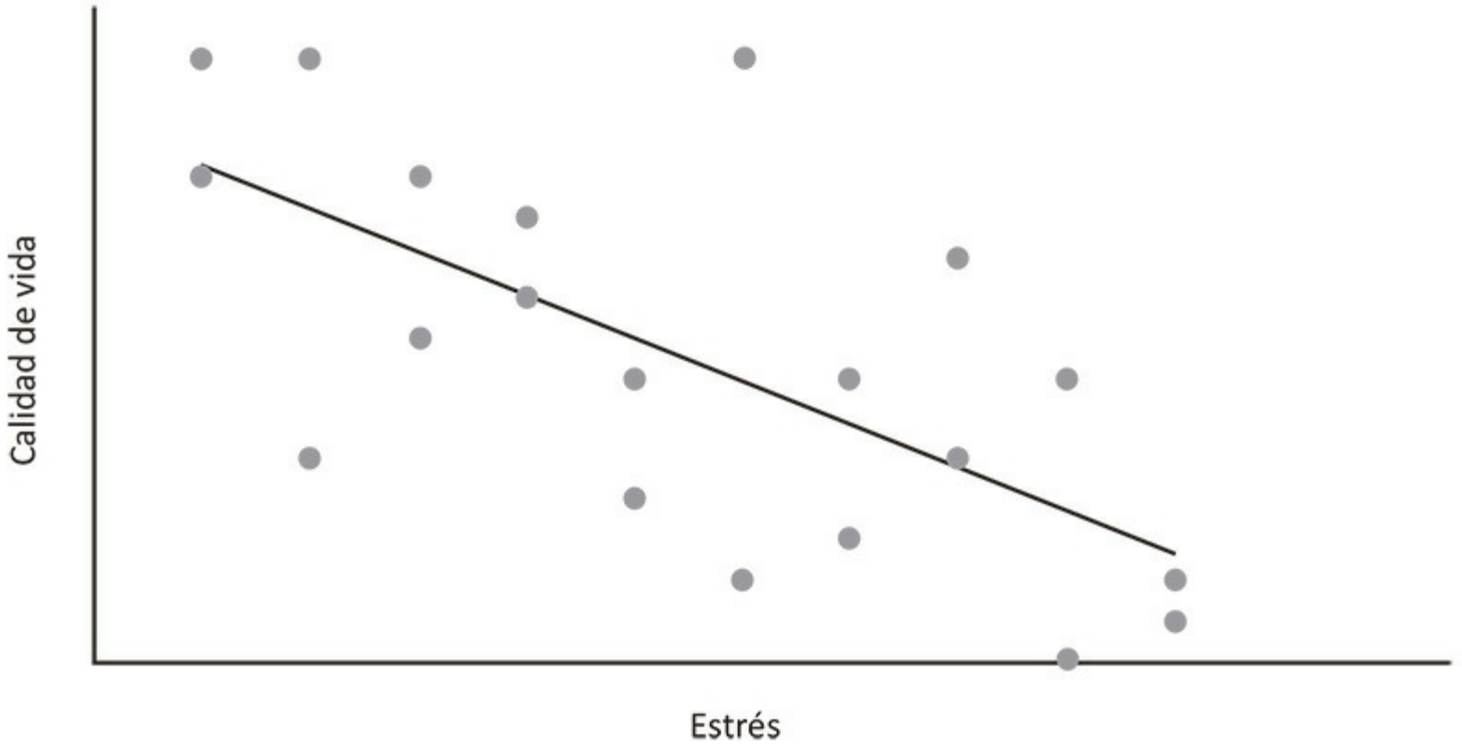



**Figura 5-9.** Correlación negativa entre estrés y calidad de vida.

Las personas que reportan menor estrés en su vida también reportan una mayor calidad de vida. Explicado de otra manera, las personas que reportan más estrés también reportan menor calidad de vida. Al conocer la relación entre estas dos variables es posible predecir que aquellas personas que reportan tener estrés, es probable que su calidad de vida sea baja y que en la medida que la persona salga de su estado de estrés, entonces mejorará su calidad de vida.

# Forma de la correlación

En la correlación de Pearson se asume que la relación entre las dos variables es lineal, como se puede ver en la figura 5-2. Se busca la línea que tenga la menor distancia entre los puntos y la línea trazada. Cabe mencionar que existen otro tipo de relaciones que no son lineales, como las curvas, que también se pueden analizar. Sin embargo, este tema corresponde a niveles más avanzados que no se tratarán en este texto. Para conocer este tipo de correlaciones no lineales se sugiere estudiar el libro de Vonesh (2012). La figura 5-10 muestra una relación no lineal, logarítmica entre dos variables: producto doméstico bruto *per cápita* y porcentaje de gente que lee en una muestra de 109 países.

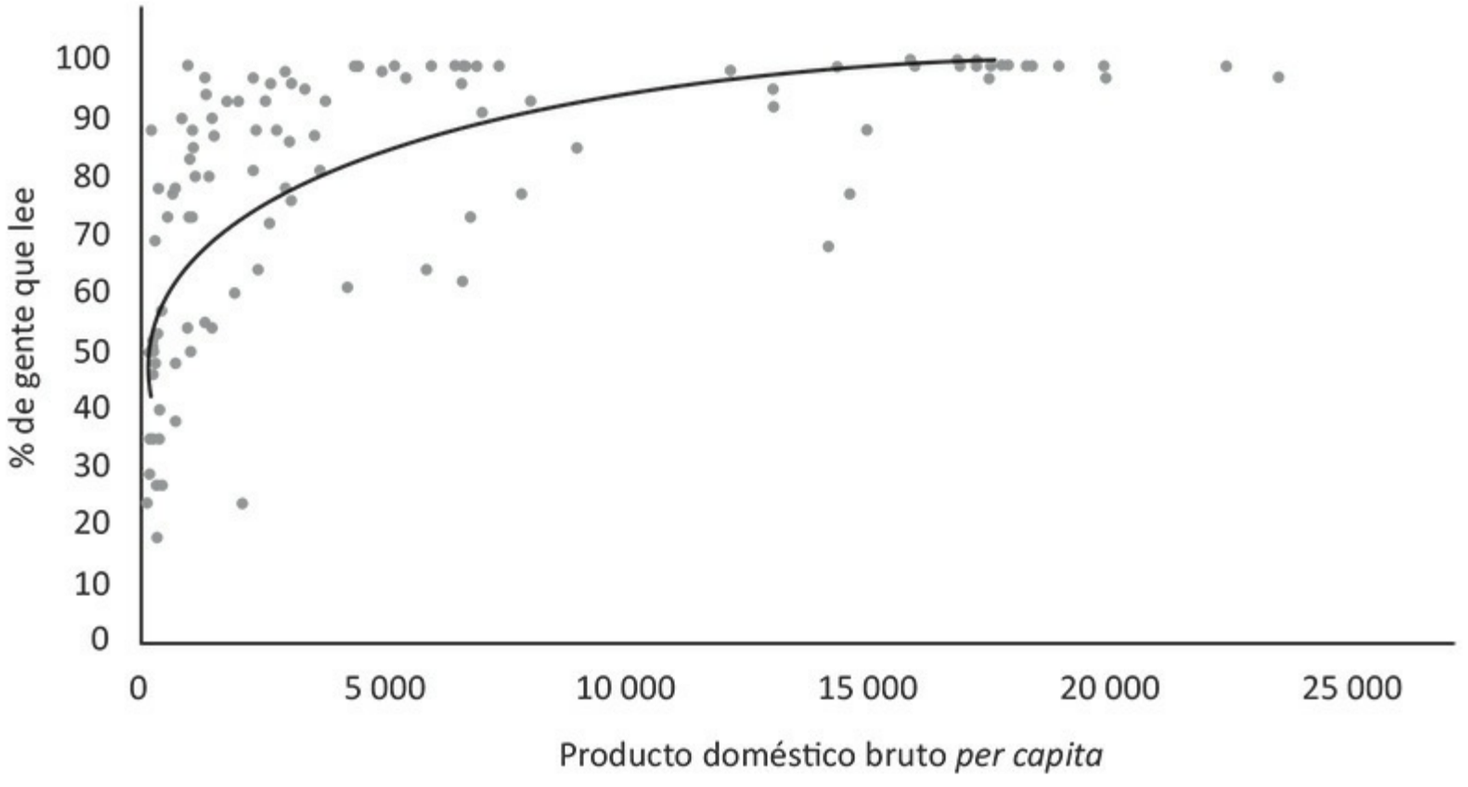



**Figura 5-10.** Correlación no lineal logarítmica, entre producto doméstico bruto *per cápita* y porcentaje de gente que lee en una muestra de 109 países.

# Fuerza o consistencia de la correlación

El número que se obtiene a través de la correlación de Pearson mide la fuerza o consistencia de la correlación. El rango del valor va de 0 a 1, en donde una correlación de 0 significa que no hay relación entre variables y una correlación de 1 indica una relación perfecta entre las variables. Una correlación de .09 se considera una correlación muy baja en comparación con una correlación de .51, la cual sería una correlación fuerte. Entre más se acerca el valor de la correlación a 1 significa que ésta tiende a ser más fuerte, y entre más se acerca a 0 significa que la correlación es nula. Cuando la correlación es igual a 1, ya sea positiva (figura 5-11)

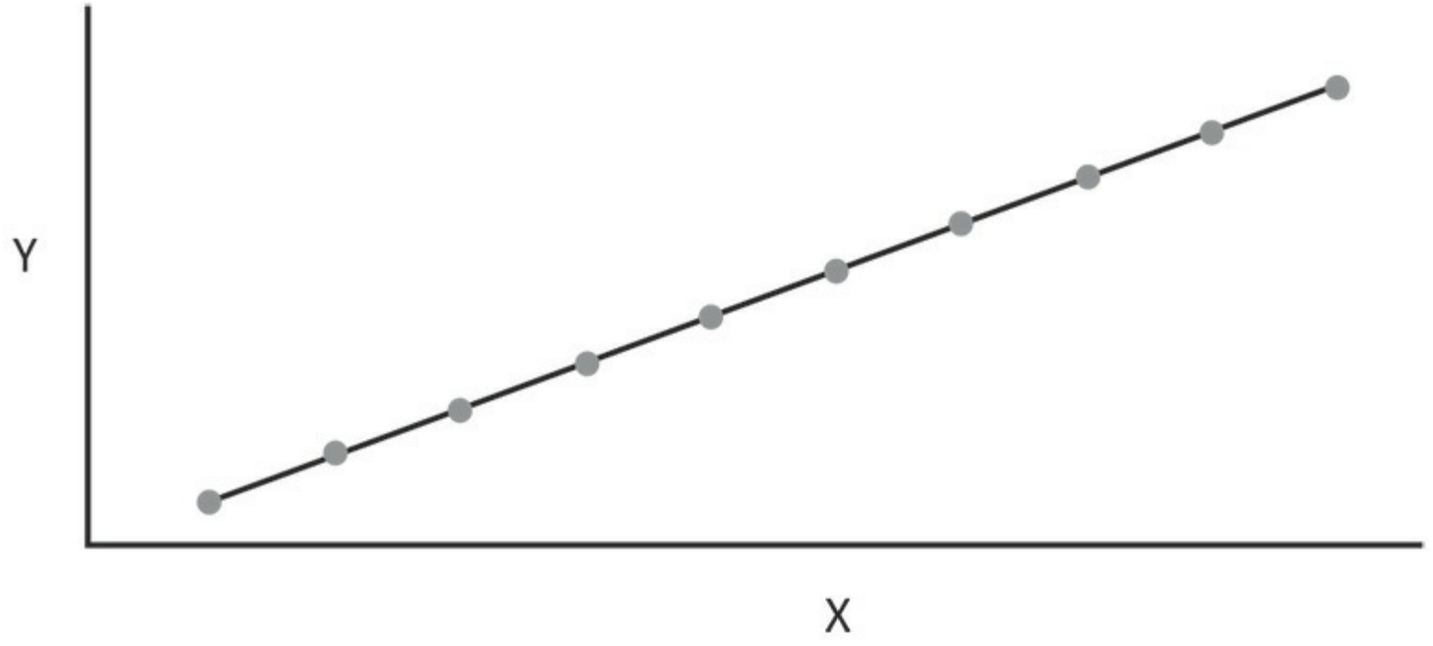



**Figura 5-11.** Ejemplo de correlación perfecta (+1.00).

o negativa (figura 5-12), los puntos se encuentran sobre la línea.

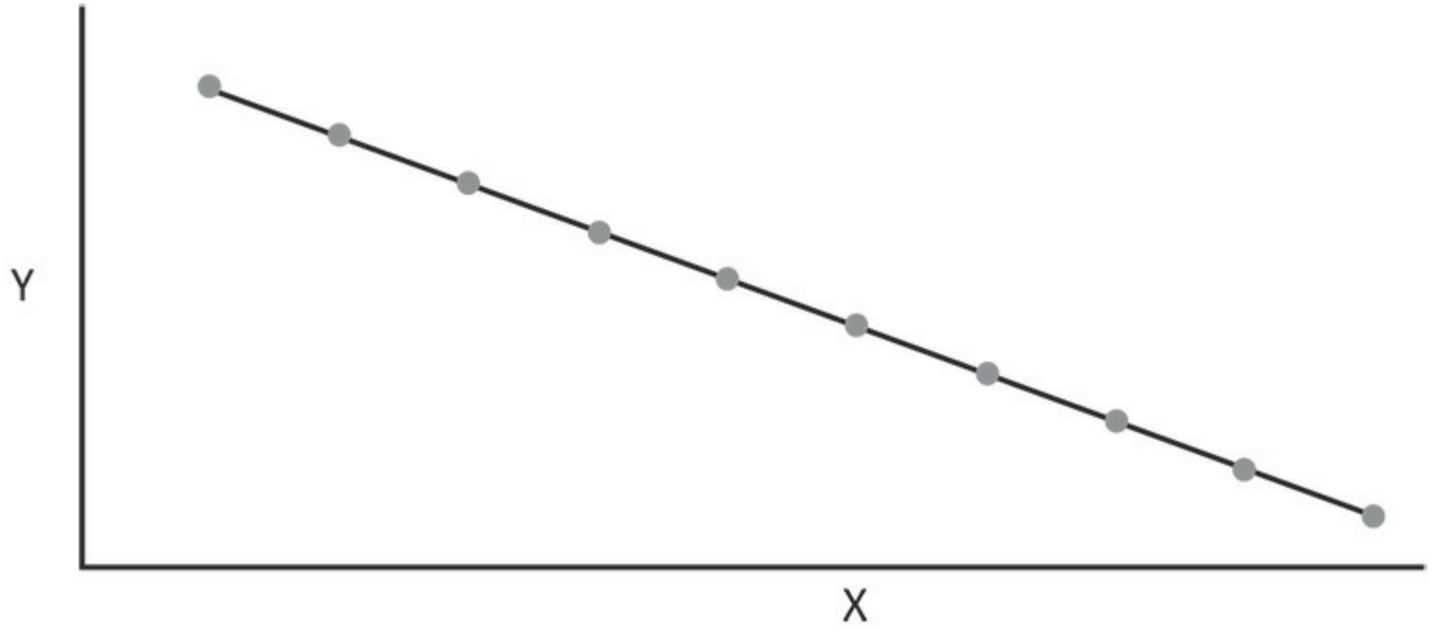



**Figura 5-12.** Ejemplo de correlación perfecta (–1.00).

En la figura 5-13 la correlación es .90 y, aunque es una correlación fuerte, los puntos que están cerca de la línea empiezan a separarse de ella.

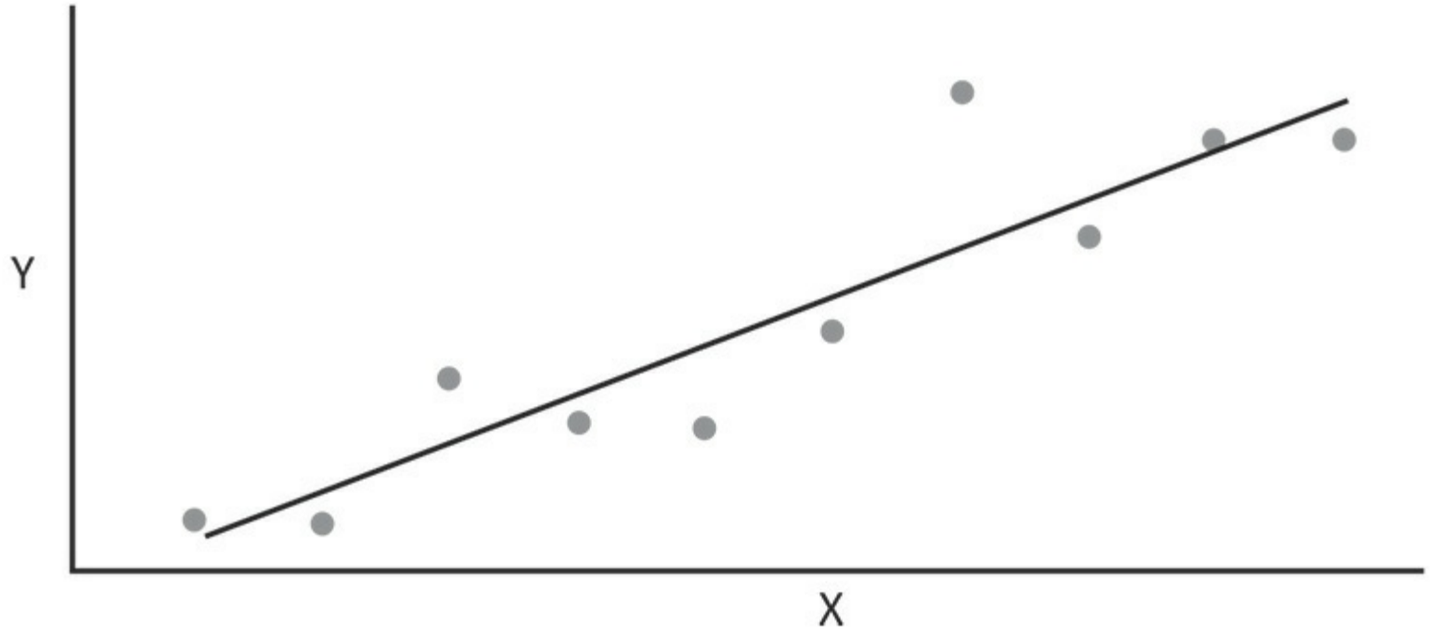



**Figura 5-13.** Ejemplo de correlación fuerte (.90).

Cuando la correlación es igual a 0, entonces se puede ver que los puntos están dispersos y no forman una línea ascendente o descendente (figura 5-14).

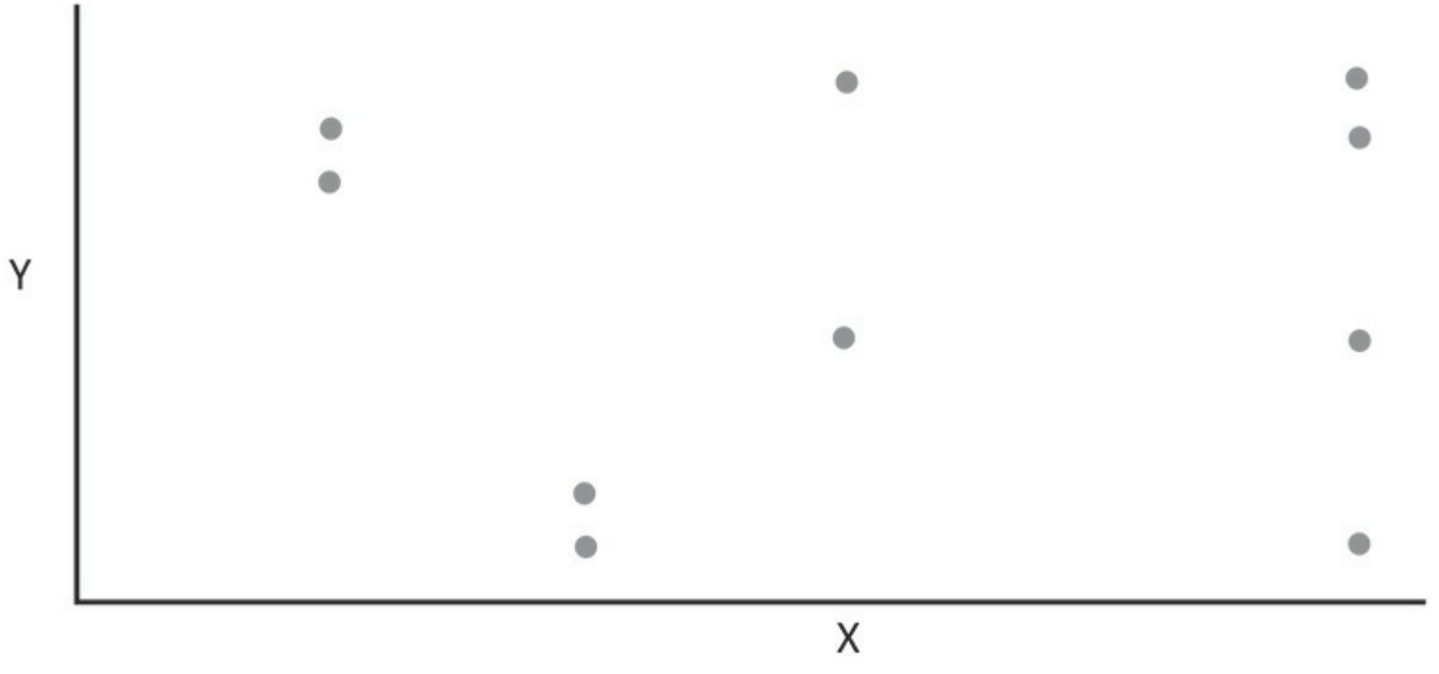



**Figura 5-14.** Ejemplo de correlación nula (.00).

Para las ciencias sociales, Cohen (1992) ofrece los siguientes puntos de referencia para saber qué tan fuerte es una correlación: .10 correlación pequeña, .30 correlación moderada y .50 correlación fuerte (Cohen, 1992). Se hace énfasis en que los puntos de referencia pueden ser positivos o negativos, pues como se mencionó en el apartado anterior, el signo indica la dirección de la correlación y no la fuerza. Esto quiere decir que una correlación de –.50 es más fuerte que una de +.20, ya que la fuerza sólo la indica el valor de la correlación y el signo únicamente indica la dirección.

# CORRELACIÓN DE PEARSON

La correlación más utilizada para variables cuantitativas es la **correlación producto-momento de Pearson**, a la cual se le conoce comúnmente como correlación de Pearson. Este tipo de correlación evalúa la relación lineal entre dos variables cuantitativas. La correlación de Pearson se representa con la letra *r* y se calcula de la siguiente manera:

$$r = \frac{\text{grado en el que } X \text{ y } Y \text{ varían juntas}}{\text{grado en el que } X \text{ y } Y \text{ varían por separado}}$$

$$r = \frac{\text{covariabilidad de } X \text{ y } Y}{\text{variabilidad de } X \text{ y } Y \text{ por separado}}$$

## Suma de los productos de las desviaciones

Para calcular la correlación de Pearson es necesario calcular la suma de los productos de las desviaciones, o SP. La SP se usa para medir la cantidad de **covarianza** entre dos variables, y su valor se puede calcular con una fórmula de definición o por medio de una fórmula computacional. La fórmula de definición de SP es:

$$SP = \Sigma(X - M_X)(Y - M_Y)$$

en donde $M_X$ es la media de los puntajes de la variable X y $M_Y$ es la media de los puntajes de la variable Y.
La fórmula de definición se calcula por medio de la siguiente secuencia de operaciones:

1. Encontrar las desviaciones de X y Y para cada individuo.
2. Encontrar el producto de las desviaciones para cada individuo.
3. Sumar los productos.

Mientras que la fórmula computacional de la suma de los productos de las desviaciones es:

$$SP = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n}$$

Es más fácil usar esta fórmula computacional para hacer los cálculos, ya que se calcula con números enteros mientras que en la fórmula computacional es muy probable que se trabaje con fracciones durante el cálculo.

A continuación se presenta un ejemplo en el cual se usa la fórmula definicional. En la tabla 5-2 se muestran dos variables que se desea correlacionar, X y Y. Para calcular las desviaciones es necesario conocer la media de X ($M_X$), la cual es 4 y la de Y ($M_Y$) es 6. Las desviaciones y los productos de las desviaciones se encuentran en la tabla 5-2.

**Tabla 5-2. Fórmula de definición para calcular SP**

| Puntajes | | Desviaciones | | Productos |
|---|---|---|---|---|
| **X** | **Y** | **$X - M_x$** | **$Y - M_y$** | **$(X - M_x)(Y - M_y)$** |
| 2 | 4 | -2 | -2 | +4 |
| 3 | 7 | +1 | +1 | -1 |
| 5 | 5 | +1 | -1 | -1 |
| 6 | 8 | +2 | +2 | +4 |
| | | | | +6 = SP |

La suma de los productos de las desviaciones (SP) para estas variables es +6.

Ahora se hará el cálculo de la SP con la fórmula de computación, para la cual se necesitan los valores de X y Y, además de los valores de X multiplicada por Y (XY) de cada individuo como lo muestra la tabla 5-3. Después se debe calcular la suma de las X, la suma de las Y y la suma de las XY.

**Tabla 5-3. Fórmula de computación para calcular la SP**

| x | y | XY | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | |
| 3 | 7 | 21 | |
| 5 | 5 | 25 | |
| 6 | 8 | 48 | |
| 16 | 24 | 102 | **Totales** |

Al sustituir los totales en la fórmula se obtiene lo siguiente:

$$SP = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n}$$

$$= 102 - \frac{16\,(24)}{4}$$

$$= 102 - 96$$

$$= 6$$

Las dos fórmulas producen el mismo resultado, SP = 6.

## Fórmula de la correlación de Pearson

Como ya se mencionó, la correlación de Pearson consiste en la razón entre la covarianza de X y Y (numerador) y la varianza de X y Y por separado (denominador). En la fórmula de la r de Pearson se usa la SP para medir la covarianza de X y Y. La varianza de X se mide calculando la suma de las desviaciones cuadradas de los puntajes de X ($SS_X$), y la varianza de Y se mide con la suma de las desviaciones cuadradas de los puntajes de Y ($SS_Y$). Por lo tanto, la fórmula de correlación de la r de Pearson es:

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SSXSSY)}}$$

Ahora se calculará la correlación de Pearson entre X y Y en una muestra de n = 4. Se usarán los mismos datos con los que se calculó la SP. Primero se muestra una gráfica donde vienen los valores X y Y para cada una de las personas en la figura 5-15.

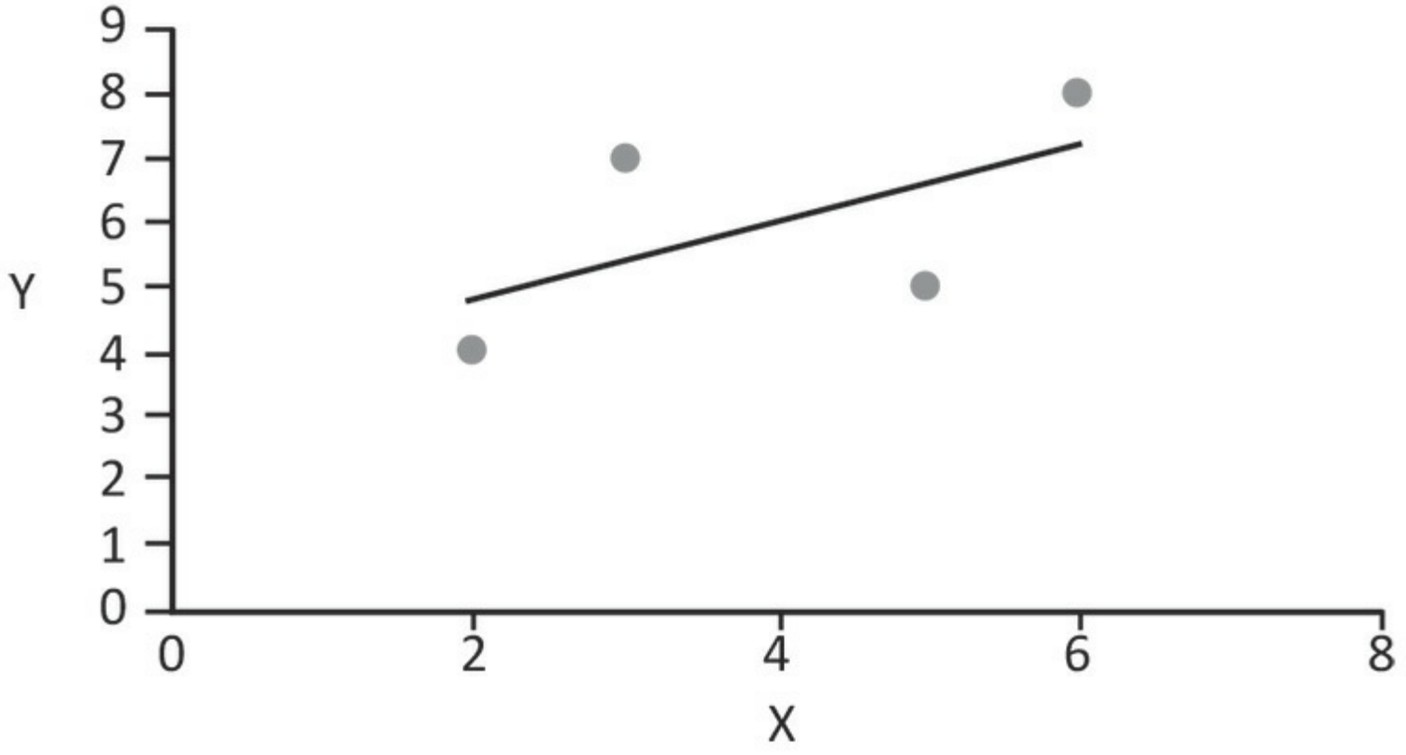



**Figura 5-15.** Relación entre las variables X y Y.

A simple vista, se observa que la relación entre las dos variables será positiva y moderada, debido a que los puntos no están muy cerca de la línea que mejor representa la asociación entre las variables.

Para hacer los cálculos se usará la fórmula de la r de Pearson que se mostró anteriormente:

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SSXSSY)}}$$

Por esta razón es necesario calcular los valores de SP, $SS_X$ y $SS_Y$. Los cálculos de estos valores se muestran en la tabla 5-4, en donde se recuerda que la media de X ($M_X$) es igual a 4 y la media de Y ($M_Y$) es 6.

**Tabla 5-4. Cálculo de $SS_x$, $SS_y$ y SP**

| Puntajes | | Desviaciones | | Desviaciones al cuadrado | | Productos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | Y | $X - M_x$ | $Y - M_y$ | $(X - M_x)^2$ | $(Y - M_y)^2$ | $(X - M_x)(Y - M_y)$ |
| 2 | 4 | -2 | -2 | 4 | 4 | +4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | -1 | +1 | 1 | 1 | -1 |
| 5 | 5 | +1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 6 | 8 | +2 | +2 | 4 | 4 | +4 |
| | | | | $SS_x = 10$ | $SS_y = 10$ | SP = 6 |

Al usar los valores obtenidos de la tabla 5-4 la correlación de Pearson es:

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SSXSSY)}} = \frac{6}{\sqrt[2]{(10)(10)}} = \frac{6}{10} = .60$$

Este valor de $r = .60$ indica que la correlación entre las dos variables es fuerte (Cohen, 1992).

## Coeficiente de determinación

En este caso se tiene la variable Y, que por ser variable toma distintos valores en la población; por ejemplo, si la variable fuera estrés, entonces se sabe que los distintos participantes de la población cuentan con diferentes niveles de estrés. Entonces se mide otra variable X, que es ansiedad rasgo, la cual se correlaciona con el estrés y la correlación resulta $r = .80$, que es una relación fuerte. Pero como se quiere saber qué proporción de la variabilidad del estrés (Y) es explicada por la variable de ansiedad rasgo (X), entonces la correlación se puede utilizar para revelar qué tanto la variable X explica la variabilidad de la variable Y. El paso a seguir para que esto sea posible es calcular el valor de $r^2$, por lo que se requiere elevar al cuadrado el valor de la correlación, a la cual se le llama **coeficiente de determinación.** El coeficiente de determinación ($r^2$) mide la proporción de la variabilidad en una variable que puede ser definida de la relación con otra variable. En este ejemplo, si la correlación entre estrés y ansiedad rasgo es de $r = .80$, entonces al elevarla al cuadrado se obtiene un coeficiente de determinación de $r^2 = .64$, el cual significa que 64% de la variabilidad del estrés es explicado por medio de la variable de ansiedad rasgo. El restante 36% de la variabilidad del estrés lo explican otras variables.

# PRUEBA DE HIPÓTESIS CON LA CORRELACIÓN DE PEARSON

Por lo general, la correlación de Pearson se calcula usando datos de una muestra y cuando se realizan los análisis el interés no radica en estudiar a la muestra por sí sola, sino a través de la misma, ya que se desea conocer la correlación en toda la población. Por ejemplo, un psicólogo está interesado en conocer si hay una relación entre calidad de vida y percepción de inseguridad subjetiva. Su interés es conocer si la relación entre estas dos variables existe en toda una población en estudio, en este caso la de Ciudad Juárez. Debido a que es muy difícil hacer el estudio en toda Ciudad Juárez, se tendrá que obtener sólo una muestra de esta población. Lo primero es conseguir

una muestra y después se analizará la correlación de estas dos variables en dicha muestra. Como se trabaja con una muestra, y no con la población entera, se usan estadísticos inferenciales mediante los cuales, a través de muestras obtenidas, es posible realizar inferencias acerca de poblaciones. A continuación se presentan los pasos para usar la correlación de Pearson de una muestra con el fin de inferir la correlación de la población a través de prueba de **hipótesis.**

# Formulación de la hipótesis en la correlación

La pregunta principal para esta prueba de hipótesis es si existe una correlación en la población (Cohen, Cohen, West, y Aiken, 2003). La hipótesis nula ($H_0$) nos dice que: "No" hay una correlación en la población o que la correlación de la población es cero. Mientras que la hipótesis alternativa ($H_1$) menciona que: "Sí" existe una correlación en la población. La correlación de la población se representa generalmente con la r (la letra griega rho), por lo tanto, las hipótesis se representarían de la siguiente manera:

$H_0$: r = 0 (No hay correlación en la población)
$H_1$: r ≠ 0 (Existe una correlación en la población)

Cuando existe una predicción específica acerca de la dirección de la correlación, es posible hacer una prueba direccional de una cola. Por ejemplo, si el investigador predice que espera encontrar una correlación negativa, las hipótesis serían:

$H_0$: r ≥ 0 (La correlación de la población no es negativa)
$H_1$: r < 0 (La correlación de la población es negativa)

La correlación de la muestra se usa para evaluar estas hipótesis. Para el primer grupo de hipótesis regulares no-direccionales mencionadas anteriormente, una correlación de la muestra cercana a cero respalda la $H_0$, y una correlación que se aleja del cero refuta la $H_0$. En tanto que para la prueba de hipótesis direccionales, un valor negativo de la correlación de la muestra tenderá a refutar la hipótesis nula, la cual manifiesta que la correlación de la población no es negativa.

A pesar de que las correlaciones de las muestras se usan para poner a prueba las hipótesis con respecto a las correlaciones de la población, es preciso tener en cuenta que no se espera que las muestras sean idénticas a la población de donde provienen. Existe una discrepancia entre el parámetro de la población y el estadístico de la muestra, a la cual se conoce como **error muestral.** Siempre se debe esperar alguna discrepancia, o error muestral, entre la correlación de la muestra y la correlación de la población que representa. Esto implica que aunque no exista una correlación en la población (r = 0), es probable que se obtenga un valor que no sea exactamente cero, en especial cuando las muestras son pequeñas.

Cuando se obtiene una correlación de la muestra que no es igual a cero, el propósito de la prueba de hipótesis es decidir cuál de las siguientes dos interpretaciones es la que aplica:

1. No hay correlación en la población (r = 0) y el valor de la correlación de la muestra es el resultado del error muestral. Se cumple la $H_0$.
2. El valor de la correlación de la muestra representa exactamente la verdadera correlación de la población. Se cumple la $H_1$.

La correlación de la muestra ayuda a determinar cuál de las dos interpretaciones es la correcta. Una correlación de la muestra que tenga un valor cercano a cero apoyará la primera conclusión, mientras que una correlación de la muestra que se aleje de cero apoyará la segunda conclusión.

## Grados de libertad para la prueba de correlación

La prueba de hipótesis para la correlación de Pearson tiene **grados de libertad** (gl) que se calculan de esta manera: gl = n – 2. Una manera de explicar esta fórmula es pensar en qué pasaría si se tuviera una muestra de n = 2. Si sólo hubiera dos participantes en la muestra, entonces no habría ningún grado de libertad; por ejemplo, si sólo se tienen dos puntos en la gráfica, entonces estos crearían una línea que pasaría exactamente por los dos puntos dando una r de 1.00 o r de –1.00. Debido a que dos puntos siempre producen una correlación perfecta, la correlación de la muestra es libre para variar sólo cuando el grupo de datos contiene más de dos puntos, y por esta razón gl = n – 2.

## Prueba de hipótesis

La tabla A del Apéndice ayuda a identificar si la correlación de la muestra es representativa de la población. Esta tabla se basa en el concepto de que se espera que una muestra sea representativa de la población de la cual se obtiene, específicamente, la expectativa es que la correlación de la muestra sea similar a la correlación de la población. Si la correlación de la población es cero, como se especifica en la hipótesis nula, entonces la correlación de la muestra debe estar cercana a cero. De esta manera, una correlación de la muestra cercana a cero respalda la hipótesis nula, mientras que una correlación de la muestra que se aleja de cero contradice esta hipótesis.

Así, la tabla A del Apéndice plantea exactamente cuáles correlaciones de muestras se obtienen de una población con r = 0 y cuáles no. Para usar la tabla A, primero se necesita saber el tamaño de la muestra (*n*) y el **nivel de alfa** que se usará. Con una muestra de *n* = 30 y un nivel de alfa de .05 se obtendría que gl = 30 – 2 = 28, que se puede localizar en el lado izquierdo de la tabla; y luego, en la parte superior se localiza el nivel de alfa de .05, y en este caso sería en dos colas. Con gl = 28 y $\alpha$ = .05 de dos colas, la tabla muestra un valor de .36. Si la correlación de la muestra es menor de .36, entonces se afirma que la correlación no es estadísticamente significativa, lo cual indica que la hipótesis nula no fue rechazada y se concluye que la correlación en la población es cero. Pero si la correlación es .36 o mayor, ya sea positiva o negativa, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que es muy probable que exista la correlación en la población.

## Supuestos de la correlación

El análisis de correlación de Pearson se realiza cuando se cumplen los siguientes supuestos (Higgins, 2006):

1. Las variables son intervalares o de razón, lo cual significa que son variables numéricas y continuas.
2. Los rasgos que se están midiendo tienen una distribución normal en la población.
3. Las dos variables tienen una relación lineal.
4. Las variables tienen una distribución normal bivariada.

# USO E INTERPRETACIÓN DE LA CORRELACIÓN DE PEARSON

Las correlaciones tienen distintas aplicaciones, a continuación se mencionan algunos ejemplos:

## Predicción

Si dos variables tienen una correlación estadísticamente significativa, entonces es posible usar una variable para predecir la otra variable. Por ejemplo, cuando una persona es admitida a la universidad, por lo general tiene que presentar un examen de admisión, que en México comúnmente es el EXANI (Exámenes Nacionales de Ingreso). Este tipo de examen se usa porque las calificaciones altas en el EXANI puede predecir el éxito académico del estudiante (Pérez y Padilla, 2006). Las universidades suelen tener un cupo limitado de alumnos que pueden admitir por semestre. Supóngase que una universidad tiene cupo para 5 000 estudiantes de nuevo ingreso, pero hay 9 000 personas aplicando para la admisión. La universidad tendrá que aceptar a 5 000 y rechazar a 4 000, pero la pregunta es cómo le hace para seleccionar a esos 5 000 que puede admitir. Por lo tanto, utiliza el criterio de que conviene darles la oportunidad a los 5 000 alumnos que saquen mejor provecho de su estancia en la institución, pero ¿cómo le hace para seleccionarlos? En este caso, la universidad elige un instrumento que se relacione con el éxito académico, el cual en este ejemplo es el examen del EXANI, pues se asume que hay una correlación entre los puntajes en el EXANI y el éxito académico. Por esta razón la universidad aplica el instrumento del EXANI a los 9 000 aspirantes y, según los puntajes, escoge a los 5 000 alumnos con el resultado más alto. Es decir, con base en la correlación mencionada, se usan los puntajes del EXANI como predictores del éxito académico y se elige a los 5 000 aspirantes que obtendrán más provecho de la universidad.

## Validez

Por ejemplo, un psicólogo está desarrollando una escala para evaluar el estrés en universitarios. Se sabe que existen diferentes escalas que miden el estrés; sin embargo, el psicólogo se da cuenta que el estrés en universitarios tiene características distintas a las que presenta el estrés en general. Por esta razón, elabora una escala de estrés para universitarios y pretende validarla, es decir, quiere saber si dicha escala realmente mide el estrés. Una de las maneras para validar la escala es haciendo una correlación de ésta con otra escala ya establecida.

En este ejemplo el investigador aplica su escala de estrés para universitarios, además de la escala de estrés de Nowack (2002), a un grupo de 2 000 estudiantes universitarios. La validación consiste en analizar la correlación entre las dos escalas de estrés. En caso de que se encuentre una correlación fuerte, entonces se puede tener más seguridad de que la escala realmente mide estrés; no obstante, si la correlación entre las dos es débil, se concluye que la nueva escala no mide el estrés, ya que tiene una relación débil con la escala de estrés ya establecida.

## Confiabilidad

Además de usar la correlación para analizar la validez de un instrumento, también es posible usar la correlación para analizar la confiabilidad de un instrumento. Cabe mencionar que la confiabilidad mide la consistencia de un instrumento. Existen varios tipos de confiabilidad, por ejemplo, la temporal o *test-retest,* que consiste en que si una

escala da un resultado en este momento y tiempo después se aplica la misma escala, entonces los resultados deben ser muy parecidos. Es decir, si hoy una escala dice que la persona es extrovertida, y ésta se aplica después de dos meses, el resultado tiene que ser similar. Por lo tanto, si un instrumento primero dice que la persona es extrovertida y después dice que la persona es introvertida, entonces no es consistente ni estable. La confiabilidad *test-retest* se aplica sólo a constructos que son estables, como por ejemplo la inteligencia o la personalidad. La confiabilidad se evalúa aplicando la escala a un grupo de personas hoy y después de cierto tiempo se aplica al mismo grupo; lo que se espera es encontrar una correlación fuerte entre las dos aplicaciones. Si al analizar la correlación ésta es pequeña, entonces se concluye que la escala carece de confiabilidad *test-retest*.

## Verificación de teoría

Muchos psicólogos hacen cierto tipo de predicciones acerca de la relación entre dos variables. Por ejemplo, algunos dicen que la inteligencia emocional está relacionada con el rendimiento escolar; por lo tanto, se puede hacer un análisis de correlación para corroborar esta hipótesis. Otros ejemplos consisten en analizar si hay una relación entre la personalidad de los padres y la personalidad de los hijos; ver si hay relación entre algún tipo de personalidad y *mobbing*; analizar la relación entre autoeficacia y realizar actividad física. Todos estos casos se deben estudiar por medio del análisis de correlación.

# CORRELACIÓN Y CAUSALIDAD

Uno de los errores más comunes al interpretar las correlaciones es que las personas erróneamente implican relaciones causales a través de la correlación. Por ejemplo, algunos resultados de artículos dicen que fumar cigarros está relacionado con enfermedades cardiacas; el consumo de alcohol está relacionado con defectos al nacer; y que consumir zanahorias mejora la vista. ¿Esto quiere decir que los cigarros causan problemas en el corazón o que la zanahoria causa una buena vista? Si los resultados de todas estas relaciones se obtuvieron a través de correlaciones, la respuesta es **no.** A pesar de que puede existir alguna relación causal en estos resultados, la correlación no es el estudio que permite analizar relaciones causales, pues sólo con el experimento puro es posible inferir relaciones causales.

En el primer ejemplo se analizaba la relación entre calificaciones en la escuela y el ingreso económico mensual de la familia. Sin embargo, no se puede concluir que tener un mayor ingreso económico mensual causa tener mejores calificaciones. Por ejemplo, si la mamá de la familia recibe un aumento de sueldo en su trabajo, esto no significa que automáticamente las calificaciones del hijo van a mejorar porque subió el ingreso económico mensual de la casa. Solamente por medio de un experimento puro se pueden establecer relaciones de tipo causal, ya que en éste el experimentador manipula una variable controlando los efectos de otras variables.

Se usará otro ejemplo para ilustrar que **la correlación no implica causalidad**. Hay estudios donde se ha encontrado que existe una correlación estadísticamente significativa y positiva entre la venta de helados y el índice de crimen en la ciudad (Salkind, 2014). Al ver que existe esta correlación entre las dos variables, la pregunta es: ¿la venta de helados causa que las personas quieran cometer crímenes?, o ¿al cometer crímenes las personas tienen antojo de comer helados? Es importante recordar que la correlación no implica causalidad. Con este tipo de análisis no se puede saber si la primera variable causa la segunda o viceversa. En este ejemplo existe una tercera variable que afecta a las dos variables analizadas y por tal razón existe correlación. Esta variable es la temperatura de la ciudad, lo cual quiere decir que cuando la ciudad está muy caliente, en verano, entonces incrementa la venta de helados y

también el número de crímenes cometidos; y cuando la temperatura de la ciudad es muy fría, en invierno, entonces bajan las ventas de helados, así como los índices delictivos. En este ejemplo, a pesar de que existe una correlación entre venta de helados y número de crímenes cometidos, esta relación se explica a través de una tercera variable: la temperatura del ambiente.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**1.** Grafique los siguientes puntos e indique la dirección de la correlación.

| X | Y |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 1 | 9 |
| 2 | 7 |
| 3 | 5 |
| 4 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 1 |

**2.** Grafique los siguientes puntos e indique la dirección de la correlación.

| X | Y |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 3 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 5 | 7 |
| 6 | 6 |

**3.** Identifique si las siguientes correlaciones son positivas o negativas.
**a)** Correlación entre altura y peso:
**b)** Correlación entre estrés y concentración:
**c)** Correlación entre nivel socioeconómico y nivel educativo:
**d)** Correlación entre actividad física y padecimiento de enfermedades cardiovasculares:
**e)** Correlación entre nivel educativo y salario:

**4.** ¿Qué correlación es más fuerte?
**a)** r = 0.12 o r = 0.96:
**b)** r = -0.23 o r = –0.96:
**c)** r = –0.86 o r = 0.44:

**5.** Utilice la fórmula de definición para calcular la suma de las desviaciones cuadradas (SP).

| X | Y |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 5 |
| 5 | 7 |
| 6 | 9 |
| 6 | 8 |

**6.** Utilice la fórmula computacional para calcular la suma de las desviaciones estándar (SS).

| X | Y |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 4 |
| 3 | 6 |

| | |
|---|---|
| 4 | 5 |
| 5 | 7 |
| 6 | 9 |
| 6 | 8 |

**7.** Calcule la correlación de Pearson con los datos de los ejercicios 5 y 6.

| X | Y |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 5 |
| 5 | 7 |
| 6 | 9 |
| 6 | 8 |

**8.** Calcule la correlación de Pearson con los siguientes datos:

| Puntajes | |
|---|---|
| **X** | **Y** |
| 13 | 50 |
| 14 | 53 |
| 16 | 37 |
| 17 | 41 |
| 21 | 35 |
| 25 | 25 |
| 26 | 27 |

| | |
|---|---|
| 29 | 30 |

**9.** La correlación entre depresión y autoestima es de r = –0.57. Calcule el coeficiente de determinación.

10. Determine, por medio de la prueba de hipótesis, si la correlación del ejercicio 8 es estadísticamente significativa con a = 0.05.

11. Un investigador está usando una prueba de dos colas con a = 0.05 para determinar si existe una correlación en la población. Se obtuvo una muestra de n = 30 participantes. La correlación que obtuvo en la muestra fue r = –0.34, ¿es estadísticamente significativa?

# Ejercicios voluntarios

**1.** Grafique los siguientes puntos e indique la dirección de la correlación.

| X | Y |
|---|---|
| 4 | 10 |
| 5 | 6 |
| 5 | 7 |
| 6 | 8 |
| 7 | 6 |
| 8 | 3 |
| 10 | 3 |

**2.** Grafique los siguientes puntos e indique la dirección de la correlación.

| X | Y |
|---|---|
| 5 | 11 |
| 13 | 14 |
| 15 | 12 |
| 18 | 20 |
| 23 | 23 |
| 27 | 29 |

| | |
|---|---|
| 29 | 27 |

**3.** Identifique si las siguientes correlaciones son positivas o negativas.
**a)** Correlación entre nutrición y salud:
**b)** Correlación entre consumo de alcohol y tiempo de reacción para pisar el freno del carro:
**c)** Correlación entre depresión y desesperanza:
**d)** Correlación entre actitud conservadora y aceptación de las personas homosexuales:
**e)** Correlación entre horas dormidas y cansancio durante el día:
**f)** Correlación entre apoyo social y calidad de vida:

**4.** ¿Qué correlación es más fuerte?
**a)** r = 0.73 o r = 0.49:
**b)** r = –0. 81 o r = –0.34:
**c)** r = 0.59 o r = –0.63:

**5.** Utilice la fórmula de definición para calcular la suma de las desviaciones cuadradas (SP).

| X | Y |
|---|---|
| 23 | 32 |
| 28 | 17 |
| 31 | 25 |
| 35 | 44 |
| 42 | 60 |
| 53 | 53 |
| 55 | 71 |
| 58 | 88 |

**6.** Utilice la fórmula computacional para calcular la suma de las desviaciones estándar (SS).

| X | Y |
|---|---|
| 23 | 32 |
| 28 | 17 |

| | |
|---|---|
| 31 | 25 |
| 35 | 44 |
| 42 | 60 |
| 53 | 53 |
| 55 | 71 |
| 58 | 88 |

**7.** Calcule la correlación de Pearson con los datos de los ejercicios 5 y 6.

| X | Y |
|---|---|
| 23 | 32 |
| 28 | 17 |
| 31 | 25 |
| 35 | 44 |
| 42 | 60 |
| 53 | 53 |
| 55 | 71 |
| 58 | 88 |

**8.** Calcule la correlación de Pearson con los siguientes datos:

| X | Y |
|---|---|
| 4 | 32 |
| 7 | 28 |
| 9 | 30 |
| 10 | 21 |
| 14 | 17 |
| | |

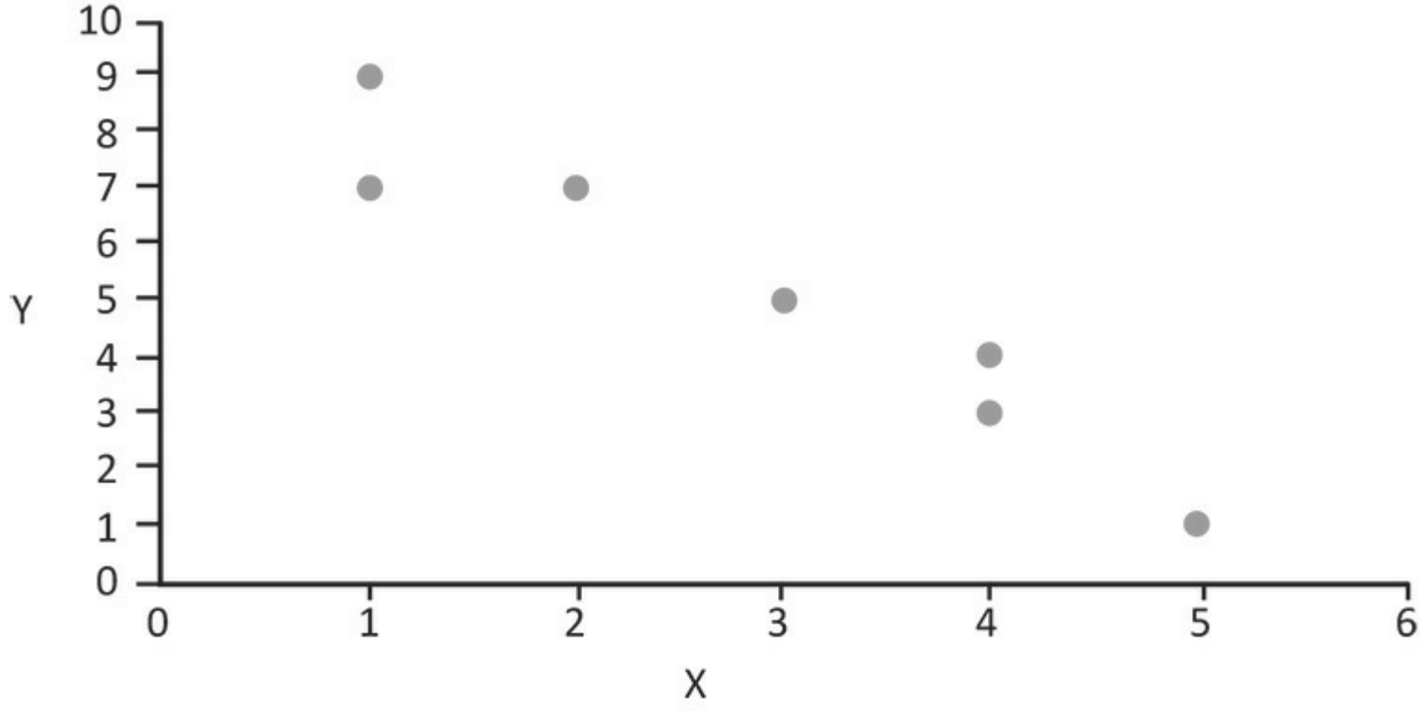
| | |
|---|---|
| 17 | 20 |
| 19 | 9 |
| 23 | 19 |

**9.** La correlación entre estrés y depresión es de r = 0.63. Calcule el coeficiente de determinación.

**10.** Calcule, por medio de la prueba de hipótesis, si la correlación del problema 8 es estadísticamente significativa, con a = 0.05.

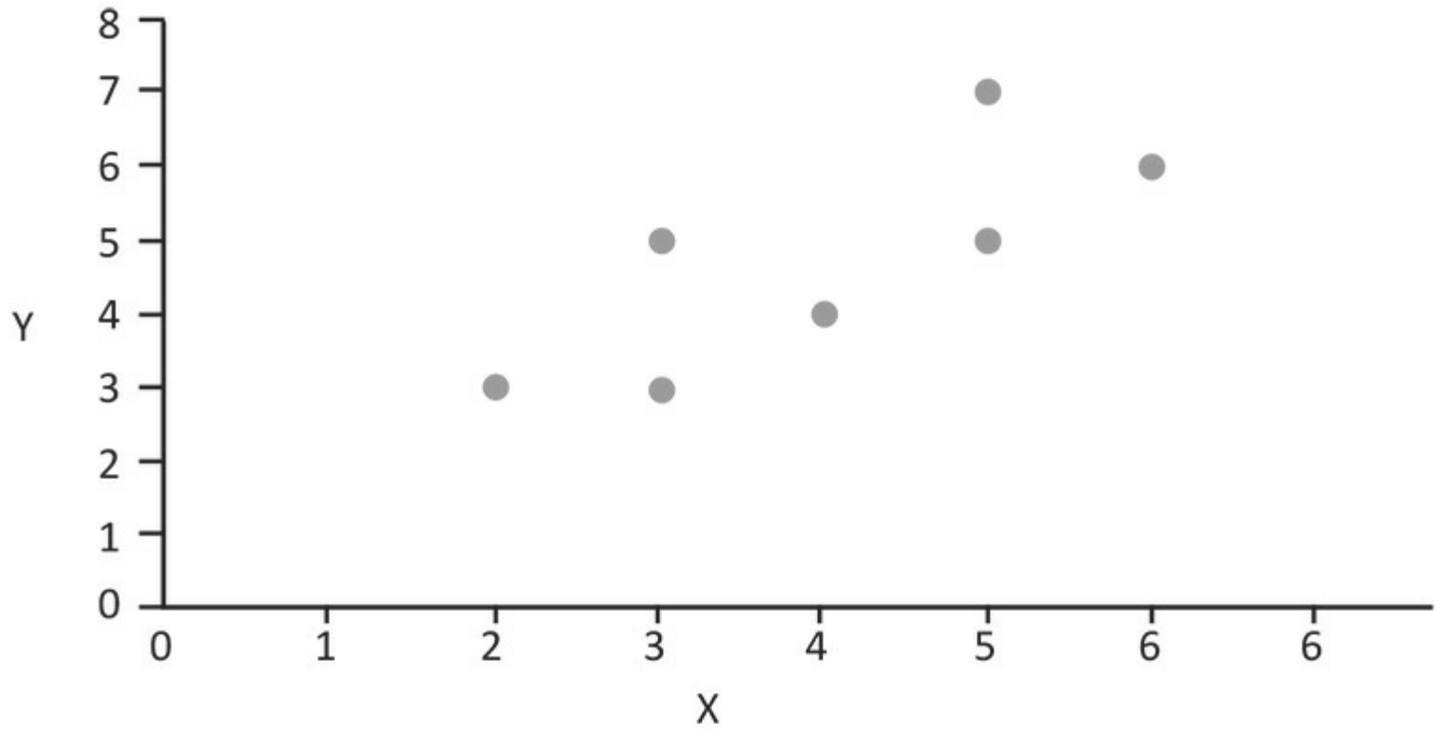
## Solución a los ejercicios de autocomprobación

**Ejercicio 1**




En cuanto a la dirección, los puntos indican una correlación negativa.

**Ejercicio 2**




En cuanto a la dirección, los puntos indican una correlación positiva.

**Ejercicio 3**

**a)** Correlación entre altura y peso: positiva.
**b)** Correlación entre estrés y concentración: negativa.
**c)** Correlación entre nivel socioeconómico y nivel educativo: positiva.
**d)** Correlación entre percepción de inseguridad en la ciudad y pasar tiempo fuera de la casa: negativa.
**e)** Correlación entre actividad física y padecimiento de enfermedades cardiovasculares: negativa.
**f)** Correlación entre nivel educativo y salario: positiva.

**Ejercicio 4**

**a)** r = 0.12 o r = 0.96: **r = 0.96**
**b)** r = –0.23 o r = –0.96: **r = –0.96**
**c)** r = –0.86 o r = 0.44: **r = –0.86**

**Ejercicio 5**

| **Puntajes** | | **Desviaciones** | | **Productos** |
|---|---|---|---|---|
| **X** | **Y** | **X - $M_x$** | **Y - $M_y$** | **(X - $M_x$) (Y- $M_y$)** |
| 2 | 3 | -1.875 | -2.875 | 5.390625 |
| 2 | 5 | -1.875 | -0.875 | 1.640625 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | -0.875 | -1.875 | 1.640625 |
| 3 | 6 | -0.875 | 0.125 | -0.109375 |
| 4 | 5 | 0.125 | -0.875 | -0.109375 |
| 5 | 7 | 1.125 | 1.125 | 1.265625 |
| 6 | 9 | 2.125 | 3.125 | 6.640625 |
| 6 | 8 | 2.125 | 2.125 | 4.515625 |
| | | | | SP = 20.875 |
| Media X<br>($M_x$)<br>3.875 | Media Y<br>($M_y$)<br>5.875 | | | |

## Ejercicio 6

| X | Y | XY |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 |
| 2 | 5 | 10 |
| 3 | 4 | 12 |
| 3 | 6 | 18 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 7 | 35 |
| 6 | 9 | 54 |
| 6 | 8 | 48 |
| 31 | 47 | 203 |
| | | **Totales** |

$$SP = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n}$$

$$= 203 - \frac{31\,(47)}{8}$$

$$= 203 - 182.125$$

$$= 20.875$$

**Ejercicio 7**

| **Puntuaciones** | | **Desviaciones** | | **Desviaciones al cuadrado** | | **Productos** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | **Y** | **X - $M_x$** | **Y - $M_y$** | **$(X - M_x)^2$** | **$(Y - M_y)^2$** | **$(X - M_x)(Y - M_y)$** |
| 2 | 3 | -1.875 | -2.875 | 3.515625 | 8.265625 | 5.390625 |
| 2 | 5 | -1.875 | -0.875 | 3.515625 | 0.765625 | 1.640625 |
| 3 | 4 | -0.875 | -1.875 | 0.765625 | 3.515625 | 1.640625 |
| 3 | 6 | -0.875 | 0.125 | 0.765625 | 0.015625 | -0.109375 |
| 4 | 5 | 0.125 | -0.875 | 0.015625 | 0.765625 | -0.109375 |
| 5 | 7 | 1.125 | 1.125 | 1.265625 | 1.265625 | 1.265625 |
| 6 | 9 | 2.125 | 3.125 | 4.515625 | 9.765625 | 6.640625 |
| 6 | 8 | 2.125 | 2.125 | 4.515625 | 4.515625 | 4.515625 |
| | | | | $SS_x = 18.875$ | $SS_y = 28.875$ | SP = 20.875 |
| Media X ($M_x$) 3.875 | Media Y ($M_y$) 5.875 | | | | | |

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SS_x SS_y)}} = \frac{20.875}{\sqrt[2]{(18.875 \times 28.875)}} = 0.894174$$

## Ejercicio 8

| Puntuaciones | | Desviaciones | | Desviaciones al cuadrado | | Productos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | Y | $X - M_x$ | $Y - M_y$ | $(X - M_x)^2$ | $(Y - M_y)^2$ | $(X - M_x)(Y - M_y)$ |
| 13 | 50 | -7.125 | 12.75 | 50.76563 | 162.5625 | -90.84375 |
| 14 | 53 | -6.125 | 15.75 | 37.51563 | 248.0625 | -96.46875 |
| 16 | 37 | -4.125 | -0.25 | 17.01563 | 0.0625 | 1.03125 |
| 17 | 41 | -3.125 | 3.75 | 9.765625 | 14.0625 | -11.71875 |
| 21 | 35 | 0.875 | -2.25 | 0.765625 | 6.0625 | -1.96875 |
| 25 | 25 | 4.875 | -12.25 | 23.76563 | 150.0625 | -59.71875 |
| 26 | 27 | 5.875 | -10.25 | 34.51563 | 105.0625 | -60.21875 |
| 29 | 30 | 8.875 | -7.25 | 78.76563 | 52.5625 | -64.34375 |
| | | | | $SS_x = 252.875$ | $SS_y = 737.5$ | SP = -384.25 |
| Media X ($M_x$) 20.125 | Media Y ($M_y$) 37.25 | | | | | |

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SS_x SS_y)}} = \frac{-384.25}{\sqrt[2]{(252.875 \times 737.5)}} = -0.88977$$

## Ejercicio 9

El coeficiente de determinación es $r^2$. Si r es –0.57, entonces sólo se eleva al cuadrado el valor de la correlación: $r = -0.57$. $r^2 = 0.32$.

## Ejercicio 10

Las hipótesis serían:

$H_0$: r = 0 (No hay correlación en la población).

$H_1$: $r \neq 0$ (Existe una correlación en la población).

Los grados de libertad serían:

gl = n – 2, en donde el tamaño de la muestra es n = 8.

gl = 8 – 2 = 6.

El valor de la correlación que le corresponde en la tabla con gl = 6 y $\alpha = 0.05$ es 0.754. El valor de la correlación del problema 8 es r = –0.889. Como el valor de la correlación del problema 8 (–0.889) es mayor al valor de la tabla (0.754), entonces se rechaza la hipótesis nula, se acepta la hipótesis alternativa y se concluye que la correlación es estadísticamente significativa, es decir, que la correlación encontrada en la muestra también se identificó en la población.

**Ejercicio 11**

Las hipótesis serían:

$H_0$: $r = 0$ (No hay correlación en la población).

$H_1$: $r \neq 0$ (Existe una correlación en la población).

Los grados de libertad serían:

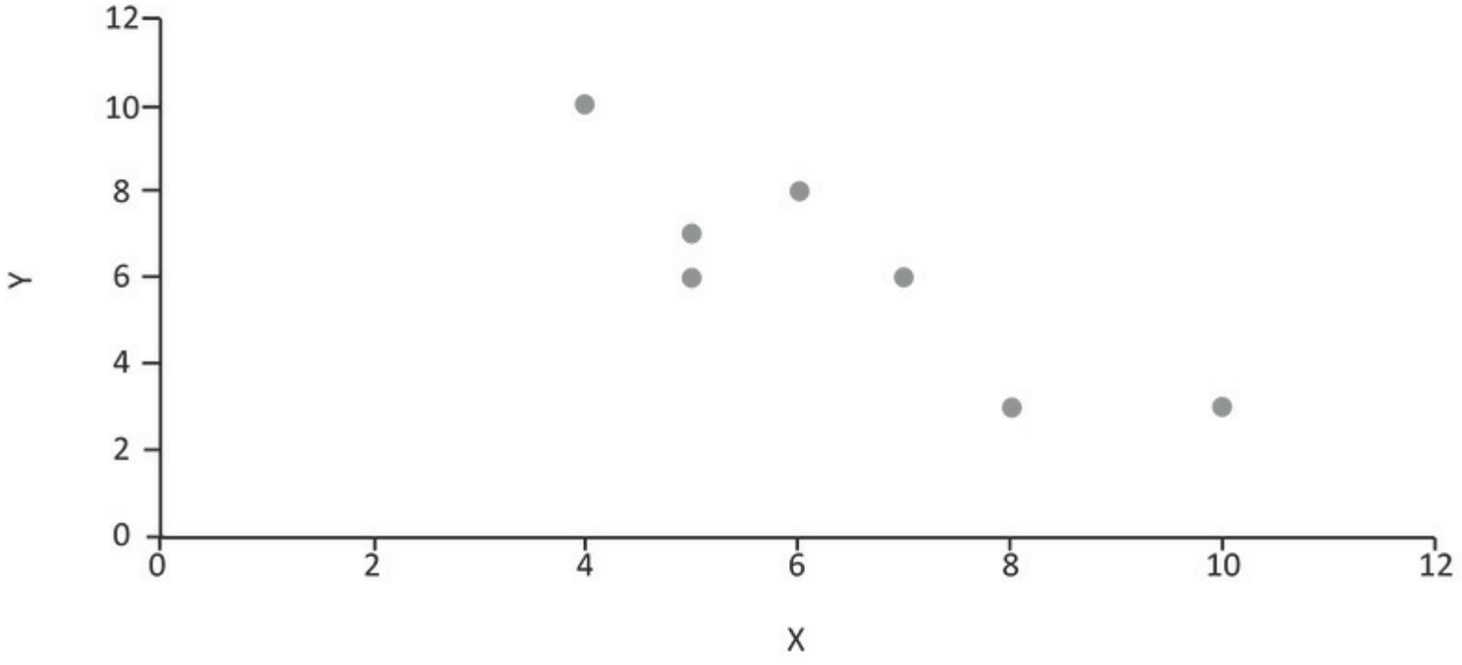
gl = n – 2, en donde el tamaño de la muestra es n = 8.

gl = 30 – 2 = 28.

El valor de la correlación que le corresponde en la tabla con gl = 28 y $\alpha = 0.05$ es 0.361. El valor de la correlación del problema 8 es r = –0.34. Como el valor de la correlación (–0.34) es menor al valor de la tabla (0.361), entonces no se rechaza la hipótesis nula, se rechaza la hipótesis alternativa y se concluye que la correlación no es estadísticamente significativa, es decir, que la correlación que se encontró en la muestra no se identificó en la población.

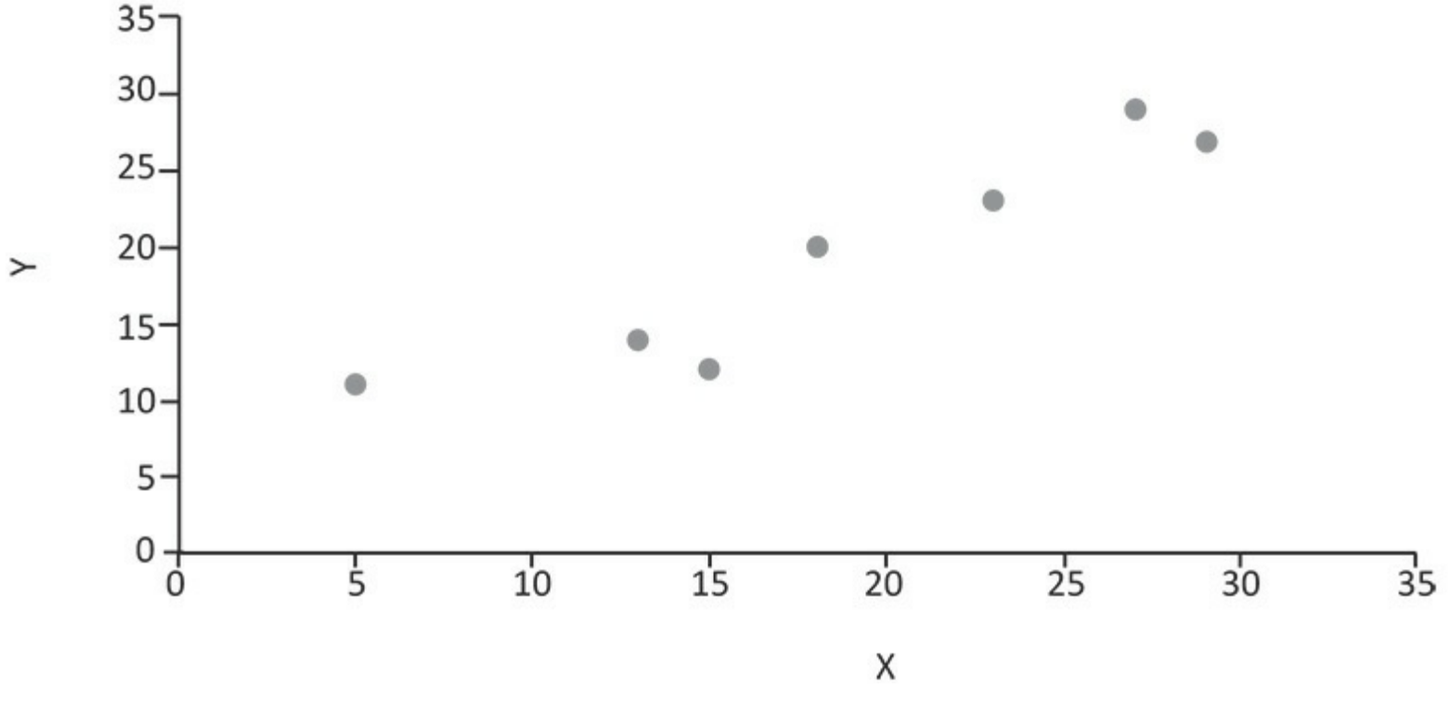
# Solución a los ejercicios voluntarios

**Ejercicio 1**




En cuanto a la dirección, los puntos indican una correlación negativa.

**Ejercicio 2**



En cuanto a la dirección, los puntos indican una correlación positiva.

**Ejercicio 3**

**a)** Correlación entre nutrición y salud: positiva.
**b)** Correlación entre consumo de alcohol y tiempo de reacción para pisar el freno del carro: negativa.
**c)** Correlación entre depresión y desesperanza: positiva.
**d)** Correlación entre actitud conservadora y aceptación de las personas homosexuales: negativa.
**e)** Correlación entre horas dormidas y cansancio durante el día: negativa.
**f)** Correlación entre apoyo social y calidad de vida: positiva.

**Ejercicio 4**

**a)** r = 0.73 o r = 0.49: **r = 0.73**
**b)** r = –0. 81 o r = -0.34: **r = –0. 81**
**c)** r = 0.59 o r = -0.63: **r = –0.63**

**Ejercicio 5**

| **Puntajes** | | **Desviaciones** | | **Productos** |
|---|---|---|---|---|
| **X** | **Y** | **X - $M_x$** | **Y - $M_y$** | **(X - $M_x$) (Y- $M_y$)** |
| 23 | 32 | -17.625 | -16.75 | 295.21875 |
| 28 | 17 | -12.625 | -31.75 | 400.84375 |
| 31 | 25 | -9.625 | -23.75 | 228.59375 |
| 35 | 44 | -5.625 | -4.75 | 26.71875 |
| 42 | 60 | 1.375 | 11.25 | 15.46875 |
| 53 | 53 | 12.375 | 4.25 | 52.59375 |
| 55 | 71 | 14.375 | 22.25 | 319.84375 |
| 58 | 88 | 17.375 | 39.25 | 681.96875 |
| | | | | SP = 2021.25 |
| Media X ($M_x$) 40.625 | Media Y ($M_y$) 48.75 | | | |

**Ejercicio 6**

| X | Y | XY | |
|---|---|---|---|
| 23 | 32 | 736 | |
| 28 | 17 | 476 | |
| 31 | 25 | 775 | |
| 35 | 44 | 1540 | |
| 42 | 60 | 2520 | |
| 53 | 53 | 2809 | |
| 55 | 71 | 3905 | |
| 58 | 88 | 5104 | |
| 325 | 390 | 17865 | **Totales** |

$$SP = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n}$$

$$= 17865 - \frac{325\ (390)}{8}$$

$$= 17865 - 15843.75$$

$$= 2021.25$$

## Ejercicio 7

| Puntuaciones | | Desviaciones | | Desviaciones al cuadrado | | Productos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | Y | $X - M_x$ | $Y - M_y$ | $(X - M_x)^2$ | $(Y - M_y)^2$ | $(X - M_x)(Y - M_y)$ |
| 23 | 32 | -17.625 | -16.75 | 310.6406 | 280.5625 | 295.21875 |
| 28 | 17 | -12.625 | -31.75 | 159.3906 | 1008.063 | 400.84375 |
| 31 | 25 | -9.625 | -23.75 | 92.64063 | 564.063 | 228.59375 |
| 35 | 44 | -5.625 | -4.75 | 31.64063 | 22.5625 | 26.71875 |
| 42 | 60 | 1.375 | 11.25 | 1.890625 | 126.5625 | 15.46875 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 53 | 53 | 12.375 | 4.25 | 153.1406 | 18.0625 | 52.59375 |
| 55 | 71 | 14.375 | 22.25 | 206.6406 | 495.0625 | 319.84375 |
| 58 | 88 | 17.375 | 39.25 | 301.8906 | 1540.563 | 681.96875 |
| | | | | $SS_x$ = 1257.875 | $SS_y$ = 4055.5 | SP = -2021.25 |
| Media X ($M_x$) 40.625 | Media Y ($M_y$) 48.75 | | | | | |

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SS_x SS_y)}} = \frac{2021.25}{\sqrt[2]{(1257.875 \times 4055.5)}} = -0.894909$$

## Ejercicio 8

| **Puntuaciones** | | **Desviaciones** | | **Desviaciones al cuadrado** | | **Productos** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | **Y** | **X - $M_x$** | **Y - $M_y$** | **$(X - M_x)^2$** | **$(Y - M_y)^2$** | **$(X - M_x)(Y - M_y)$** |
| 4 | 32 | -8.875 | 10 | 78.76563 | 100 | -88.75 |
| 7 | 28 | -5.875 | 6 | 34.51563 | 36 | -35.25 |
| 9 | 30 | -3.875 | 8 | 15.01563 | 64 | -31 |
| 10 | 21 | -2.875 | -1 | 8.265626 | 1 | 2.875 |
| 14 | 17 | 1.125 | -5 | 1.265625 | 25 | -5.625 |
| 17 | 20 | 4.125 | -2 | 17.01563 | 4 | -8.25 |
| 19 | 9 | 6.125 | -13 | 37.51563 | 169 | -79.625 |
| 23 | 19 | 10.125 | -3 | 102.5156 | 9 | -30.375 |
| | | | | $SS_x$ = 294.875 | $SS_y$ = 408 | SP = -276 |
| Media X ($M_x$) 12.875 | Media Y ($M_y$) 22 | | | | | |

$$r = \frac{SP}{\sqrt[2]{(SS_x SS_y)}} = \frac{-276}{\sqrt[2]{(294.875 \times 408)}} = -0.79572$$

**Ejercicio 9**

El coeficiente de determinación es $r^2$. Si r es 0.63, entonces sólo se eleva al cuadrado el valor de la correlación que dio como resultado: .63 $r^2$= 0.40.

**Ejercicio 10**

Las hipótesis serían:

$H_0$: $\rho = 0$ (No hay correlación en la población).

$H_1$: $\rho \neq 0$ (Existe una correlación en la población).

Los grados de libertad serían:

gl = n – 2, en donde el tamaño de la muestra es n = 8.

gl = 8 – 2 = 6.

El valor de la correlación que le corresponde en la tabla con gl = 6 y $\alpha = 0.05$ es 0.754. El valor de la correlación del problema 8 es r = –0.889. Como el valor de la correlación del problema 8 (–0.796) es mayor al valor de la tabla (0.754), entonces se rechaza la hipótesis nula, se acepta la hipótesis alternativa y se concluye que la correlación es estadísticamente significativa, es decir, que la correlación que se encontró en la muestra también se identificó en la población.

# GLOSARIO

**Coeficiente de determinación:** mide la proporción de la variabilidad en una variable que puede ser determinada de la relación con otra variable.

**Correlación:** técnica estadística que se usa para medir y describir la relación entre dos variables.

**Correlación negativa:** se presenta cuando las dos variables varían la dirección opuesta.

**Correlación positiva:** se presenta cuando las dos variables varían en la misma dirección.

**Correlación producto-momento de Pearson:** es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, la correlación de Pearson es independiente de la escala de medida de las variables.

**Covarianza:** medida del grado en que dos variables aleatorias se mueven en la misma dirección o en direcciones opuestas, una con respecto a la otra.

**Grados de libertad:** se refiere al número de observaciones de una muestra que pueden tomar cualquier valor posible (que son "libres" de tomar cualquier valor), una vez que se ha calculado previamente y de forma independiente la estimación de determinado parámetro en la muestra o en la población de origen.

**Hipótesis:** es una suposición. Es una idea que quizá no sea verdadera, y esto se determina con base en información previa. Su valor reside en la capacidad para establecer más relaciones entre los hechos y explicar por qué se

producen.

**Nivel de alfa:** se define como la probabilidad de tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera.

**Varianza:** representa una medida de dispersión media de una variable aleatoria X, con respecto de la media aritmética. Puede interpretarse como una medida de variabilidad de la variable.

# BIBLIOGRAFÍA


Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., & Aiken, L. S. (2003). Applied multiple regression/correlational analysis for the behavioral sciences (3rd Ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin*, 112(1), 155-159. doi: 10.1037/0033-2909.112.1.155.

Gerbi, G.B., Habtemariam, T., Tameru, B., Nganwa, D. y Robnett, V. (2009). The Correlation between Alcohol Consumption and Risky Sexual Behaviours among People Living with HIV/AIDS. *Journal of Substance Abuse*, 14(2), 90-100. doi: 10.1080/14659890802624261

Higgins, J. (2006). *The Radical Statistician: A Practical Guide to Unleashing the Power of Applied Statistics in the Real World*. Sacramento, CA, EUA: Prentice Hall Publishing.

Li, Y., Xu, Z. Y Liu, S. (2014). Physical Activity, Self-esteem, and Mental Health in Students from Ethnic Minorities Attending Colleges in China. *Social Behavior and Personality*, 42(4), 529-537. doi: 10.2224/sbp.2014.42.4.529

Martin, R. J., Usdan, S., Cremmens, J. y Vail-Smith, K. (2014). Disorder Gambling and Co-morbidity of Psychiatric Disorders among College Students: An Examination of Problem Drinking, Anxiety and Depression. *Journal of Gambling Studies*, 30(2), 321-333. doi:10.1037/t01528-000

Nowak, K.M. (2002). *Perfil de estrés*. México: El Manual Moderno.

Pérez, J.A. y Martínez, J.H. (2006). Modelos de predicción del desempeño de estudiantes de licenciatura sujetos a instrumentos de evaluación. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(7), 1681-5653.

Salkind, N.J. (2014). *Statistics for People who (think they) Hate Statistics*. Oaks, CA, EUA: Sage Publications.

Vonesh, E.F. (2012). *Generalized Linear and Nonlinear Models for Correlated Data: Theory and Applications Using SAS*. Cary, NC, EUA: SAS Institute.

# Capítulo 6

# RELACIÓN ENTRE VARIABLES: UNA CUALITATIVA CATEGÓRICA Y UNA CUANTITATIVA (Correlación de Spearman)

*Lilián Elizabeth Bosques Brugada, Esteban Jaime Camacho Ruíz, Gabriela Rodríguez Hernández*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo, el alumno aprenderá a medir la relación entre una variable cualitativa y una cuantitativa, utilizando la correlación producto momento de Spearman. Específicamente, el alumno estimará los parámetros y contrastará la hipótesis poniendo en práctica los pasos de la inferencia estadística, hasta calcular los estadísticos e interpretarlos con el fin de rechazar o aceptar la hipótesis nula. Por último, interpretará los resultados, rechazando o aceptando la hipótesis nula.

## COEFICIENTE DE CORRELACIÓN $r_s$ (Rho) DE SPEARMAN

Los análisis de correlación son herramientas estadísticas que se usan para evaluar el grado en que dos variables se relacionan. El propósito del análisis correlacional es poner a prueba una hipótesis de investigación, la cual supone que una variable está correlacionada con otra.

Los análisis de correlación son pertinentes en los casos que se desea conocer cómo se puede comportar una variable, y al mismo tiempo se conoce el comportamiento de otra variable relacionada. Es preciso destacar que ninguna de estas variables se trata como independiente o dependiente. En este sentido, como el investigador no manipula de manera intencional las variables de estudio (diseños no experimentales), en los análisis de correlación no es posible predecir cuál de las variables está afectando a otra. Las correlaciones no tienen un alcance causal, sólo asociativo.

Como se observa en la figura 6-1, los valores de cada uno de los pares de puntuaciones obtenidas por los participantes en cada variable a asociar, se pueden representar mediante una gráfica de dispersión.

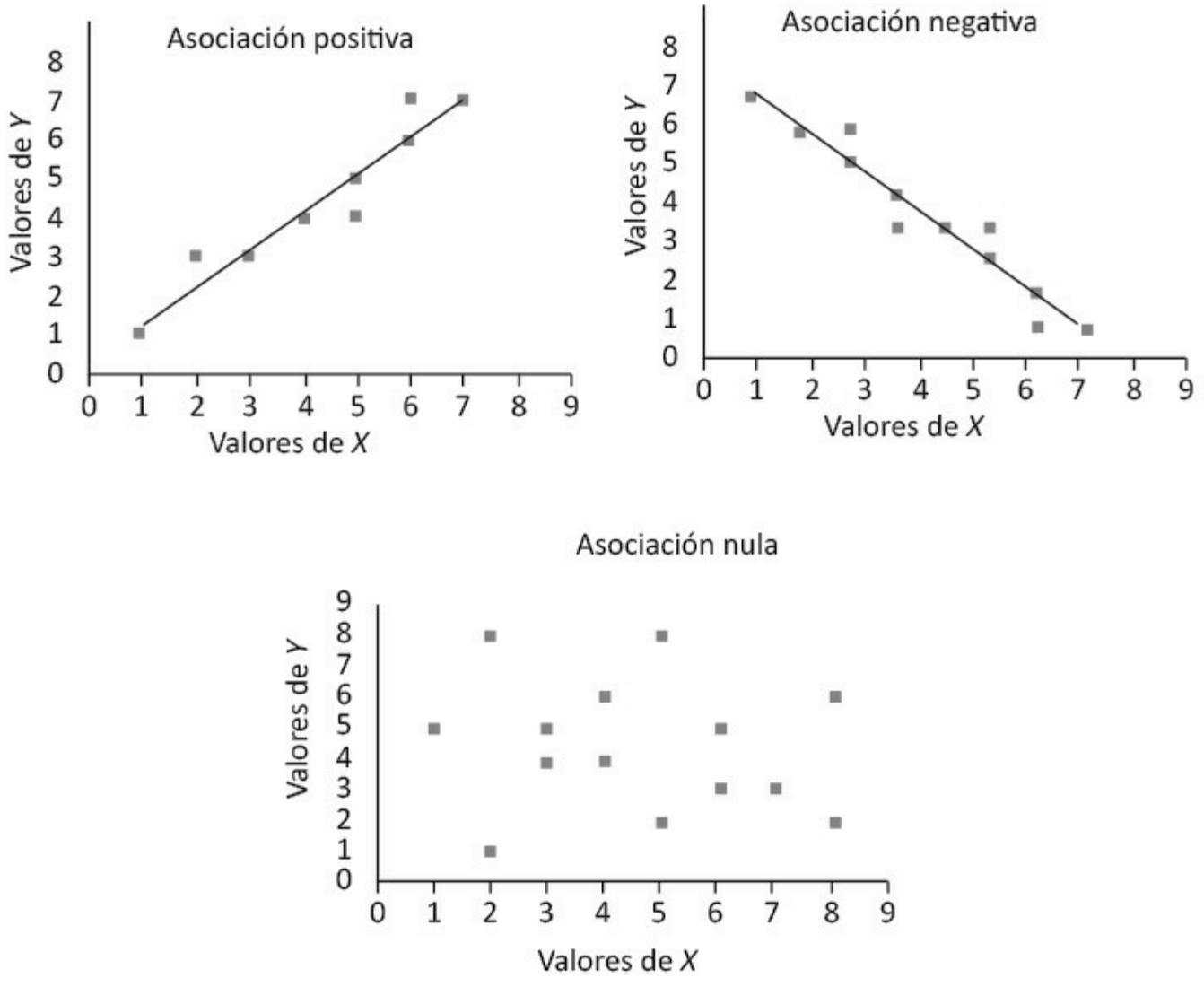



**Figura 6-1.** Representaciones gráficas de la dirección del coeficiente de correlación.

Las puntuaciones están disgregadas en mayor o menor medida, y cada punto representa la puntuación obtenida por cada persona en ambas mediciones. Las correlaciones se expresan por medio de un coeficiente de correlación, el cual es una expresión numérica que toma valores de –1 a +1, los cuales indican la magnitud y dirección de la correlación entre dos variables. En cuanto a la dirección, la asociación entre dos variables puede ser positiva ($r \approx 1$), es decir, puntuaciones altas de una variable corresponden a puntuaciones altas de la otra variable, mientras que en una asociación negativa ($r = -1$), puntuaciones bajas de una variable corresponden a puntuaciones altas de la otra variable. Y por último, la asociación nula ($r \approx 0$) es cuando hay ausencia de asociación entre las puntuaciones de ambas variables.

Ahora bien, con respecto a la magnitud, el coeficiente de correlación representa la potencia de asociación que tienen las variables. En este sentido, Coolican (2005) propone un continuo de la correlación de perfecta (±1), fuerte (> ±.8), moderada (> ±.4), débil (> ±2) y nula (0, ausencia de asociación).

En el capítulo 5 ya se explicó cómo correlacionar variables cuantitativas; sin embargo, también es posible realizar

asociaciones de variables cuando: 1) al menos una de las mediciones fue realizada con escalas de ordinales; 2) o no hay normalidad en la distribución de los datos, es decir, se tienen puntuaciones con valores extremos, lo cual se puede apreciar cuando las desviaciones estándar de las puntuaciones promedio de las variables resultan ser muy amplias. Para tales casos, emplear el análisis estadístico como la *r* de Pearson no es lo más conveniente, y es más viable la aplicación de la prueba no paramétrica de correlación de Spearman ($r_s$).

La **correlación de Spearman** ($r_s$) es un análisis estadístico que evalúa el grado de asociación de dos variables a partir de la transformación de sus puntuaciones en rangos. La correlación $r_s$ es una prueba no paramétrica que se emplea cuando los niveles de medición de las variables de un estudio son cualitativos, o cuando se tienen puntuaciones con desviaciones estándar amplias. Debido a que dicho estadístico se calcula a partir del orden de las puntuaciones originales transformadas en pares de rangos, los resultados de la correlación resultan menos afectados por los valores extremos.

Cuando se emplean los rangos, tanto las puntuaciones altas como las bajas ejercen menos influencia, ya que no importa lo baja que sea una puntuación, pues su rango nunca puede ser inferior a 1; además, tampoco importa lo alta que sea una puntuación, ya que su rango no puede exceder el número total de puntuaciones (N).

# PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Si, por ejemplo, se pretende realizar un estudio cuyo propósito es analizar la relación entre el grado de inhabilidad social y la frecuencia con que se han ejercido conductas violentas en una muestra de adultos varones en situación de pareja.

Al observar diversos casos se ha identificado que en un conflicto crónico de pareja se encuentran implicadas habilidades sociales insuficientes o inadecuadas para la solución de problemas. Y cuando el conflicto persiste hay consecuencias importantes sobre la salud sexual, afectiva y mental, a la vez que aumenta la probabilidad de aparición de conductas de violencia de género, en particular del hombre hacia la mujer. Esta situación es entendida a partir de las diferencias en las habilidades de socialización latentes en culturas como la de México, en la cual se ha reforzado una masculinidad exacerbada.

Entonces, en función del planteamiento del problema se puede pensar que a mayor grado de inhabilidad social, mayor frecuencia de conductas violentas. Es importante considerar que en el estudio realizado se aplicaron dos instrumentos de medición de cada una de las variables y se obtuvieron las puntuaciones que se muestran en la tabla 6-1.

**Tabla 6-1. Puntuaciones observadas de inhabilidad social y conducta violenta de los participantes**

| Participante | Inhabilidad social (X) | Conducta violenta (Y) |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 12 |
| 2 | 7 | 13 |
| 3 | 8 | 17 |
| 4 | 9 | 13 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 |
| 6 | 10 | 16 |
| 7 | 10 | 17 |
| 8 | 11 | 17 |
| 9 | 11 | 13 |
| 10 | 12 | 18 |
| 11 | 13 | 19 |
| 12 | 15 | 19 |
| 13 | 17 | 20 |
| 14 | 17 | 21 |
| 15 | 17 | 22 |
| 16 | 18 | 23 |
| 17 | 19 | 24 |
| 18 | 19 | 25 |

# ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Una vez que se han determinado las variables a estudiar con base en el planteamiento de un problema, entonces es posible someter a prueba una hipótesis de significación correlacional. En este sentido, la hipótesis nula indicaría que el porcentaje de probabilidad de las puntuaciones observadas corresponde a una variación debida al azar (véase la asociación nula en la figura 6-1). Entonces se determina si la probabilidad es bastante baja (con un nivel de al menos $r < .05$) como para rechazar la hipótesis nula y, por lo tanto, es posible aceptar la hipótesis alterna que establecería la correlación significativa de las variables de estudio.

# PASOS DE LA INFERENCIA

## Selección de la prueba, comprobación de supuestos

De acuerdo con el tipo de datos que se tienen, es decir, una variable cualitativa (inhabilidad social) en escala ordinal y una variable cuantitativa (frecuencia de conductas violentas), no se cumple con los criterios necesarios para las pruebas paramétricas; y por tal razón se determina la pertinencia de aplicar la correlación de Spearman.

## Establecer las hipótesis estadísticas

En la prueba de correlación de Spearman, la hipótesis nula establece que las puntuaciones observadas en las dos variables (cada una de ellas ordenadas por rangos) no son correspondientes, es decir, que la distribución de las puntuaciones es al azar, y la forma de expresión estadística sería la siguiente:

$$\text{Hipótesis nula } (H_0): r_s = 0$$

En cambio, si la hipótesis nula se sometiera a prueba y fuera rechazada, entonces se acepta la hipótesis alterna que establece una asociación entre los pares de puntuaciones ordenadas por rangos, tal como se expresa a continuación:

$$\text{Hipótesis alterna } (H_1): r_s \neq 0$$

## Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico

Como se observa en la figura 6-2, con base en la distribución de frecuencias de las respuestas emitidas por cada uno de los participantes en las variables de estudio, no es posible apreciar una distribución normal de las puntuaciones.

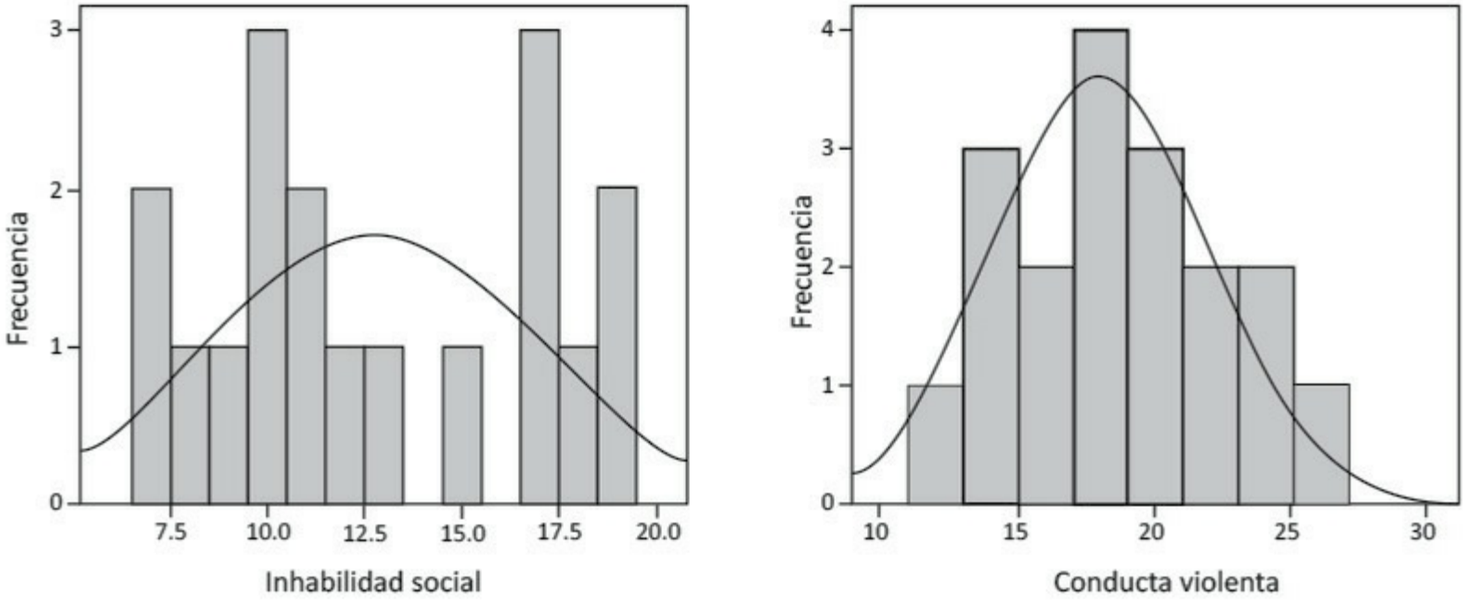



**Figura 6-2.** Gráficos de dispersión de las frecuencias de asertividad y conducta violenta.

Se esperaría que en ambos casos se apreciaran curvas mesocúrticas, es decir, la curva no debe estar tan elevada ni

tan aplanada. En particular, la distribución de frecuencias del ejemplo, muestran curvas menos picudas (leptocúrtica).

En estadística inferencial se plantea que en la probabilidad de que se presente un grado de correlación entre variables debe existir por lo menos 95% de certeza, es decir, sólo se aceptaría 5% de probabilidad de que el resultado de la correlación se debiera al azar.

El coeficiente de correlación se obtiene por medio de la fórmula de Spearman y se compara con el valor crítico preestablecido en función del nivel de significancia estadística. De acuerdo con Gautheir (2001) cuando se realiza una análisis de correlación de Spearman con un tamaño de muestra de hasta 30 participantes, el valor crítico se determina de acuerdo al número de pares de datos, en cambio si el análisis de correlación de Spearman consta de más de 30 pares de datos, el valor crítico es calculado a partir del estadístico t y después comparado con la tabla de valores de t con n-2 grados de libertad (gl).

# Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad

Es momento de saber cómo se realiza el cálculo de la $r_s$ de Spearman. Una vez que se ha elegido la herramienta estadística más apropiada, con base en el tipo de datos que se tiene, y se ha optado por la correlación no paramétrica de Spearman, es preciso considerar la aplicación de su fórmula, la cual se presenta a continuación:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

Donde:

d = Diferencia entre los rangos de cada par de puntuaciones.

N = Número total de pares de puntuaciones.

El primer paso es ordenar las puntuaciones por pares y en orden progresivo en cuanto a su magnitud; a la puntuación más baja se la da el rango 1 y así sucesivamente hasta la puntuación más alta del rango (tabla 6-2). Si dos o más puntuaciones son iguales es necesario darles la media de los rangos. A continuación se obtienen las diferencias entre los rangos de puntuaciones observadas y éstas se elevan al cuadrado.

**Tabla 6-2. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para obtener el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 7 | 12 | 1.5 | 1 | 0.5 | 0.25 |
| 2 | 7 | 13 | 1.5 | 3 | –1.5 | 2.25 |
| 3 | 8 | 17 | 3 | 8 | –5 | 25 |
| 4 | 9 | 13 | 4 | 3 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 6 | 5 | 1 | 1 |
| 6 | 10 | 16 | 6 | 6 | 0 | 0 |
| 7 | 10 | 17 | 6 | 8 | –2 | 4 |
| 8 | 11 | 17 | 8.5 | 8 | 0.5 | 0.25 |
| 9 | 11 | 13 | 8.5 | 3 | 5.5 | 30.25 |
| 10 | 12 | 18 | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 11 | 13 | 19 | 11 | 11.5 | –0.5 | 0.25 |
| 12 | 15 | 19 | 12 | 11.5 | 0.5 | 0.25 |
| 13 | 17 | 20 | 14 | 13 | 1 | 1 |
| 14 | 17 | 21 | 14 | 14 | 0 | 0 |
| 15 | 17 | 22 | 14 | 15 | –1 | 1 |
| 16 | 18 | 23 | 16 | 16 | 0 | 0 |
| 17 | 19 | 24 | 17.5 | 17 | 0.5 | 0.25 |
| 18 | 19 | 25 | 17.5 | 18 | –0.5 | 0.25 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 67.00$ |

Nota: X = puntuaciones de una de las variables (**IS**), Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable (**CV**), *d* = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

Luego se procede a sustituir los valores de la fórmula:

**a)** $$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N\,(N^2 - 1)}$$

**b)** $$r_s = 1 - \frac{6 \times 67}{18\,(18^2 - 1)}$$

**c)** $$r_s = 1 - \frac{402}{18\,(324 - 1)}$$

**d)** $$r_s = 1 - \frac{402}{18 \times 323}$$

**e)** $$r_s = 1 - \frac{402}{5814}$$

**f)** $$r_s = 1 - 0.07$$

**g)** $$r_s = .93$$

Por último, es necesario conocer qué probabilidad hay de que el resultado obtenido se deba al azar. Entonces se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2, quedando de la siguiente forma:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 18 - 2 = 16$

Ahora, en la tabla B del Apéndice se busca el valor crítico de *r* ubicado en la línea correspondiente al valor de los grados de libertad obtenido. De acuerdo con este indicador, se establece la toma de decisión, en la cual se plantea que la correlación es significativa si:

$$r_c \geq r_o$$

Donde:
$r_o$ = Valor obtenido en la derivación de la fórmula.

$r_c$ = Valor obtenido en la tabla de valores críticos de significancia de *r*.

En este caso, la columna de significancia al .01 indica que con 16 grados de libertad se obtiene un valor de por lo menos .5897, así como el siguiente resultado:

$$.93 > .5897$$

## Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$

De acuerdo con el resultado obtenido, en donde el valor crítico de *r* fue menor al valor derivado de la fórmula, se puede rechazar la hipótesis nula, es decir, hay una correlación significativa ($\rho < .01$) de las variables, esto es, a mayor inhabilidad social, mayores conductas violentas.

## Representación e interpretación

Con base en el resultado se puede comprender que los participantes que tuvieron puntuaciones bajas de inhabilidad social reportaron una menor práctica de conductas violentas y, los participantes con puntuaciones altas de inhabilidad social correspondieron frecuencias altas de ejecución de conductas violentas.

En la figura 6-3, se aprecia el grado de correspondencia de los pares de puntuaciones de las variables de estudio.

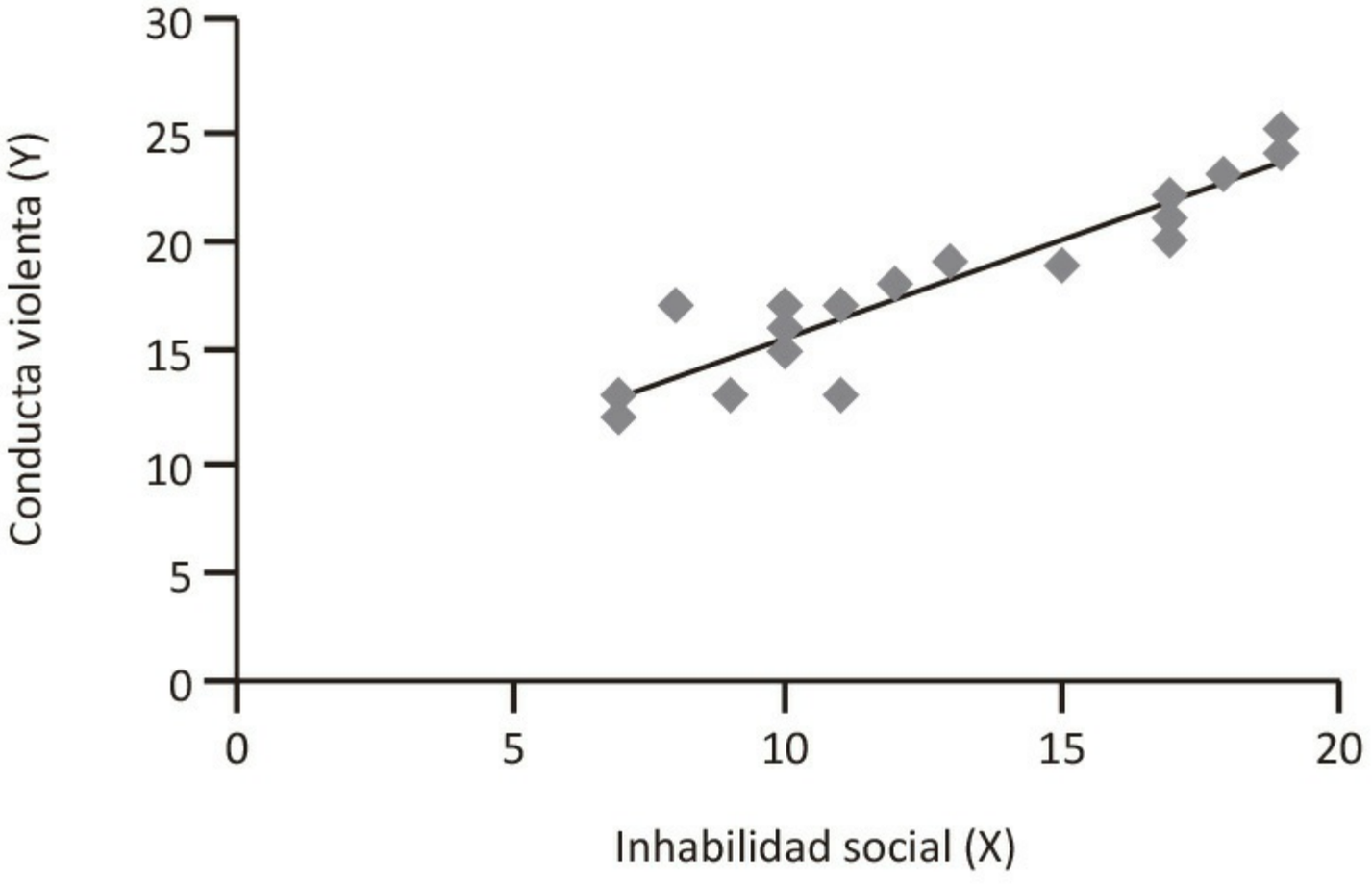



**Figura 6-3.** Gráfico de dispersión de las variables de estudio.

Además, se puede observar que los pares de puntuaciones se encuentran próximos a la recta, es decir, no están muy dispersos.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

1. **Presentación del problema.** La percepción de la imagen corporal puede ser influida por el modelo estético corporal que presenta la sociedad y los medios de comunicación, de tal manera que existe la posibilidad de tener insatisfacción corporal debido a estos estereotipos.

   **Lógica de la solución:**

   **a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.

   **b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).

   **c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).

**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**2. Presentación del problema.** La dismorfia muscular se presenta debido a una distorsión de la imagen corporal relacionada con el tamaño muscular; cuando la persona percibe este aspecto de manera equivocada, entonces se presenta insatisfacción muscular.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**3. Presentación del problema.** La presencia de una baja autoestima, como resultado de una percepción errónea de la propia imagen corporal, a su vez genera insatisfacción corporal y puede ser un factor condicionante de un trastorno de la conducta alimentaria como la bulimia.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**4. Presentación del problema.** Las actitudes alimentarias determinan el desarrollo de un trastorno del comportamiento alimentario como la bulimia.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**5. Presentación del problema.** Al determinar la percepción de la imagen corporal, la autoestima puede influir en el desarrollo de la dismorfia muscular.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**6. Presentación del problema.** La influencia del modelo estético corporal puede determinar la presencia de insatisfacción corporal y, por lo tanto, el desarrollo de dismorfia muscular.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**7. Presentación del problema.** Los factores emocionales influyen en la alimentación de los niños.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**8. Presentación del problema.** La influencia del modelo estético corporal que exponen los medios de comunicación es determinante de bulimia.

**Lógica de la solución:**

**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.

**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**9. Presentación del problema.** Las actitudes alimentarias determinan la percepción de la imagen corporal.
**Lógica de la solución:**
**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

**10. Presentación del problema.** Los factores emocionales influyen en la alimentación de los niños.
**Lógica de la solución:**
**a)** Determinar las variables que se plantean en el problema y con qué se evaluaron.
**b)** Seleccionar las cantidades totales y asignarlas al valor de (X) y (Y).
**c)** Realizar una tabla con los valores de puntuaciones observadas (X, Y), rangos (X, Y) y diferencias (d, d^2).
**d)** Realizar la sumatoria de d^2.
**e)** Sustituir los valores en la fórmula.
**f)** Determinar el resultado.
**g)** Expresar el resultado, en la escala correspondiente, según lo esperado de acuerdo con la Correlación $r_s$ de Spearman.

# Ejercicios voluntarios

Señale si las siguientes preguntas son ciertas o falsas y justifique su respuesta:

**1.** ¿El coeficiente *rho* de Spearman es una medida de asociación donde se requiere que al menos una de las variables se encuentre en escala ordinal o no exista normalidad en la distribución de los datos?
**2.** ¿La correlación de Spearman ($r_s$) es un análisis estadístico que evalúa el grado de asociación de dos variables a partir de la transformación de sus puntuaciones en rangos?
**3.** La significancia de este coeficiente de correlación se interpreta de forma diferente a otros coeficientes de correlación.
**4.** ¿Este coeficiente varía de –1.0 a +1.0?
**5.** La hipótesis: "El género está relacionado con la preferencia por las películas de acción o las románticas", ¿se puede probar mediante el coeficiente *rho* de Spearman?

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

**Ejercicio 1**

Cálculos necesarios para la solución

X = BSQ

Y = CIMEC

**Tabla 6-1. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 37 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 40 | 21 | 2 | 18.5 | –16.5 | 272.25 |
| 3 | 42 | 76 | 3.5 | 30 | –26.5 | 702.25 |
| 4 | 42 | 8 | 3.5 | 5 | –1.5 | 2.25 |
| 5 | 47 | 16 | 5.5 | 13.5 | –8 | 64 |
| 6 | 47 | 8 | 5.5 | 5 | 0.5 | 0.25 |
| 7 | 51 | 10 | 8 | 8 | 0 | 0 |
| 8 | 51 | 19 | 8 | 16 | –8 | 64 |
| 9 | 51 | 10 | 8 | 8 | 0 | 0 |
| 10 | 52 | 11 | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 11 | 56 | 6 | 11 | 2 | 9 | 81 |
| 12 | 58 | 24 | 12 | 24.5 | –12.5 | 156.25 |
| 13 | 60 | 14 | 13 | 12 | 1 | 1 |
| 14 | 63 | 13 | 14 | 11 | 3 | 9 |
| 15 | 65 | 7 | 15 | 3 | 12 | 144 |
| 16 | 71 | 18 | 16 | 15 | 1 | 1 |
| 17 | 73 | 10 | 17 | 8 | 9 | 81 |
| 18 | 77 | 16 | 18 | 13.5 | 4.5 | 20.25 |
| 19 | 83 | 23 | 19 | 22 | –3 | 9 |
| 20 | 84 | 8 | 20 | 5 | 15 | 225 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 87 | 25 | 21 | 26 | –5 | 25 |
| 22 | 90 | 23 | 22 | 22 | 0 | 0 |
| 23 | 91 | 27 | 23 | 27.5 | –4.5 | 20.25 |
| 24 | 96 | 27 | 24.5 | 27.5 | –3 | 9 |
| 25 | 96 | 21 | 24.5 | 18.5 | 6 | 36 |
| 26 | 97 | 23 | 26 | 22 | 4 | 16 |
| 27 | 98 | 24 | 27 | 24.5 | 2.5 | 6.25 |
| 28 | 100 | 32 | 28 | 29 | –1 | 1 |
| 29 | 117 | 22 | 29 | 20 | 9 | 81 |
| 30 | 126 | 20 | 30 | 17 | 13 | 169 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 2\ 196$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(21.96)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{131.76}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{131.76}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{131.76}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.004885$$

$$r_s = .995115$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso la columna de significancia a .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.995115 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue menor al valor calculado de la

fórmula, se rechaza la hipótesis nula, lo cual expresa que hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las variables, es decir, hay una asociación entre las variables.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

Debido a que los medios de comunicación han promovido un modelo corporal de delgadez, el adolescente ha adquirido la idea de que el cuerpo delgado es el ideal; además, esto ha provocado que presente insatisfacción corporal y persiga el objetivo de la delgadez de cualquier modo posible (Barriguete-Meléndez *et al*., 2009).

Si a esto se le agrega que, como se ha mencionado, los medios de comunicación promueven un cuerpo delgado; mientras que las personas cercanas al sujeto, como la familia y amigos, influyen en esta percepción, se da entonces una insatisfacción con la imagen corporal que contribuye a que se presenten conductas, comportamientos y actitudes relacionados con la dieta y el peso, que a su vez afectan de manera directa al propio cuerpo (Rivarola, 2003).

## Ejercicio 2

Cálculos necesarios para la solución

X = DMS

Y = SMAQ

**Tabla 6-2. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | d | $d^2$ |
| 1 | 17 | 1 | 1 | 2.5 | –1.5 | 2.25 |
| 2 | 25 | 7 | 2.5 | 6.5 | –4 | 16 |
| 3 | 25 | 0 | 2.5 | 1 | 1.5 | 2.25 |
| 4 | 27 | 5 | 4.5 | 4 | 0.5 | 0.25 |
| 5 | 27 | 1 | 4.5 | 2.5 | 2 | 4 |
| 6 | 31 | 11 | 6 | 10 | –4 | 16 |
| 7 | 33 | 15 | 7 | 14.5 | –7.5 | 56.25 |
| 8 | 34 | 15 | 8.5 | 14.5 | –6 | 36 |
| 9 | 34 | 6 | 8.5 | 5 | 3.5 | 12.25 |
| 10 | 35 | 22 | 10.5 | 21.5 | –11 | 121 |
| 11 | 35 | 17 | 10.5 | 16.5 | –6 | 36 |
| 12 | 36 | 21 | 12 | 20 | –8 | 64 |
| 13 | 38 | 13 | 13 | 11 | 2 | 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 39 | 9 | 15.5 | 9 | 6.5 | 42.25 |
| 15 | 39 | 14 | 15.5 | 12.5 | 3 | 9 |
| 16 | 39 | 30 | 15.5 | 25 | –9.5 | 90.25 |
| 17 | 39 | 26 | 15.5 | 23 | –7.5 | 56.25 |
| 18 | 40 | 17 | 18 | 16.5 | 1.5 | 2.25 |
| 19 | 41 | 14 | 19 | 12.5 | 6.5 | 42.25 |
| 23 | 49 | 8 | 23 | 8 | 15 | 225 |
| 24 | 50 | 19 | 24 | 18.5 | 5.5 | 30.25 |
| 22 | 47 | 29 | 22 | 24 | –2 | 4 |
| 23 | 49 | 8 | 23 | 8 | 15 | 225 |
| 24 | 50 | 19 | 24 | 18.5 | 5.5 | 30.25 |
| 25 | 51 | 38 | 25 | 28 | –3 | 9 |
| 26 | 56 | 22 | 26 | 21.5 | 4.5 | 20.25 |
| 27 | 58 | 7 | 27 | 6.5 | 20.5 | 420.25 |
| 28 | 67 | 33 | 28 | 27 | 1 | 1 |
| 29 | 69 | 47 | 29 | 30 | –1 | 1 |
| 30 | 73 | 41 | 30 | 29 | 1 | 1 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 1\ 366.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(1366.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{8199}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{8199}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{8199}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.304004$$

$$r_s = .695996$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl$ = N – 2
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia a .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo a los grados de libertad, se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.695996 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue menor al valor calculado de la

fórmula, se puede rechazar la hipótesis nula, lo cual expresa que hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las variables, es decir, hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

La dismorfia muscular se presenta debido a una distorsión de la imagen corporal relacionada con el tamaño muscular; cuando éste se presenta de manera equivocada, entonces se presenta insatisfacción muscular. De tal manera que esto provoca que la persona afectada lleve a cabo de manera compulsiva ejercicios para aumentar la musculatura, además de manifestaciones de verificación frente al espejo (González, Fernández, y Contreras, 2012).

## Ejercicio 3

Cálculos necesarios para la solución

X = PAI

Y = BULIT

**Tabla 6-3. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 61 | 65 | 1 | 13.5 | –12.5 | 156.25 |
| 2 | 64 | 50 | 2 | 4 | –2 | 4 |
| 3 | 65 | 75 | 3 | 22 | –19 | 361 |
| 4 | 66 | 82 | 4 | 28 | –24 | 576 |
| 5 | 70 | 97 | 5.5 | 30 | –24.5 | 600.25 |
| 6 | 70 | 60 | 5.5 | 9.5 | –4 | 16 |
| 7 | 71 | 88 | 7 | 29 | –22 | 484 |
| 8 | 72 | 51 | 8 | 5.5 | 2.5 | 6.25 |
| 9 | 73 | 80 | 9.5 | 26.5 | –17 | 289 |
| 10 | 73 | 71 | 10 | 18.5 | –8.5 | 72.25 |
| 11 | 74 | 60 | 11 | 9.5 | 1.5 | 2.25 |
| 12 | 77 | 57 | 12 | 7 | 5 | 25 |
| 13 | 80 | 79 | 13 | 25 | –12 | 144 |
| 14 | 83 | 63 | 14.5 | 12 | 2.5 | 6.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 83 | 78 | 14.5 | 23.5 | –9 | 81 |
| 16 | 86 | 74 | 16 | 21 | –5 | 25 |
| 17 | 87 | 66 | 18 | 15 | 3 | 9 |
| 18 | 87 | 72 | 18 | 20 | –2 | 4 |
| 19 | 87 | 80 | 18 | 26.5 | –8.5 | 72.25 |
| 21 | 92 | 68 | 21 | 16 | 5 | 25 |
| 22 | 97 | 78 | 22.5 | 23.5 | –1 | 1 |
| 23 | 97 | 48 | 22.5 | 2 | 20.5 | 420.25 |
| 24 | 98 | 65 | 24 | 13.5 | 10.5 | 110.25 |
| 25 | 100 | 58 | 25 | 8 | 17 | 289 |
| 26 | 101 | 46 | 26.5 | 1 | 25.5 | 650.25 |
| 27 | 101 | 69 | 26.5 | 17 | 9.5 | 90.25 |
| 28 | 103 | 71 | 28.5 | 18.5 | 10 | 100 |
| 29 | 103 | 49 | 28.5 | 3 | 25.5 | 650.25 |
| 30 | 104 | 62 | 30 | 11 | 19 | 361 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 5\ 841.25$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(5841.25)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{35047.5}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{35047.5}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{35047.5}{26970}$$

$$r_s = 1 - 1.299499$$

$$r_s = -.299499$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$-.299499 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue mayor al valor calculado de la fórmula, se puede aceptar la hipótesis nula, lo cual expresa que no hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, no hay una asociación entre las variables.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

La preocupación por el peso y la insatisfacción por la imagen corporal son dos factores en los que se asienta la baja autoestima como un producto de inferencias y creencias que son sujetas a distorsiones (Moreno y Ortiz, 2009).

En las mujeres, el aspecto físico ha cobrado gran importancia para la valoración del atractivo físico, el cual es muy inflexible, así como un indicador del autoconcepto y, por lo tanto, de la autoestima. La cultura ha valorado a la delgadez como un atractivo físico y no como una característica, lo cual ha propiciado que el modelo delgado desarrolle un culto al cuerpo, como una forma de éxito y de aceptación social; sin embargo, ha afectado negativamente a la salud de la mujer (Toro, 1988).

Los medios de comunicación suelen ofrecer información confusa acerca de los productos mostrando una utopía. Dicha información tiene mayor impacto en cierta población que suele ser más vulnerable, como los adolescentes, y debido a que está mal interpretada, puede contribuir a desequilibrios en la alimentación de la población, así como a la generación de ciertas patologías como los trastornos del comportamiento alimentario (TCA; Bolaños, 2009).

## Ejercicio 4

Cálculos necesarios para la solución

X = EAT

Y = BULIT

**Tabla 6-4. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas ordenadas en rangos para obtención del cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 6 | 54 | 1.5 | 8.5 | –7 | 49 |
| 2 | 6 | 50 | 1.5 | 4.5 | –3 | 9 |
| 3 | 7 | 56 | 3 | 10.5 | –7 | 49 |
| 4 | 9 | 63 | 5 | 23 | –18 | 324 |
| 5 | 9 | 63 | 5 | 23 | –18 | 324 |
| 6 | 9 | 48 | 5 | 1 | 4 | 16 |
| 7 | 10 | 65 | 8 | 25.5 | –17.5 | 306.25 |
| 8 | 10 | 63 | 8 | 23 | –15 | 240 |
| 9 | 10 | 66 | 8 | 27 | –19 | 361 |
| 11 | 12 | 56 | 11.5 | 10.5 | 1 | 1 |
| 12 | 12 | 54 | 11.5 | 8.5 | 3 | 9 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 13 | 49 | 13.5 | 2.5 | 11 | 121 |
| 14 | 13 | 65 | 13.5 | 25.5 | –12 | 144 |
| 15 | 14 | 59 | 16.5 | 17.5 | –1 | 1 |
| 16 | 14 | 58 | 16.5 | 15.5 | 1 | 1 |
| 17 | 14 | 50 | 16.5 | 4.5 | 12 | 144 |
| 18 | 14 | 62 | 16.5 | 20.5 | –4 | 16 |
| 19 | 16 | 57 | 19.5 | 13 | 6.5 | 42.25 |
| 20 | 16 | 57 | 19.5 | 13 | 6.5 | 42.25 |
| 21 | 17 | 58 | 21 | 15.5 | 5.5 | 30.25 |
| 22 | 18 | 61 | 22.5 | 19 | 3.5 | 12.25 |
| 23 | 18 | 52 | 22.5 | 6.5 | 16 | 256 |
| 24 | 19 | 57 | 24 | 13 | 11 | 121 |
| 25 | 20 | 59 | 25 | 17.5 | 7.5 | 56.25 |
| 26 | 23 | 72 | 26 | 29 | –3 | 9 |
| 27 | 29 | 67 | 27.5 | 28 | –0.5 | 0.25 |
| 28 | 29 | 62 | 27.5 | 20.5 | 7 | 49 |
| 29 | 32 | 79 | 29 | 30 | –1 | 1 |
| 30 | 35 | 49 | 30 | 2.5 | 27.5 | 756.25 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 3\ 495.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(3495.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{20973}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{20973}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{20973}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.07776$$

$$r_s = .2224$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.2224 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**

Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue mayor al valor calculado de la fórmula, se puede aceptar la hipótesis nula, lo cual expresa que no hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, no hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

La salud es un aspecto que resulta afectado por todo lo que rodea al individuo, y uno de los factores es la alimentación, la cual es modificada por la influencia de los estilos de vida de la sociedad; por ello, una educación nutricional podría contribuir a la adquisición de conductas y actitudes alimentarias correctas, con la finalidad de llevar a cabo hábitos saludables para la mejora de la calidad de vida. Los medios de comunicación en la actualidad son una herramienta mediante la cual se expresan conductas sobre alimentación (Bolaños, 2009).

La bulimia nerviosa se caracteriza por episodios frecuentes y recurrentes en los que se ingieren cantidades extremadamente grandes de comida y existe una sensación de falta de control sobre estos episodios. A este atracón le sigue un tipo de comportamiento que "compensa" el exceso de comida, como vómitos forzados o abuso de laxantes o diuréticos, ayunos, exceso de ejercicios o una combinación de estos comportamientos (INSM, s/f).

## Ejercicio 5

Cálculos necesarios para la solución

X = ADONIS

Y = RSE

**Tabla 6-5. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 0 | 25 | 4.5 | 1 | 3.5 | 12.25 |
| 2 | 0 | 33 | 4.5 | 11.5 | –7 | 49 |
| 3 | 0 | 40 | 4.5 | 27 | –22.5 | 506.25 |
| 4 | 0 | 40 | 4.5 | 27 | –22.5 | 506.25 |
| 5 | 0 | 40 | 4.5 | 27 | –22.5 | 506.25 |
| 6 | 0 | 35 | 4.5 | 15 | –10.5 | 110.25 |
| 8 | 0 | 39 | 4.5 | 22.5 | –18 | 324 |
| 9 | 1 | 39 | 11.5 | 22.5 | –11 | 121 |
| 10 | 1 | 36 | 11.5 | 17.5 | –6 | 36 |
| 11 | 1 | 30 | 11.5 | 6.5 | 5 | 25 |
| 12 | 1 | 37 | 11.5 | 20 | –8.5 | 72.25 |
| 13 | 1 | 31 | 11.5 | 9 | 2.5 | 6.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 1 | 37 | 11.5 | 20 | –8.5 | 72.25 |
| 15 | 2 | 40 | 15.5 | 27 | –11.5 | 132.25 |
| 16 | 2 | 40 | 15.5 | 27 | –11.5 | 132.25 |
| 17 | 3 | 35 | 18.5 | 15 | 3.5 | 12.25 |
| 18 | 3 | 31 | 18.5 | 9 | 9.5 | 90.25 |
| 19 | 3 | 36 | 18.5 | 17.5 | 1 | 1 |
| 20 | 3 | 34 | 18.5 | 13 | 5.5 | 30.25 |
| 21 | 4 | 29 | 21 | 4.5 | 16.5 | 272.25 |
| 22 | 5 | 30 | 22.5 | 6.5 | 16 | 256 |
| 23 | 5 | 40 | 22.5 | 27 | –4.5 | 20.25 |
| 24 | 6 | 40 | 24 | 27 | –3 | 9 |
| 25 | 8 | 29 | 25.5 | 4.5 | 21 | 441 |
| 26 | 8 | 31 | 25.5 | 9 | 16.5 | 272.25 |
| 27 | 9 | 35 | 27 | 15 | 12 | 144 |
| 28 | 11 | 37 | 28 | 20 | 8 | 64 |
| 29 | 12 | 33 | 29 | 11.5 | 17.5 | 306.25 |
| 30 | 15 | 28 | 30 | 3 | 27 | 729 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 5\ 265.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(5265.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{31593}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{31593}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{31593}{26970}$$

$$r_s = 1 - 1.171412$$

$$r_s = -.171412$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$-.171412 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue mayor al valor calculado de la fórmula, se puede aceptar la hipótesis nula, lo cual expresa que no hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, no hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

Ante el constante ataque que hacen los medios de comunicación para imponer los estándares de belleza, y un desconocimiento general de la cultura del deporte por parte de la población, se presenta el riesgo de presentar problemas que afectan el estado físico y emocional de los individuos; por ejemplo, problemas de la conducta como la obsesión por la musculatura y la dismorfia muscular (García Fonseca, Camacho, Escoto, y Barco, 2012).

**Ejercicio 6**

Cálculos necesarios para la solución

X = ADONIS

Y = CIMEC

**Tabla 6-6. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 0 | 17 | 4.5 | 30 | –25.5 | 650.25 |
| 2 | 0 | 4 | 4.5 | 11.5 | –7 | 49 |
| 3 | 0 | 4 | 4.5 | 11.5 | –7 | 49 |
| 4 | 0 | 0 | 4.5 | 2.5 | 2 | 4 |
| 5 | 0 | 0 | 4.5 | 2.5 | 2 | 4 |
| 6 | 0 | 4 | 4.5 | 11.5 | –7 | 49 |
| 7 | 0 | 3 | 4.5 | 7 | –2.5 | 6.25 |
| 8 | 0 | 4 | 4.5 | 11.5 | –7 | 49 |
| 9 | 1 | 9 | 11.5 | 20.5 | –9 | 81 |
| 10 | 1 | 7 | 11.5 | 16 | –4.5 | 20.25 |
| 11 | 1 | 9 | 11.5 | 20.5 | -9 | 81 |
| 12 | 1 | 3 | 11.5 | 7 | 4.5 | 20.25 |
| 13 | 1 | 13 | 11.5 | 26 | –14.5 | 210.25 |
| 14 | 1 | 3 | 11.5 | 7 | 4.5 | 20.25 |
| 15 | 2 | 3 | 15.5 | 7 | 8.5 | 72.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 2 | 3 | 15.5 | 7 | 8.5 | 72.25 |
| 17 | 3 | 6 | 18.5 | 14.5 | 4 | 16 |
| 18 | 3 | 14 | 18.5 | 28 | –9.5 | 90.25 |
| 19 | 3 | 0 | 18.5 | 2.5 | 16 | 256 |
| 20 | 3 | 8 | 18.5 | 18 | 0.5 | 0.25 |
| 21 | 4 | 12 | 21 | 24 | –3 | 9 |
| 22 | 5 | 8 | 22.5 | 18 | 4.5 | 20.25 |
| 23 | 5 | 0 | 22.5 | 2.5 | 20 | 400 |
| 24 | 6 | 6 | 24 | 14.5 | 9.5 | 90.25 |
| 25 | 8 | 15 | 25.5 | 29 | –3.5 | 12.25 |
| 26 | 8 | 13 | 25.5 | 26 | –0.5 | 0.25 |
| 27 | 9 | 10 | 27 | 22 | 5 | 25 |
| 28 | 11 | 13 | 28 | 26 | 2 | 4 |
| 29 | 12 | 11 | 29 | 23 | 6 | 36 |
| 30 | 15 | 8 | 30 | 28 | 2 | 4 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 2401.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(2401.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{14409}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{14409}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{14409}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.534260$$

$$r_s = .46574$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.46574 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue menor al valor calculado de la fórmula, se puede rechazar la hipótesis nula, lo cual expresa que hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

A lo largo de la historia, el ser humano le ha dado gran importancia a los estándares estéticos y de belleza, o bien, que son atractivos para otros individuos. Esta postura ha tomado gran fuerza debido a la influencia de la sociedad modernizada y, a su vez, por los medios de comunicación, que fungen de manera importante en las decisiones de la población (García *et al*., 2012).

Las influencias socioculturales que idealizan modelos de hombre y de mujer llevan a distorsiones cognitivas con respecto al propio peso y generan deseos de cambio (Ramos *et al*., 2003).

## Ejercicio 7

Cálculos necesarios para la solución

X = CHEAT

Y = PAI

**Tabla 6-7. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 0 | 41 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 59 | 2 | 14.5 | –12.5 | 156.25 |
| 3 | 0 | 45 | 2 | 3 | –1 | 1 |
| 4 | 3 | 57 | 5 | 12.5 | –7.5 | 56.25 |
| 5 | 3 | 57 | 5 | 12.5 | –7.5 | 56.25 |
| 6 | 3 | 38 | 5 | 1 | 4 | 16 |
| 7 | 4 | 61 | 8 | 21 | –13 | 169 |
| 8 | 4 | 63 | 8 | 27.5 | –19.5 | 380.25 |
| 9 | 4 | 60 | 8 | 17 | –9 | 81 |
| 10 | 5 | 47 | 11.5 | 4 | | 7.5 |
| 11 | 5 | 52 | 11.5 | 7.5 | 4 | 16 |
| 12 | 5 | 49 | 11.5 | 5 | 6.5 | 42.25 |
| 13 | 5 | 60 | 11.5 | 17 | –5.5 | 30.25 |
| 14 | 9 | 60 | 14.5 | 17 | –2.5 | 6.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 9 | 63 | 14.5 | 27.5 | –13 | 169 |
| 16 | 10 | 51 | 16 | 6 | 10 | 100 |
| 17 | 11 | 61 | 17 | 21 | –4 | 16 |
| 18 | 12 | 61 | 18 | 21 | –3 | 9 |
| 19 | 13 | 56 | 19 | 11 | 8 | 64 |
| 20 | 14 | 59 | 20 | 14.5 | 5.5 | 30.25 |
| 21 | 15 | 63 | 21 | 27.5 | –6.5 | 42.25 |
| 22 | 16 | 54 | 22 | 9.5 | 12.5 | 156.25 |
| 23 | 18 | 62 | 24.5 | 24 | 0.5 | 0.25 |
| 24 | 18 | 63 | 24.5 | 27.5 | –3 | 9 |
| 25 | 18 | 63 | 24.5 | 27.5 | –3 | 9 |
| 26 | 18 | 61 | 24.5 | 21 | 3.5 | 12.25 |
| 27 | 21 | 52 | 27.5 | 7.5 | 20 | 400 |
| 28 | 21 | 63 | 27.5 | 27.5 | 0 | 0 |
| 29 | 35 | 54 | 29.5 | 9.5 | 20 | 400 |
| 30 | 35 | 61 | 29.5 | 21 | 8.5 | 72.25 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 2\ 556.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(2556.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{15339}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{15339}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{15339}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.568743$$

$$r_s = .431257$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.431257 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue menor al valor calculado de la fórmula, se puede rechazar la hipótesis nula, lo cual expresa que hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

Durante la infancia, los padres recurren a diversos métodos para intervenir en la alimentación del infante; por otro lado, la tardía identificación y la carencia de un adecuado manejo de un trastorno alimentario puede provocar desde estudios invasivos innecesarios, hasta consecuencias psicológicas complejas, como las conductas aversivas secundarias a patrones de alimentación disfuncional por parte de los padres. La persistencia de los trastornos alimentarios y la coexistencia con altas cifras de malnutrición trae consigo un actual estilo de vida que influye en el comportamiento de los niños y su relación con la comida (Bravo y Hodgson, 2011).

## Ejercicio 8

Cálculos necesarios para la solución

X = BULIT

Y = CIMEC

**Tabla 6-8. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que son ordenadas en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 45 | 12 | 1 | 11 | –10 | 100 |
| 2 | 47 | 10 | 2.5 | 9 | –6.5 | 42.25 |
| 3 | 47 | 1 | 2.5 | 1 | 1.5 | 2.25 |
| 4 | 49 | 24 | 4 | 16.5 | –12.5 | 156.25 |
| 5 | 53 | 40 | 5 | 26.5 | –21.5 | 462.25 |
| 6 | 54 | 9 | 6 | 7 | –1 | 1 |
| 7 | 57 | 35 | 7 | 23 | –16 | 256 |
| 8 | 58 | 7 | 8 | 5 | 3 | 9 |
| 9 | 59 | 25 | 9.5 | 18.5 | –9 | 81 |
| 10 | 59 | 11 | 9.5 | 10 | –0.5 | 0.25 |
| 11 | 60 | 25 | 12 | 18.5 | –6.5 | 42.25 |
| 12 | 60 | 14 | 12 | 13 | –1 | 1 |
| 13 | 60 | 2 | 12 | 3 | 9 | 81 |
| 14 | 62 | 24 | 14 | 16.5 | –2.5 | 6.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 67 | 19 | 15 | 14 | 1 | 1 |
| 16 | 68 | 2 | 16.5 | 3 | 13.5 | 182.25 |
| 17 | 68 | 13 | 16.5 | 12 | 4.5 | 20.25 |
| 18 | 70 | 34 | 18.5 | 22 | –3.5 | 12.25 |
| 19 | 70 | 36 | 18.5 | 24.5 | –6 | 36 |
| 20 | 72 | 40 | 20 | 26.5 | –6.5 | 42.25 |
| 21 | 73 | 9 | 21 | 7 | 14 | 196 |
| 22 | 75 | 28 | 22 | 20 | 2 | 4 |
| 23 | 76 | 21 | 23 | 15 | 8 | 64 |
| 24 | 78 | 36 | 24 | 24.5 | –0.5 | 0.25 |
| 25 | 79 | 9 | 25 | 7 | 18 | 324 |
| 26 | 82 | 49 | 26 | 29 | –3 | 9 |
| 27 | 90 | 2 | 27 | 3 | 24 | 576 |
| 28 | 91 | 77 | 28 | 30 | –2 | 4 |
| 29 | 94 | 42 | 29 | 28 | 1 | 1 |
| 30 | 96 | 33 | 30 | 21 | 9 | 81 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 2794$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(2794)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{16764}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{16764}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{16764}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.621576$$

$$r_s = .378421$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.378421 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue menor al valor calculado de la fórmula, se puede rechazar la hipótesis nula, lo cual expresa que hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

En la actualidad no está totalmente definido si la cultura, al inducir preocupaciones por el cuerpo delgado, sirve como precursora de los trastornos alimentarios (Killen *et al*., 1994).

En las últimas décadas, al cuerpo de la mujer se le da un valor y se le adjudica de manera particular el concepto de la belleza corporal ideal, referido a un modelo de extrema delgadez. Las mujeres que tienen un cuerpo delgado tienen razones para autovalorarse de manera positiva; sin embargo, las que no presentan esta característica suelen tener insatisfacción corporal y su autoestima resulta afectada (Salazar, 2007).

## Ejercicio 9

Cálculos necesarios para la solución

X = EAT

Y = BSQ

**Tabla 6-9. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que son ordenadas en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 36 | 34 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 37 | 58 | 2 | 12.5 | –10.5 | 110.25 |
| 3 | 40 | 47 | 3 | 8 | –5 | 25 |
| 4 | 44 | 63 | 4 | 17 | –13 | 169 |
| 5 | 46 | 54 | 5.5 | 10 | –4.5 | 20.25 |
| 6 | 46 | 58 | 5.5 | 12.5 | –7 | 49 |
| 7 | 47 | 44 | 7 | 6 | 1 | 1 |
| 8 | 49 | 57 | 8 | 11 | –3 | 9 |
| 9 | 50 | 38 | 9.5 | 3 | 6.5 | 42.25 |
| 10 | 50 | 40 | 9.5 | 4 | 5.5 | 30.25 |
| 11 | 52 | 36 | 10 | 2 | 8 | 64 |
| 12 | 53 | 74 | 11 | 23 | –12 | 144 |
| 13 | 54 | 43 | 13.5 | 5 | 8.5 | 72.25 |
| 14 | 54 | 46 | 13.5 | 7 | 6.5 | 42.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 58 | 79 | 15.5 | 24 | –8.5 | 72.25 |
| 16 | 58 | 53 | 15.5 | 9 | 6.5 | 42.25 |
| 17 | 60 | 61 | 17 | 15 | 2 | 4 |
| 18 | 62 | 62 | 18.5 | 16 | 2.5 | 6.25 |
| 19 | 62 | 59 | 18.5 | 14 | 4.5 | 20.25 |
| 20 | 63 | 73 | 20 | 22 | –2 | 4 |
| 21 | 69 | 65 | 21 | 18.5 | 2.5 | 6.25 |
| 22 | 71 | 86 | 22 | 25 | –3 | 9 |
| 23 | 73 | 96 | 23.5 | 26 | –2.5 | 6.25 |
| 24 | 73 | 143 | 23.5 | 28 | –4.5 | 20.25 |
| 25 | 74 | 65 | 25 | 18.5 | 6.5 | 42.25 |
| 26 | 75 | 124 | 26 | 27 | –1 | 1 |
| 27 | 77 | 71 | 27 | 21 | 6 | 36 |
| 28 | 91 | 66 | 28 | 20 | 8 | 64 |
| 29 | 117 | 154 | 29 | 29 | 0 | 0 |
| 30 | 120 | 158 | 30 | 30 | 0 | 0 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 1112.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(1112.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6675}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6675}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6675}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.247497$$

$$r_s = .752503$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.752503 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue menor al valor calculado de la fórmula, se puede rechazar la hipótesis nula, lo cual expresa que hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las

variables, es decir, hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

La preocupación excesiva por el peso corporal tiene un impacto sobre las conductas hacia la comida (Arroyo *et al.*, 2010).

Los factores socioculturales y ambientales, el estatus socioeconómico, origen étnico, factores de los padres, presión de grupo y la consideración de un cuerpo ideal delgado son factores determinantes en el desarrollo de actitudes y comportamientos distorsionados en relación a la alimentación (Tam, Ng, Yu, y Young).

## Ejercicio 10

Cálculos necesarios para la solución

X = CHEAT

Y = PAI

**Tabla 6-10. Cálculo de las diferencias de los pares de puntuaciones observadas, que se ordenan en rangos para realizar el cálculo de $r_s$ de Spearman**

| Participante | Puntuaciones observadas | | Rangos | | Diferencias | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | Y | X | Y | *d* | $d^2$ |
| 1 | 0 | 41 | 2.5 | 1.5 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 59 | 2.5 | 22 | –19.5 | 380.25 |
| 3 | 0 | 57 | 2.5 | 19.5 | –17 | 289 |
| 4 | 0 | 46 | 2.5 | 6 | –3.5 | 12.25 |
| 5 | 1 | 41 | 5 | 1.5 | 3.5 | 12.25 |
| 6 | 2 | 61 | 7 | 25.5 | –18.5 | 342.25 |
| 7 | 2 | 52 | 7 | 14.5 | –7.5 | 56.25 |
| 8 | 2 | 49 | 7 | 11 | –4 | 16 |
| 9 | 3 | 47 | 10 | 8 | 2 | 4 |
| 10 | 3 | 63 | 10 | 29 | –19 | 361 |
| 11 | 3 | 57 | 10 | 19.5 | –9.5 | 90.25 |
| 12 | 4 | 61 | 12 | 25.5 | –13.5 | 182.25 |
| 13 | 5 | 47 | 13.5 | 8 | 5.5 | 30.25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 5 | 51 | 13.5 | 13 | 0.5 | 0.25 |
| 15 | 6 | 44 | 16 | 3.5 | 12.5 | 156.25 |
| 16 | 6 | 54 | 16 | 16.5 | –0.5 | 0.25 |
| 17 | 6 | 49 | 16 | 11 | 5 | 25 |
| 18 | 8 | 61 | 18 | 25.5 | –7.5 | 56.25 |
| 19 | 9 | 59 | 19 | 22 | –3 | 9 |
| 20 | 11 | 56 | 20 | 18 | 2 | 4 |
| 21 | 14 | 63 | 21 | 29 | –8 | 64 |
| 22 | 16 | 63 | 22 | 29 | –7 | 49 |
| 23 | 18 | 59 | 23 | 22 | 1 | 1 |
| 24 | 21 | 52 | 24.5 | 14.5 | 10 | 100 |
| 25 | 21 | 49 | 24.5 | 11 | 13.5 | 182.25 |
| 26 | 25 | 45 | 26.5 | 5 | 21.5 | 462.25 |
| 27 | 25 | 44 | 26.5 | 3.5 | 23 | 529 |
| 28 | 26 | 47 | 28 | 8 | 20 | 400 |
| 29 | 32 | 54 | 29.5 | 16.5 | 13 | 169 |
| 30 | 32 | 61 | 29.5 | 25.5 | 4 | 16 |
| | | | | | | $\sum d^2 = 4000.5$ |

X = puntuaciones de una de las variables, Y = puntuaciones correspondientes a la otra variable, $d$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones, $d^2$ = diferencias entre los rangos de cada par de puntuaciones elevadas al cuadrado.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\,(4000.5)}{30\,(30^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{24003}{30\,(900 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{24003}{30\,(899)}$$

$$r_s = 1 - \frac{24003}{26970}$$

$$r_s = 1 - 0.889988$$

$$r_s = .110012$$

Posteriormente se aplica la regla de decisión para obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*), es decir, el número de pares en X y Y menos 2:

**a)** $gl = N - 2$
**b)** $gl = 30 - 2 = 28$

En este caso, la columna de significancia al .05 indica que, con respecto a 30, al ser el valor más próximo, para los grados de libertad se debe obtener un valor de por lo menos .349. Entonces:

$$.110012 > .349$$

**Resultado y su representación (tablas y gráficas, en caso de ser necesario)**
Correlación $r_s$ de Spearman:

De acuerdo con el resultado obtenido, en el cual ocurrió que el valor crítico de *r* fue mayor al valor calculado de la

fórmula, se puede aceptar la hipótesis nula, lo cual expresa que no hay una correlación significativa ($\rho < .05$) de las variables, es decir, no hay una asociación entre éstas.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

Durante la infancia, los padres recurren a diversos métodos para intervenir en la alimentación del infante; por otro lado, la tardía identificación y la carencia de un adecuado manejo de un trastorno alimentario pueden provocar desde estudios invasivos innecesarios, hasta consecuencias psicológicas complejas, como las conductas aversivas secundarias a patrones de alimentación disfuncional por parte de los padres. La persistencia de los trastornos alimentarios y la coexistencia con altas cifras de malnutrición trae consigo un actual estilo de vida que influye en el comportamiento de los niños y su relación con la comida (Bravo y Hodgson, 2011).

## Solución a los ejercicios voluntarios

**1.** Cierto. La correlación $r_s$ es una prueba no paramétrica que se emplea cuando los niveles de medición de las variables de un estudio son cualitativos, o se tienen puntuaciones con desviaciones estándar amplias.
**2.** Cierto. Se requiere que los objetos o individuos en estudio puedan colocarse en dos series ordenadas.
**3.** Falso. Se interpreta igual que Pearson y otros coeficientes de correlación.
**4.** Cierto. El coeficiente varia de –1.0 correlación negativa perfecta a +1.0 correlación positiva perfecta.
**5.** Falso. No se especifican rangos en ninguna de las variables.

# GLOSARIO

**Análisis de correlación:** por medio de herramientas útiles se evalúa estadísticamente el grado en que dos variables se relacionan.

**Coeficiente de correlación:** expresión numérica que va de –1 a +1 e indica la fuerza y dirección de la correlación entre dos variables.

**Correlación de Spearman ($r_s$):** Análisis estadístico no paramétrico que evalúa el grado de asociación de dos variables a partir de la transformación de sus puntuaciones.

# BIBLIOGRAFÍA


Arroyo, M., Basabe, N., Serrano, L., Sánchez, C., Ansotegui, L.A. y Rocandio, A.M. (2010). Prevalence and Magnitude of Body Weight and Image Dissatisfaction among Women in Dietetics Majors. *Archivos Latinoamericanos de Nutrición*, *60*(2), 126-132.

Barriguete-Meléndez, J.A., Unikel-Santoncini, C., Aguilar-Salinas, C., Córdova-Villalobos, J.A., Shamah, T., Barquera, S., Rivera, J. y Hernández-Ávila, M. (2009). Prevalence of Abnormal Eating Behaviors in Adolescents in Mexico (Mexican National Health and Nutrition Survey 2006). *Salud Pública de México*, *51*, 638-644.

Bolaños, P. (2009). La educación nutricional como factor de protección en los trastornos de la conducta alimentaria. *Trastornos de la Conducta Alimentaria, 10*, 1069-1086.

Bravo, P. y Hodgson, M.I. (2011). Trastornos alimentarios del lactante y preescolar. *Revista Chilena de Pediatría*, *82*(2), 87-92.

Coolican, H. (2005). *Métodos de investigación y estadística en psicología*. México: El Manual Moderno.

García, J., Fonseca, C., Camacho, E., Escoto, C. y Barco, A. (2012). Frecuencia en el uso de ergogénicos por género y su relación con el nivel de estudios en fisicoculturistas. En C., Fonseca y M.L., Quintero (Coords.). *Salud y bienestar social desde la perspectiva de género y los derechos humanos*. (pp. 125-145). México: Plaza y Valdés.

Gautheir, T. D. (2001). Detecting trends using Spearman's rank correlation coefficient. Environmental Forensics, *2*, 359-362.

González-Martí, I., Fernández, B.J.G. y Contreras, J.O. R. (2012). Contribución para el criterio diagnóstico de la dismorfia muscular (vigorexia). *Revista de Psicología del Deporte*, *21*(2), 351-358.

Instituto Nacional de Salud Mental (s/f). *Trastornos de la alimentación*.

Killen, J.D., Taylor, C.B., Hayward, C., Wilson, D.M., Haydel, K.F., Hammer, L.D., Kraemer, H. (1994). Pursuit of Thinness and Onset of Eating Disorder Symptoms in a Community Sample of Adolescent Girls: a Three-year Prospective Analysis. *International Journal of Eating Disorders*, *16*(3), 227-238.

Moreno, M.A. y Ortiz, G.R. (2009). Trastorno alimentario y su relación con la imagen corporal y la autoestima en adolescentes. *Terapia Psicológica*, *27*(2), 181-189.

Ramos, P., Pérez, L., Liberal, S. y Latorre, M. (2003). La imagen corporal en relación con los TCA en adolescentes vascos de 12 a 18 años. *Revista de Psicodidáctica*, *16*, 1-9.

Rivarola, M.F. (2003). La imagen corporal en adolescentes mujeres: Su valor predictivo en trastornos alimentarios. *Fundamentos en humanidades*, *1*(7/8), 149-161.

Salazar, Z. (2007). Imagen corporal femenina y publicidad en revistas. *Revista de Ciencias Sociales*, *116*, 71-85.

Tam, C.K., Ng, C.F., Yu, C.M y Young, B.W. (2007). Disordered Eating Attitudes and Behaviours among Adolescents in Hong Kong: Prevalence and Correlates. *Journal of Paediatrics & Child Health*, *43*(12), 811-817.

Toro, J. (1988). Factores socioculturales en los trastornos de la ingesta. *Anuario de Psicología*, *38*, 25-47.

# Capítulo 7

# RELACIÓN ENTRE VARIABLES: DOS VARIABLES CUALITATIVAS ($X^2$ de Pearson)

*María del Consuelo Escoto Ponce de León, Ismael Díaz Rangel, Claudia Angélica Hernández Rodríguez*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo, el alumno aprenderá a medir la relación entre dos variables cualitativas utilizando la prueba $X^2$ de Pearson. Específicamente, el alumno estimará los parámetros y contrastará la hipótesis poniendo en práctica los pasos de la inferencia estadística, hasta calcular los estadísticos e interpretarlos con el fin de rechazar o aceptar la hipótesis nula.

## $X^2$ DE PEARSON SOBRE INDEPENDENCIA O IGUALDAD DE PROPORCIONES

En la investigación, es frecuente encontrarse con variables cualitativas que se clasifican en dos o más categorías excluyentes. Cuando se pretende comparar dos o más grupos con una variable de este tipo, la prueba estadística $X^2$ de Pearson permite estudiar la relación de independencia o igualdad entre dos variables discretas, cuyos datos se expresan como frecuencias por categoría, por lo que no es posible trabajar con los promedios. Para estudiar la relación de independencia o igualdad entre dos variables se construye una tabla de doble entrada, conocida como tabla de contingencia, la cual permite tener información cruzada entre los niveles de las variables discretas en estudio (tabla 7-1).

**Tabla 7-1. Frecuencias observadas de participantes con y sin atracón por entidad**

| | Con atracón | Sin atracón |
|---|---|---|
| Estado de México | 30 | 15 |
| Jalisco | 15 | 20 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| Nayarit | 5 | 40 |

La $X^2$ de Pearson se sustenta en la idea de comparar las frecuencias observadas en las categorías, con las frecuencias aleatorias que se podrían esperar en tales categorías. Por lo tanto, dos variables son independientes si los valores de una de ellas no influyen en los niveles de la otra, es decir, si la distribución de la variable es similar en cualquier nivel de la otra.

Para aplicar la $X^2$ de Pearson es necesario cumplir los siguientes requisitos: 1) las frecuencias esperadas no deben ser menores a cinco; 2) la muestra no debe ser muy grande, ya que la prueba puede dar resultados significativos cuando en realidad no lo son; y 3) la variable no debe tener muchos niveles, pues se podrían observar diferencias entre las variables aun cuando no las haya.

El estadístico de la $X^2$ de Pearson está dado por:

$$X^2 = \sum \frac{(0 - E)^2}{E}$$

Donde:

$O$ = frecuencia observada en cada celda.

$E$ = frecuencia esperada para cada celda.

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Supóngase que se pretende realizar un estudio cuyo propósito es determinar si la conducta de atracón (entendido como el consumo de grandes cantidades de alimento, en un periodo corto de tiempo, con la sensación de pérdida de control), ocurre con mayor frecuencia en alguna de tres entidades de la República mexicana: Estado de México, Nayarit y Jalisco. Para responder esta pregunta fueron entrevistadas 125 personas; además, para probar la independencia de las variables se eligió un nivel de confiabilidad de 95%.

## ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Para estimar los parámetros, los datos fueron presentados en una tabla de contingencia, que en este ejemplo es de tres renglones por dos filas (3 × 2). En las filas se representa a cada una de las entidades: Estado de México, Jalisco y Nayarit; y en las columnas la variable medida (atracón), que en este caso toma dos valores: presencia y ausencia de atracón. En cada casilla queda representada la frecuencia de ocurrencia de la variable, medida por entidad. El ejemplo de dicha tabla de contingencia se encuentra en la tabla 7-2.

**Tabla 7-2. Frecuencias observadas de participantes con y sin atracón por entidad**

| | Con atracón | Sin atracón | Total |
|---|---|---|---|
| Estado de México | 30<br>(18) | 15<br>(27) | 45 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Jalisco | 15<br>(14) | 20<br>(21) | 35 |
| Nayarit | 5<br>(18) | 40<br>(27) | 45 |
| **Total** | 50 | 75 | 125 |

La hipótesis de que la conducta de atracón es independiente del estado, puede ser probada por medio del estadístico $X^2$ de Pearson. Para ello, es necesario determinar las frecuencias esperadas; primero se suman las frecuencias observadas por renglón y por columna; luego se multiplica el total de la columna por el total del renglón al cual pertenece la celda y se divide por el total de la muestra. En la tabla 7-2, las frecuencias esperadas para el ejemplo se ubican en cada celda, dentro del paréntesis.

# PASOS DE LA INFERENCIA

## Selección de la prueba, comprobación de supuestos

De acuerdo con los datos que se tienen, una variable es categórica (atracón) y la otra nominal (estado de la República mexicana); por lo tanto, no se cumple con los supuestos de las pruebas paramétricas, por lo que el estadístico de elección será la $X^2$ de Pearson.

## Establecer las hipótesis estadísticas

En la prueba $X^2$ de Pearson, la hipótesis nula a contrastar será la de independencia entre las variables, lo cual es cierto si las frecuencias observadas y esperadas son muy similares. Por el contrario, la hipótesis alterna supone que las categorías difieren en alguna cualidad y que la diferencia no es atribuible al azar.

## Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico

En el ejemplo fueron entrevistadas 125 personas, de las cuales 45 pertenecían al Estado de México, 35 a Jalisco y 45 a Nayarit. Del total de participantes, 75 presentaron atracón y el resto no. La distribución por categoría fue: 30 personas del Estado de México, 15 de Jalisco y 5 de Nayarit presentaron atracón. Por el contrario, 15 del Estado de México, 20 de Jalisco y 40 de Nayarit no presentaron dicha conducta. Debido a que el interés del estudio es probar la hipótesis de independencia con un nivel de significancia de .05, es preciso considerar que en la hipótesis nula los valores de $X^2$ se distribuyen dependiendo de los grados de libertad, los cuales son iguales al número de filas menos 1,

por el número de columnas menos uno, entonces, de acuerdo con el ejemplo:

$$gl = (C - 1)\,(R - 1) = (2 - 1)\,(3 - 1) = 2$$

# Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad

Al sustituir los valores observados y esperados en el estadístico $X^2$ de Pearson, entonces:

$$X^2 = \frac{(30 - 18)^2}{18} + \frac{(15 - 27)^2}{27} + \frac{(15 - 14)^2}{14} \cdots \frac{(20 - 21)^2}{21} \cdots \frac{(5 - 18)^2}{18} + \frac{(40 - 27)^2}{27} = 29.10$$

Si las frecuencias observadas son muy similares a las esperadas, entonces la diferencia será mínima y, por lo tanto, el valor del estadístico $X^2$ de Pearson será muy pequeño. Por último, el valor del estadístico $X^2$ es contrastado en las tablas de probabilidades asociadas a distintos valores de $X^2$, para decidir qué probabilidad hay de que el resultado obtenido se deba al azar. Para ello, se aplica la regla de decisión con el fin de obtener la significancia estadística, la cual se calcula a partir de la obtención de los grados de libertad (*gl*). En la tabla C del Apéndice se busca el valor crítico, ubicando en la línea correspondiente al valor de los grados de libertad y la significancia establecida. De acuerdo con este indicador, se establece la toma de decisión de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

$$X^2_o \geq X^2_c$$

Donde:

$X^2_o$ = Valor obtenido en la derivación de la fórmula.

$X^2_c$ = Valor obtenido en la tabla de valores críticos de significancia de $X^2$.

En el ejemplo desarrollado, la columna de significancia para pruebas de dos colas al .05, indica que con dos grados de libertad se obtendrá un valor de por lo menos de 5.99, por lo que resulta que:

$$29.1 > 5.99$$

### Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$

De acuerdo con el resultado obtenido, el valor crítico de $X^2$ fue menor al valor derivado de la fórmula, por lo que se puede rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alterna. De esta manera, se rechaza la hipótesis de independencia entre el estado y la conducta de atracón ($p < .05$), es decir, la presencia de atracón de acuerdo con el estado.

# Representación e interpretación

Los resultados pueden representarse de manera gráfica (figura 7-1).

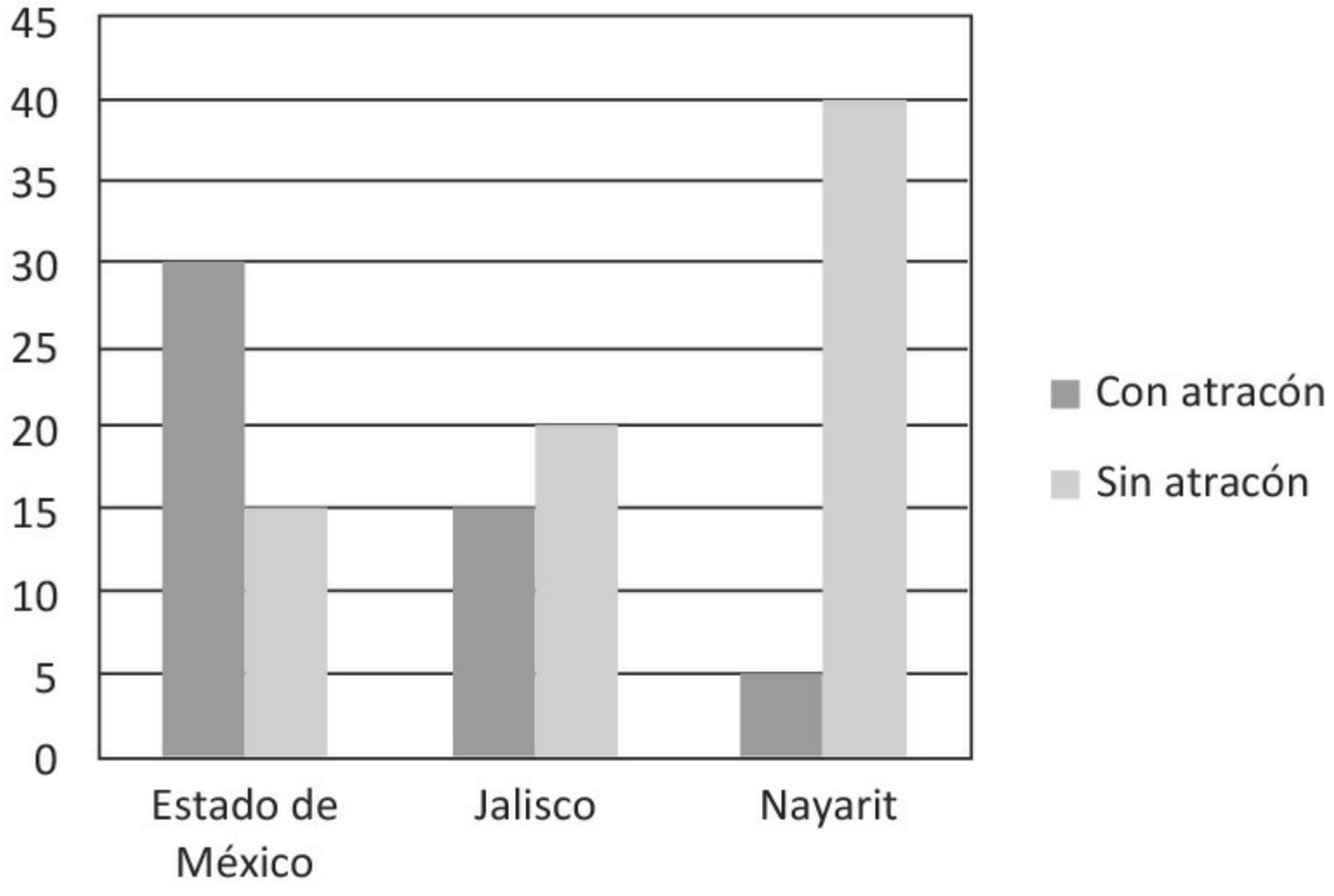



**Figura 7-1.** Frecuencia de atracón por estado.

De acuerdo con el resultado, se infiere que los participantes de Nayarit presentaron menos atracón que los de Jalisco, y estos últimos menos que los del Estado de México. Entonces, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la dependencia del estado y la conducta de atracón.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

1. **Presentación del problema.** Un psicólogo desea saber si el consumo de esteroides anabolizantes se asocia con la práctica de ejercicio con pesas. Para ello, realizó un estudio con 260 varones y encontró los siguientes resultados: 100 hombres consumían esteroides anabolizantes (80 que realizan ejercicio con pesas y 20 que no lo realizan) y 160 no los consumían (60 hombres que practican ejercicio con pesas y 100 que no realizan dicha actividad). Elabore las hipótesis y determine si la práctica de ejercicio con pesas es independiente del consumo de esteroides

anabolizantes, con una significancia de .05.

**Tabla 7-3. Relación entre consumo de esteroides y la práctica de ejercicio con pesas**

| Ejercicio con pesas | Consumo de esteroides anabolizantes | | Total |
|---|---|---|---|
| | Consumen | No consumen | |
| Si realiza | 80<br>(53.85) | 60<br>(86.15) | 140 |
| No realiza | 20<br>(46.15) | 100<br>(73.85) | 120 |
| **Total** | 100 | 160 | 260 |

Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).
**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y obtener los totales por renglones y por columnas.
**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y de las columnas [total global]).
**e)** Calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).
**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $X^2$, al nivel de significancia elegido (.05).
**h)** Obtener una conclusión.

**2. Presentación del problema.** Un investigador desea saber si el tipo el tratamiento psicológico (conductual, disonancia cognoscitiva y psicoeducativo) aplicado a 373 pacientes con fobia social, se asocia con la eficacia de la intervención (empeoramiento, sin cambios y mejoría). Los resultados indicaron que con el tratamiento conductual, 53 pacientes empeoraron, 30 permanecieron sin cambios y 50 mejoraron. Con relación al tratamiento con disonancia cognoscitiva, 52 pacientes empeoraron, 30 permanecieron sin cambios y 60 mejoraron. Por último, con el tratamiento psicoeducativo, 18 pacientes empeoraron, 30 permanecieron igual y 50 mejoraron. Con una significancia de .05, haga una prueba para determinar si la eficacia del tratamiento es independiente de la terapia.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).
**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y los totales por renglones y por columnas.
**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y de las columnas [total global]).

**e)** Obtener las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).
**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor presentado en las tablas de $X^2$, al nivel de significancia elegido (.05).
**h)** Obtener una conclusión.

**3. Presentación del problema.** Una universidad pública del Estado de México desea saber si la satisfacción con la vida está relacionada con la escolaridad de los docentes. Y para ello, se aplicaron 771 cuestionarios a profesores con distinto nivel de estudios. Los resultados del estudio indicaron que de los docentes con estudios de licenciatura, 35, 63 y 14 autorreportaron poca, regular y mucha satisfacción con la vida, respectivamente. De los docentes con especialidad, 60 autorreportaron poca satisfacción con la vida, 78 regular y 67 mucha; mientras que los docentes con maestría, 52, 89 y 66 autorreportaron poca, regular y mucha satisfacción con la vida, respectivamente; y por último, de los docentes con doctorado, 75 autorreportaron poca satisfacción con la vida, 83 regular y 89 mucha. Con una significancia de .01, haga una prueba para determinar si la satisfacción con la vida es independiente de la escolaridad de los docentes.

**Tabla 7-2. Relación entre satisfacción con la vida y escolaridad de los docentes**

| Satisfacción con la vida | | Escolaridad de los docentes | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Licenciatura | Especialidad | Maestría | Doctorado | Total |
| Poca | 35<br>(32.25) | 60<br>(59.03) | 52<br>(59.60) | 75<br>(71.12) | 222 |
| Regular | 63<br>(45.47) | 78<br>(83.22) | 89<br>(84.04) | 83<br>(100.27) | 313 |
| Mucha | 14<br>(34.28) | 67<br>(62.75) | 66<br>(63.36) | 89<br>(75.61) | 236 |
| **Total** | 112 | 205 | 207 | 247 | 771 |

**Lógica de la solución:**
**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).

**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y los totales por renglones y por columnas.
**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).
**e)** Obtener las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).
**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor presentado en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.05).
**h)** Obtener una conclusión.

4. **Presentación del problema.** En una encuesta preelectoral acerca de la intención de voto realizada a 2 601 hombres y mujeres de la zona norte del país, se les preguntó respecto a su preferencia partidista y se obtuvieron los siguientes resultados. Pruebe la hipótesis de que la preferencia hacia un partido político es independiente del sexo, a un nivel de confianza de .001.

**Tabla 7-3. Intención de voto por sexo**

| Partido político | Sexo | | |
|---|---|---|---|
| | Hombres | Mujeres | Total |
| PRI | 210 (306.19) | 415 (318.81) | 625 |
| PAN | 170 (286.10) | 414 (297.90) | 584 |
| PRD | 521 (294.43) | 80 (306.57) | 601 |
| Partido Verde | 192 (236.13) | 290 (245.87) | 482 |
| PT | 289 (259.16) | 240 (269.84) | 529 |
| **Total** | 1 382 | 1 439 | 2 821 |

Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.

**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).

**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y los totales por renglones y por columnas.

**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).

**e)** Obtener las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).

**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor presentado en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.001).

**h)** Obtener una conclusión.

**5. Presentación del problema.** Se llevó a cabo un estudio con 536 mujeres de 35 a 45 años de edad. Se observó depresión leve en 56 mujeres casadas, 35 solteras, 15 viudas, 23 divorciadas y 54 que vivían en unión libre. En cuanto a la depresión moderada, ésta se encontró en 35 mujeres casadas, 40 solteras, 30 viudas, 23 divorciadas y 28 que vivían en unión libre. Por último, presentaron depresión severa 23 mujeres casadas, 35 solteras, 60 viudas, 59 divorciadas y 20 en unión libre. Con un nivel de significancia de 0.01%, pruebe la hipótesis de que existe una relación entre el nivel de depresión y el estado civil.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.

**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).

**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y los totales por renglones y por columnas.

**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y las columnas [total global]).

**e)** Obtener las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).

**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor presentado en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.05).

**h)** Obtener una conclusión.

**6. Presentación del problema.** Con el propósito de determinar la relación entre apoyo familiar y apego al tratamiento para el control de la diabetes, se llevó a cabo un estudio en el que participaron 450 pacientes con este padecimiento, 200 con apego al tratamiento (160 con apoyo familiar y 40 sin apoyo) y 250 sin apego al tratamiento (60 con apoyo familiar y 190 sin apoyo). Con una significancia de 0.05, utilizando los datos de la siguiente tabla para determinar si el apoyo familiar es independiente del apego al tratamiento.

**Tabla 7-4. Relación entre apoyo familiar y el apego al tratamiento**

| Apoyo familiar | Apego al tratamiento | |
|---|---|---|
| | Con apego | Sin apego |
| Con apoyo familiar | 160 | 60 |
| Sin apoyo familiar | 40 | 190 |

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).
**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y obtener los totales por renglones y por columnas.
**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).
**e)** Calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).
**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (0.05).
**h)** Obtener una conclusión.

**7. Presentación del problema.** La Secretaría de Educación Pública realizó un estudio para determinar si el tipo de escuela (pública o privada) se relaciona con los resultados de la prueba Enlace obtenidos por 1 077 estudiantes de primaria, en la asignatura de matemáticas. Los resultados de las escuelas privadas indicaron que 212 estudiantes obtuvieron resultados insuficientes, 207 suficientes, 87 destacables y 47 sobresalientes. Por otro lado, 159 estudiantes de escuelas públicas obtuvieron resultados insuficientes, 100 suficientes, 180 destacables y 85 sobresalientes. Con una significancia de 0.001, determine si el tipo de escuela influye en los resultados obtenidos por los estudiantes.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).

**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y obtener los totales por renglones y por columnas.
**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).
**e)** Calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).
**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (0.05).
**h)** Obtener una conclusión.

**8. Presentación del problema.** La Secretaría de Salud realizó un estudio sobre la presencia de trastorno por atracón en 637 personas con distinto índice de masa corporal. Así, 17 personas con peso normal, 29 con obesidad y 38 con sobrepeso, presentaron atracón. Por otro lado, 570 personas con peso normal, 300 con sobrepeso y 270 con obesidad no presentaron el trastorno. Construya una tabla de contingencias y prueba la independencia de las dos variables con un nivel de significancia de .001.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).
**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y obtener los totales por renglones y por columnas.
**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).
**e)** Calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).
**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.001).
**h)** Obtener una conclusión.

**9. Presentación del problema.** Un investigador desea conocer la relación que existe entre los resultados de la prueba Enlace y el turno al que asisten los alumnos a clases (turno matutino o vespertino). Fueron evaluados un total de 1 077 alumnos (553 del turno matutino y 514 del turno matutino vespertino). Con respecto al turno matutino, 212 alumnos obtuvieron un resultado insuficiente, 207 suficiente, 87 destacable y 47 sobresaliente. Para el turno vespertino, 159 estudiantes obtuvieron un resultado insuficiente, 100 suficiente, 180 destacable y 85 sobresaliente. Pruebe la hipótesis del investigador con un nivel de confiabilidad de 95%.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.

**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).

**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y obtener los totales por renglones y por columnas.

**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).

**e)** Calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1).

**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.05).

**h)** Obtener una conclusión.

**10. Presentación del problema.** Un investigador desea probar, con una confiabilidad de 95%, la hipótesis de que el sexo (hombres y mujeres) está relacionado con la presión arterial, considerando a los participantes como normotensos e hipertensos. Para ello, se estudió a 124 adultos mayores que viven en una región rural, de los cuales 48 son hombres, y de estos, 18 registraron una presión arterial normotensa y 30 hipertensa; mientras que 76 fueron mujeres, de las cuales 34 presentaron una presión normotensa y 42 hipertensa.

**Lógica de la solución:**

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.

**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).

**c)** Elaborar una tabla con las frecuencias observadas y obtener los totales por renglones y por columnas.

**d)** Calcular las frecuencias esperadas (se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]).

**e)** Calcular las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: .

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right]$$

**f)** Obtener los grados de libertad (columnas -–1) (renglones –1).

**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.05).

**h)** Obtener una conclusión.

# Ejercicios voluntarios

**1.** Determine si la siguiente afirmación es cierta o falsa (argumente su respuesta). La prueba $X^2$ cuadrada sólo puede utilizarse cuando los datos observados provienen de una distribución continua.

**2.** Determine si la siguiente afirmación es cierta o falsa (argumente su respuesta). La prueba $X^2$ considera el análisis de los promedios de las variables.

**3.** Se desea saber si la satisfacción laboral se asocia con la antigüedad en una organización. Para ello, se realizó un estudio con 170 personas, cuyos resultados se presentan en la tabla 7-5. Con una significancia de .05, determine si la satisfacción laboral es independiente de la antigüedad en la organización.

**Tabla 7-5. Relación entre antigüedad en la organización y satisfacción laboral**

| Nivel de satisfacción laboral | Antigüedad en la organización | | |
|---|---|---|---|
| | Menos de 5 años | De 5 a 10 años | Más de 10 años |
| Satisfecho | 60 | 30 | 10 |
| Insatisfecho | 40 | 20 | 10 |

**4.** Se desea saber si el índice de masa corporal es independiente de la presencia del atracón alimentario. Para ello, se realizó un estudio con 300 personas, cuyos resultados que se presentan en la tabla 7-6. Con una significancia de .05, determine si la categoría de Índice de Masa Corporal (IMC) es independiente del atracón alimentario.

**Tabla 7-6. Relación entre el índice de masa corporal y el atracón alimentario**

| Atracón alimentario | Categoría de IMC | | |
|---|---|---|---|
| | Infrapeso | Normopeso | Exceso de peso |
| Sin atracón | 60 | 60 | 50 |
| Con atracón | 40 | 40 | 50 |

**5.** Con un nivel de confiabilidad de 95%, un investigador está interesado en evaluar la independencia entre el consumo de esteroides anabolizantes y el atracón alimentario. Con este objetivo se tomó una muestra de usuarios de gimnasio, a quienes se clasificó en una tabla de contingencia (tabla 7-7) y se encontraron los siguientes resultados.

**Tabla 7-7. Relación entre el consumo de esteroides anabolizantes y el atracón alimentario**

| Atracón alimentario | Consumo de esteroides anabolizantes | | Total |
|---|---|---|---|
| | Sí | No | |
| Sin atracón | 5<br>(5.5) | 50<br>(49.5) | 55 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Con atracón | 5<br>(5.5) | 40<br>(40.5) | 45 |
| **Total** | 10 | 90 | 100 |

Con una significancia de .05, determine si el consumo de esteroides anabolizantes es independiente del atracón alimentario.

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

## Ejercicio 1

**a)** Variables del problema: consumo de esteroides anabolizantes y práctica de ejercicio con pesas.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).
$H_0$: El consumo de esteroides es independiente de la práctica de ejercicio con pesas.
Ha: El consumo de esteroides está relacionado con la práctica de ejercicio con pesas.
**c)** La tabla 7-1 presenta las frecuencias observadas y los totales por renglones y columnas.
**d)** En la tabla 7-1 se presentan, entre paréntesis, las frecuencias esperadas.
**e)** Al aplicar el estadístico resulta:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 12.70 + 7.94 + 14.82 + 9.26 = 44.72$$

**f)** $gl$ = (2-1) (2-1) =1.
**g)** Para este ejercicio el valor crítico que se obtuvo de la Tabla C del Apéndice es 3.84.
**h)** La conclusión es que el consumo de esteroides está relacionado con la práctica de ejercicio con pesas.

## Ejercicio 2

**a)** Variables del problema: tipo de tratamiento y eficacia.
**b)** Planteamiento de las hipótesis.
Ho: La eficacia de las intervenciones es independiente del tratamiento psicológico.
Ha: La eficacia de las intervenciones depende del tratamiento psicológico.
**c)** Las frecuencias observadas y los totales por renglones (p. ej. F1 = 35 + 60 + 52 + 75 = 222) y por columnas (p. ej. F1 = 35 + 60 + 52 + 75 = 222) se presentan en la tabla 7-8.

**Tabla 7-8. Relación entre la eficacia de la intervención y el tipo de tratamiento**

| Tratamiento | Eficacia | | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | Empeoramiento | Igual | Mejoría | |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Conductual | 53<br>(43.86) | 30<br>(32.09) | 50<br>57.05 | 133 |
| Disonancia cognoscitiva | 52<br>(46.83) | 30<br>(34.26) | 60<br>(60.91) | 142 |
| Psicoeducativo | 18<br>(32.32) | 30<br>(23.65) | 50<br>(42.04) | 98 |
| **Total** | 123 | 90 | 160 | 373 |

**d)** Los valores que se presentan entre paréntesis en la tabla 7-8 corresponden a las frecuencias esperadas.
**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico: , que aplicado al ejemplo queda como:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 1.90 + .14 + .87 + .57 + .53 + .01 + .6.34 + 1.70 + 1.51 = 113.57$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 4.
**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (.05).
**h)** En el ejemplo, el valor de tablas es = 3.36.
**i)** Por lo tanto, la conclusión es que la eficacia de la intervención depende del tipo de tratamiento aplicado.

**Ejercicio 3**

**a)** Variables del problema: escolaridad de los docentes y satisfacción con la vida.
**b)** Planteamiento de las hipótesis:
Ho: La satisfacción con la vida de los adultos es independiente de su escolaridad.
Ha: La satisfacción con la vida de los adultos está relacionada con su escolaridad.
**c)** En la tabla 7-2 se presentan las frecuencias observadas y los totales por renglones y columnas.
**d)** Los valores que se presentan entre paréntesis en la tabla 7-2, corresponden a las frecuencias esperadas.
**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicado al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = .23 + .02 + .97 + .21 + 6.76 + .33 + .29 + 2.98 + 12.00 + .29 + .11 + 2.37 = 26.56$$

**a)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 6.
**b)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada con el nivel de significancia elegido (.01); entonces, el

valor de tablas es = 16.81.

**c)** Por lo tanto, la conclusión es que la satisfacción con la vida de los docentes se relaciona con su nivel de escolaridad.

## Ejercicio 4

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema: intención de voto y sexo (masculino, femenino).

**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna):

Ho: la intención de voto es independiente del sexo.

Ha: La intención de voto está relacionada con el sexo.

**c)** Las frecuencias observadas y los totales por renglones (p. ej. F1 = 210 + 415 = 625) y por columnas (p. ej. C1 = 210 + 170 +521 +192 + 289 = 1 382) se observan en la tabla 7-3.

**d)** Las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis en la tabla 7-3.

**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicada al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 30.22 + 29.02 + 47.11 + 45.25 + 174.35 + 167.45 + 8.25 + 7.92 + 3.44 + 3.30 = 516.31$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 4.

**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (.001); entonces, el valor de tablas es = 18.47.

**h)** Por lo tanto, la conclusión es que la intención de voto está relacionada con el sexo.

## Ejercicio 5

**a)** Las variables del problema son: estado civil y nivel de depresión.

**b)** Las hipótesis (nula y alterna) son:

Ho: El estado civil es independiente del nivel de depresión.

Ha: El estado civil está relacionado con el nivel de depresión.

**c)** En la tabla 7-9 se presentan las frecuencias observadas y los totales por renglones (p. ej., F1 = 56 + 35 + 23 = 114) y por columnas (p. ej., C1 = 56 + 35 + 15 + 23 + 54 = 183).

**d)** Las frecuencias esperadas (total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y columnas [total global]) se observan entre paréntesis en la tabla 7-9.

**Tabla 7-9. Relación entre nivel de depresión y estado civil**

| Estado civil | Depresión | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Leve | Moderada | Severa | Total |
| Casadas | 56 (38.92) | 35 (33.18) | 23 (41.90) | 114 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Solteras | 35<br>(37.56) | 40<br>(32.01) | 35<br>(40.43) | 110 |
| Viudas | 15<br>(35.85) | 30<br>(30.56) | 60<br>(35.59) | 105 |
| Divorciadas | 23<br>(35.85) | 23<br>(30.56) | 59<br>(38.59) | 105 |
| En unión libre | 54<br>(34.82) | 28<br>(29.69) | 20<br>(37.49) | 102 |
| **Total** | 183 | 156 | 197 | 536 |
| Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis. | | | | |

**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicado al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 7.49 + .10 + 8.52 + .17 + 1.99 + .73 + 12.13 + .01 + 16.79 + 4.61 + 1.87 + 10.79 + 10.56 + .10 + 8.16 = 79.11$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 8.
**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (0.01); entonces, el valor de tablas es = 20.09.
**h)** La conclusión es que el estado civil está relacionado con el nivel de depresión.

## Ejercicio 6

**a)** Las variables del problema fueron: apoyo de la familia del paciente con diabetes y apego al tratamiento.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna).
Ho: El apoyo familiar es independiente del apego al tratamiento.
Ha: El apoyo familiar está relacionado con el apego al tratamiento.
**c)** En la tabla 7-10 se presentan las frecuencias observadas y los totales por renglones (p. ej. F1 = 160 + 40 = 200) y por columnas (p. ej. C1 = 160 + 60 = 220).

**Tabla 7-10. Relación entre el apoyo familiar al paciente diabético y apego al tratamiento**

| **Apego** | **Apoyo familiar** | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

| | Con apoyo | Sin apoyo | Total |
|---|---|---|---|
| Con apego | 160<br>(97.78) | 40<br>(102.22) | 200 |
| Sin apego | 60<br>(122.22) | 190<br>(127.78) | 250 |
| Total | 220 | 230 | 450 |
| Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis. | | | |

**d)** Las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis en la tabla 7-10.
**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicado al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 39.60 + 37.87 + 31.68 + 30.3 = 139.45$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 1.
**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (0.05). El valor de tablas es 3.84.
**h)** Por lo tanto, la conclusión es que el apego al tratamiento se relaciona con el apoyo familiar.

## Ejercicio 7

**a)** Identificar las variables que se plantean en el problema.
**b)** Se plantean las hipótesis:
Ho: Los resultados de la prueba Enlace son independientes del tipo de escuela (pública o privada).
Ha: Los resultados de la prueba Enlace dependen del tipo de escuela (pública o privada).
**c)** Se elabora la tabla 7-11 con las frecuencias observadas y los totales por renglones (p. ej. F1 = 212 + 207 + 87 + 47 = 553) y por columnas (p. ej. C1 = 212 + 159 = 371).

**Tabla 7-11. Relación entre los resultados de la prueba Enlace por tipo de institución educativa**

| Tipo de escuela | Resultados de la prueba Enlace | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Insuficiente | Suficiente | Destacable | Sobresaliente | Total |
| Privada | 212<br>(190.49) | 207<br>(157.63) | 87<br>(137.09) | 47<br>(67.78) | 553 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pública | 159<br>(180.51) | 100<br>(149.37) | 180<br>129.91 | 85<br>(64.22) | 524 |
| Total | 371 | 307 | 267 | 132 | 1 077 |
| Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis. | | | | | |

**d)** Las frecuencias esperadas se presentan entre paréntesis en la tabla 7-11.
**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicado al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 2.43 + 15.46 + 18.30 + 6.37 + 2.56 + 16.32 + 19.32 + 6.72 = 87.48$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 1.
**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (0.05). El valor de tablas es 10.83.
**h)** Por lo tanto, la conclusión es que los resultados de la prueba Enlace dependen del tipo de escuela (pública o privada).

## Ejercicio 8

**a)** Las variables que se plantean en el problema son la presencia del trastorno por atracón y peso de la persona.
**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna):
Ho: El trastorno por atracón es independiente del peso.
Ha: El trastorno por atracón está asociado con el peso.
**c)** En la tabla 7-12 se presentan las frecuencias observadas y los totales por renglones (p.e. F1 = 17+ 29 + 38 = 84) y por columnas (p.e. C1 = 17 + 570 = 587).

**Tabla 7-12. Relación entre peso corporal y trastorno por atracón**

| Trastorno por atracón | | Peso | | |
|---|---|---|---|---|
| | Normopeso | Sobrepeso | Obesidad | Total |
| Si | 17<br>(40.28) | 29<br>(22.58) | 38<br>(21.14) | 84 |
| No | 570<br>(546.72) | 300<br>(306.42) | 270<br>(286.86) | 1 140 |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Total | 587 | 329 | 308 | 1 224 |

Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis.

**d)** Calcular las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis en la tabla 7-12.
**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para esto se utiliza el estadístico (aplicar la fórmula). Aplicando a este ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 13.46 + 1.83 + 13.45 + .99 + 0.13 + 0.99 = 30.85$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad: (columnas -1) (renglones -1) = 2.
**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (0.00). El valor de tablas es 10.83.
**h)** Por lo tanto, la conclusión es que el trastorno por atracón está asociado al peso.

## Ejercicio 9

**a)** Las variables del problema son: turno de escuela (matutino o vespertino) y resultados de la prueba Enlace (insuficiente, suficiente, destacable y sobresaliente).
**b)** Las hipótesis (nula y alterna) del estudio son:
Ho: Los resultados de la prueba Enlace son independientes del turno de la escuela (matutino o vespertino).
Ha: Los resultados de la prueba Enlace son dependientes del turno de la escuela (matutino o vespertino).
**c)** En la tabla 7-13 se presentan las frecuencias observadas y los totales por (p. ej. F1 = 212 + 207 + 87 + 47 = 553) y por columnas (p. ej. C1 = 212 + 159 = 371).

**Tabla 7-13. Relación entre el turno de asistencia a la escuela y los resultados de la prueba Enlace**

| Turno de asistencia a la escuela | Resultados de la prueba enlace | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Insuficiente | Suficiente | Destacable | Sobresaliente | Total |
| Matutino | 212 (190.49) | 207 (157.63) | 87 (137.09) | 47 (67.78) | 553 |
| Vespertino | 159 (180.51) | 100 (149.37) | 180 129.91 | 85 (64.22) | 524 |
| Total | 371 | 307 | 267 | 132 | 1 077 |

Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis.

**d)** Las frecuencias esperadas se presentan entre paréntesis en la tabla 7-13.

**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicado al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 2.43 + 15.46 + 18.30 + 6.37 + 2.56 + 16.32 + 19.32 + 6.72 = 87.48$$

**f)** Los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 1.

**g)** Contrastar el resultado obtenido con el valor obtenido en las tablas de $x^2$, al nivel de significancia elegido (.05). Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada al nivel de significancia elegido (.05). El valor de tablas es 10.83.

**h)** Por lo tanto, la conclusión es que los resultados de la prueba Enlace dependen del turno de la escuela a la que asisten los alumnos (matutino o vespertino).

## Ejercicio 10

**a)** Variables del problema: peso corporal y presión arterial.

**b)** Plantear las hipótesis (nula y alterna):

Ho: La presión arterial es independiente del peso corporal.

Ha: La presión arterial está relacionada con el peso corporal.

**c)** En la tabla 7-14 se presentan las frecuencias observadas y los totales por renglones (p. ej. F1 = 18 + 30 = 48) y columnas (p. ej. C1 = 18 + 14 = 32).

**Tabla 7-14. Relación entre la presión arterial y el sexo**

| Sexo | Presión arterial | | |
|---|---|---|---|
| | Normotensos | Hipertensos | Total |
| Hombres | 18 (20.13) | 30 (27.87) | 48 |
| Mujeres | 34 (31.87) | 42 (44.13) | 76 |
| Total | 52 | 72 | 124 |

Nota: las frecuencias esperadas se observan entre paréntesis.

**d)** En la tabla 7-14 se presentan, entre paréntesis, las frecuencias esperadas.

**e)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas ($fo_{ij} - fe_{ij}$), para lo cual se utiliza el estadístico (usar la fórmula), que aplicado al ejemplo, sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = .23 + .16 + .14 + .10 = 0.63$$

**f)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 1.
**g)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (0.05). El valor de tablas es 3.8.
**h)** Por lo tanto, la conclusión es que la presión arterial es independiente del sexo.

# Solución a los ejercicios voluntarios

**1.** Falso: la prueba Ji cuadrada puede utilizarse aun cuando la distribución de los datos sea arbitraria.
**2.** Falso: la $X^2$ considera el uso de frecuencias.
**3.**

**a)** Se plantean las hipótesis:
Ho: La satisfacción laboral es independiente de la antigüedad en la organización.
Ha: La satisfacción laboral está relacionada con la antigüedad en la organización.
**b)** Se calculan las frecuencias de los renglones (p. ej., F1 = 60 + 30 + 10 = 100) y las columnas (p. ej. C1 = 60 + 40 = 100).
**c)** Se calculan las frecuencias que se podrían esperar si las dos variables fueran independientes (frecuencias esperadas), es decir, se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y las columnas (total global).
**d)** La diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas sería:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 0.02 + 0.01 + 0.26 + 0.03 + 0.02 + 0.38 = 0.72$$

**e)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 2.
**f)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (.05). El valor de tablas es 5.99.
**g)** Por lo tanto, la conclusión es que el nivel de satisfacción laboral no está relacionado con la antigüedad en la organización.

**Ejercicio 4**

**a)** Se plantean las hipótesis:

Ho: El índice de masa corporal es independiente de la presencia del atracón alimentario.
Ha: El índice de masa corporal está relacionado con la presencia del atracón alimentario.

**b)** Se calculan las frecuencias de los renglones (p. ej., F1 = 80 + 60 + 50 = 170) y las columnas (p. ej., C1 = 60 + 40 = 100).

**c)** Se calculan las frecuencias que se podrían esperar si las dos variables fueran independientes (frecuencias esperadas), es decir, se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y las columnas (total global).

**d)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas, para lo cual se utiliza el estadístico:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 0.20 + 0.20 + 0.78 + 0.26 + 0.26 + 1.03 = 2.73$$

**e)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 2.

**f)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (.05). El valor de tablas es 5.99.

**g)** Por lo tanto, la conclusión es que la categoría de IMC no está relacionada con la presencia de atracón alimentario.

**Ejercicio 5**

**a)** Se plantean las hipótesis:
Ho: El consumo de esteroides es independiente de la presencia del atracón alimentario.
Ha: El consumo de esteroides no es independiente de la presencia del atracón alimentario.

**b)** Se calculan las frecuencias de los renglones (p. ej., F1 = 5 + 50 = 55) y las columnas (p. ej., C1 = 5 + 5 = 10).

**c)** Se calculan las frecuencias que se podrían esperar si las dos variables fueran independientes (frecuencias esperadas), es decir, se multiplica el total marginal del renglón por el total marginal de la columna, y el valor obtenido se divide entre el total de los renglones y las columnas (total global).

**d)** Se calcula la diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas, para lo cual se utiliza el estadístico:

$$x^2 = \sum \left[ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right] = 0.05 + 0.01 + 0.06 + 0.01 = 0.13$$

**e)** Se obtienen los grados de libertad (columnas –1) (renglones –1) = 1.

**f)** Se contrasta el valor obtenido en la tabla de ji cuadrada, al nivel de significancia elegido (.05). El valor de tablas es 3.84.

**g)** Por lo tanto, la conclusión es que el consumo de esteroides no está relacionado con la presencia del atracón alimentario.

# GLOSARIO

**Distribución de frecuencias:** datos organizados en función de sus frecuencias.

**Grados de libertad:** expresión del número de diversas maneras, en las cuales los datos pueden tener una variación alrededor de algún valor, en función del número de casos o participantes que se tengan.

**Significancia estadística:** expresión que indica el nivel de probabilidad de que un resultado pueda deberse al azar. En ciencias sociales se acepta como estadísticamente significativo un resultado con una probabilidad máxima de .05, es decir, se tolera hasta 5% de que dicho resultado se deba al azar.

**Tabla de contingencia:** medio particular de representar de manera simultánea dos variables observadas en una misma población y reagrupadas por frecuencias.

**Valor crítico:** Representación del umbral que una prueba estadística debe superar para rechazar la hipótesis nula.

$X^2$: prueba estadística que permite identificar la dependencia de dos variables categóricas.

# BIBLIOGRAFÍA


Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Nueva York: LEA.

Coolican, H. (2005). *Métodos de investigación y estadística en psicología*. México: El Manual Moderno.

Elorza, H. (2008). *Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud*. México: Cengage Learning.

Kerlinger, F.N. y Lee, H.B. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales.* México: McGraw-Hill.

# Capítulo 8

# PRUEBAS DE DIFERENCIA SOBRE UNA VARIABLE CUANTITATIVA (Prueba *t* Student para muestras independientes o relacionadas)

*Esteban Jaime Camacho Ruiz, Brenda Sarahi Cervantes Luna, Manuel Leonardo Ibarra Espinosa, José Jaime Camacho Escoto*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo, el lector aprenderá a observar las diferencias entre dos grupos de personas y una muestra medida en dos momentos, con respecto a una variable cuantitativa. Para ello aplicará la prueba *t* Student para muestras independientes o relacionadas. Específicamente, el lector estimará los parámetros y contrastará las hipótesis, poniendo en práctica los pasos de la inferencia estadística hasta calcular los estadísticos e interpretarlos, con el fin de rechazar o aceptar la hipótesis nula.

En capítulos anteriores se exploró la relación entre variables; sin embargo, es posible que el investigador se interese en la búsqueda de **diferencias** entre grupos de personas. En la investigación experimental del área de psicología, las intervenciones preventivas son un ejemplo de manipulación de variables, cuya finalidad es lograr cambios en las actitudes, conocimientos o comportamientos de las personas, de tal manera que es posible establecer diferencias en la medición. Por ejemplo, se toman dos grupos de niños de primaria y de manera aleatoria uno de estos grupos se asigna a un programa cognitivo conductual para disminuir los síntomas de trastornos alimentarios; mientras que el otro grupo se mantiene como control en lista de espera. Si se observa que el grupo con intervención presenta menos síntomas de trastorno alimentario, entonces se puede inferir que la intervención provocó esta disminución de síntomas (Escoto, Mancilla y Camacho, 2008).

La prueba *t* Student es una herramienta muy importante, ya que no sólo se centra en observar las diferencias entre las variables, sino que permite comparar las medias de dos mediciones. Sus fundamentos son:

1. Las medias de las dos mediciones pueden ser diferentes.
2. Si las mediciones provienen de la misma población, se espera que sus medias sean iguales.
3. Mientras más grandes sean las diferencias entre las dos medias, se tendrá mayor certeza de que las diferencias no se deben al azar.

Por otro lado, los supuestos de la prueba *t* Student son:

1. La variable medida se distribuye normalmente.

**2.** El nivel de medición de la variable es, por lo menos, de intervalo.
**3.** Las varianzas son iguales entre las muestras (en caso de no cumplirse este supuesto se puede utilizar como corrección la prueba de Welch).

Existen dos tipos de prueba *t*: para muestras relacionadas y para muestras independientes; su uso depende de si la variable independiente fue medida utilizando los mismos o diferentes participantes (Field, 2003). Estos tipos se describen a continuación.

# PRUEBA *t* STUDENT PARA MUESTRAS RELACIONADAS

Esta prueba se utiliza cuando existen dos condiciones experimentales y las mismas personas participaron en ambas condiciones. Los supuestos de esta prueba son:

**a)** Homocedasticidad (homogeneidad de las varianzas de la variable dependiente en ambos grupos).
**b)** Las puntuaciones son independientes, ya que provienen de diferentes grupos.

## Presentación del problema

Supóngase que se desea conocer el impacto de un programa de 10 sesiones para incrementar la autoestima en adolescentes. Para ello, se utiliza un cuestionario de autoestima para adolescentes, el cual se aplicó antes y después de la intervención. En dicha prueba, las puntuaciones mayores indican mejor autoestima.

En este ejemplo hipotético se tienen dos mediciones con los mismos sujetos, por lo que un paso lógico es sintetizar los cálculos que se requieren para saber si el programa es efectivo o no. Asimismo, es preciso considerar que se aplicó un instrumento de medición de la autoestima en dos momentos diferentes: preprueba y posprueba (tabla 8-1).

**Tabla 8-1. Puntuaciones del cuestionario de autoestima de los participantes en la preprueba y la posprueba**

| Participante | Preprueba | Posprueba |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 12 |
| 2 | 7 | 13 |
| 3 | 8 | 17 |
| 4 | 9 | 13 |
| 5 | 10 | 15 |
| 6 | 10 | 16 |
| 7 | 10 | 17 |
| 8 | 11 | 17 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 11 | 13 |
| 10 | 12 | 18 |
| 11 | 13 | 19 |
| 12 | 15 | 19 |
| 13 | 17 | 20 |
| 14 | 17 | 21 |
| 15 | 17 | 22 |
| 16 | 18 | 23 |
| 17 | 19 | 24 |
| 18 | 19 | 25 |
| 19 | 11 | 17 |
| 20 | 11 | 13 |
| 21 | 12 | 18 |
| 22 | 13 | 19 |
| 23 | 15 | 19 |
| 24 | 17 | 20 |
| 25 | 10 | 17 |
| 26 | 11 | 13 |
| 27 | 12 | 18 |
| 28 | 17 | 19 |
| 29 | 15 | 19 |
| 30 | 17 | 20 |

# Estimación de parámetros y contraste de hipótesis

El primer paso de prueba *t* Student para muestras relacionadas consiste en establecer los parámetros que se contrastarán. En este caso, la comparación entre las dos mediciones, de acuerdo con los criterios de la prueba *t*, corresponde a la comparación de la media aritmética obtenida en cada medición: preprueba y posprueba. En términos de hipótesis, se propone que la media de cada medición sea igual o que no existan diferencias entre éstas. El razonamiento es que si se logra rechazar la hipótesis nula (diferencias significativas) se justifica al concluir que las diferencias entre las dos mediciones no se deben al azar, esto es, que los posibles cambios que se observan entre las mediciones no ocurrieron por razones desconocidas (variables extrañas) y, por lo tanto, es apropiado pensar que se tiene algún grado de dominio sobre la variable que se está manipulando, así como sobre la variable que se está midiendo.

La fórmula para calcular el parámetro *t* para muestras relacionadas es la siguiente:

$$t = \frac{\overline{D} - \mu D}{SD / \sqrt{n}}$$

donde:

$t$ = estadístico *t* Student para muestras relacionadas.

$\overline{D}$ = diferencia entre los promedios de las dos mediciones.

$\mu D$ = diferencia promedio entre las medias poblacionales.

$SD$ = desviación estándar de las diferencias entre las dos mediciones.

$n$ = tamaño de la muestra.

***Contraste de hipótesis***

Debido a que la muestra es representativa de la población, entonces se espera que no existan diferencias entre las medias poblacionales y $mD = 0$. Las hipótesis a comparar son:

Hipótesis nula ($H_0$): en la que se afirma que la diferencia entre las medias aritméticas no existe (cuando $p > .05$).

Hipótesis alterna ($H_1$): en la que se afirma que la diferencia entre las medias aritméticas sí existe (cuando $p \leq .05$).

# Pasos de la inferencia

Una vez que se establecieron las hipótesis de investigación, es necesario considerar que todo el procedimiento para el cálculo del estadístico se enfoca en la hipótesis nula, ya que es el supuesto que se pretende rechazar porque pone en duda la efectividad de la intervención. Los siguientes pasos están enfocados en calcular el valor de *t* usando el nivel de confianza de al menos 95%, comparar este dato con el valor crítico y utilizar el razonamiento de decisión, de que si el valor observado es mayor o igual al valor de tablas, se considera apropiado rechazar la hipótesis nula.

***Selección de la prueba y comprobación de supuestos***

De acuerdo con el tipo de datos, se observa que existen dos condiciones experimentales (preprueba y posprueba), y las mismas personas participaron en ambas condiciones del experimento, por lo tanto, se determina la pertinencia de aplicar la prueba *t* para muestras relacionadas.

Debido a que el problema que se enfrenta incluye la comparación de dos medias aritméticas, la prueba estadística apropiada es la ***t* para muestras relacionadas**.

Los supuestos que se deben cumplir para analizar los datos son (Field, 2009):

1. Distribución normal: se asume que las distribuciones de las subpoblaciones son normales, ya que el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande ($n$ = 30), lo cual permite asumir que las medias muestrales se aproximan a una distribución normal, incluso si los datos individuales no se distribuyen de manera normal.
2. Medias iguales.
3. Hipótesis nula: las medias de las mediciones son iguales.

$H_0$: Las medias de las mediciones no son distintas, $m_1 = m_2$

$H_1$: Las medias de las mediciones son distintas, $m_1 \neq m_2$

***Establecimiento de las hipótesis estadísticas***

En la hipótesis nula ($H_0$) se afirma que las medias aritméticas de las mediciones son iguales. Para el ejemplo del programa para incrementar la autoestima, el planteamiento de $H_0$ es: el nivel de autoestima es igual entre la preprueba y la posprueba.

$$H_0: m_{pre} \neq m_{post}$$

Mientras que en la Hipótesis alterna ($H_1$) se afirma que las medias aritméticas de las mediciones son diferentes. Para el ejemplo del programa para incrementar la autoestima, el planteamiento de $H_1$ es: el nivel de autoestima es diferente en la preprueba y la posprueba.

$$H_1: m_{pre} \neq m_{post}$$

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

Si se considera que de un conjunto de datos (población) se pueden extraer todas las muestras posibles de un mismo tamaño, la media de cada una de las distribuciones muestrales es igual a la media de la población, siempre y cuando los datos de cada muestra se obtengan al azar. Por ello, es necesario establecer un margen de error para fundamentar que se rechazó de manera acertada la hipótesis nula, esto es, un área debajo de la curva en la que está la menor frecuencia de eventos que difieren del resultado que se pretende demostrar. Por ejemplo, si se utilizara un nivel alfa de .05 quiere decir que si el experimento se repitiera 100 veces, sólo en cinco ocasiones el resultado se explicaría por medio del azar. En otras palabras, al establecer el nivel alfa se está limitando la probabilidad de rechazar equivocadamente la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, o se está limitando la probabilidad de cometer un error tipo I.

Aunque el concepto de grados de libertad es complicado, conviene utilizar una analogía para explicar que las observaciones o datos pueden variar libremente dentro de un límite, que es igual al número de datos menos uno cuando se estiman datos poblacionales. Dado este razonamiento, es posible deducir que el cálculo de grados de libertad es el total de datos menos uno. Una vez que se estima el valor del estadístico *t*, es necesario compararlo con el valor crítico o dato que limita la región crítica; y ésta es el área bajo la curva en la que se incluyen todos los valores

del estadístico que validan el rechazo de la hipótesis nula.

Los grados de libertad se calculan como n – 1 (véase la Tabla D en el Apéndice).

***Cálculo de los estadísticos de la muestra y su valor de probabilidad***

La media en la variable preprueba es 13.03 y en la posprueba es 17.87, por lo tanto:

$$\overline{D} = 13.03 - 17.87 = -4.83 \text{ (tabla 8-2)}$$

Al sustituir los valores en la fórmula, el resultado es:

$$t = \frac{-4.83 - 0}{1.72 / \sqrt{30}} = \frac{-4.83}{0.315} = -15.36$$

Los grados de libertad serían: $n$ –1 = 30 –1 = 29. De acuerdo con la Tabla D del Apéndice, el valor crítico es 2.045.

**Tabla 8-2. Puntuaciones en la preprueba y la posprueba, y la diferencia entre ambas mediciones**

| Participante | Preprueba | Posprueba | Diferencia |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 12 | –5 |
| 2 | 7 | 13 | –6 |
| 3 | 8 | 17 | –9 |
| 4 | 9 | 13 | –4 |
| 5 | 10 | 15 | –5 |
| 6 | 10 | 16 | –6 |
| 7 | 10 | 17 | –7 |
| 8 | 11 | 17 | –6 |
| 9 | 11 | 13 | –2 |
| 10 | 12 | 18 | –6 |
| 11 | 13 | 19 | –6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 15 | 19 | –4 |
| 13 | 17 | 20 | –3 |
| 14 | 17 | 21 | –4 |
| 15 | 17 | 22 | –5 |
| 16 | 18 | 23 | –5 |
| 17 | 19 | 24 | –5 |
| 18 | 19 | 25 | –6 |
| 19 | 11 | 17 | –6 |
| 20 | 11 | 13 | –2 |
| 21 | 12 | 18 | –6 |
| 22 | 13 | 19 | –6 |
| 23 | 15 | 19 | –4 |
| 24 | 17 | 20 | –3 |
| 25 | 10 | 17 | –7 |
| 26 | 11 | 13 | –2 |
| 27 | 12 | 18 | –6 |
| 28 | 17 | 19 | –2 |
| 29 | 15 | 19 | –4 |
| 30 | 17 | 20 | –3 |
| Promedio | 13.03 | 17.87 | |
| *SD* | | | 1.72 |

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

De acuerdo con el resultado obtenido, en que el valor crítico de *t* (2.045) fue menor al valor derivado de la fórmula (15.36), se puede rechazar la hipótesis nula.

***Representación e interpretación***

Debido a que el valor crítico de *t* (2.045) fue menor al valor derivado de la fórmula (15.36), se rechaza la hipótesis nula y se apoya la hipótesis alterna, es decir, existen diferencias entre las puntuaciones de la preprueba y la posprueba, es decir, la intervención logró un cambio positivo en la autoestima de los participantes.

# PRUEBA *t* DE STUDENT PARA MUESTRAS INDEPENDIENTES

Esta prueba se utiliza cuando existen dos condiciones experimentales y en cada condición participaron diferentes personas.

## Presentación del problema

Se desea saber si existen diferencias entre hombres y mujeres en la presencia de síntomas de trastornos de la conducta alimentaria (TCA). Para ello, se aplicó a 65 estudiantes universitarios (32 mujeres y 33 hombres), una prueba que mide dicho constructo y que consta de 26 reactivos. En esta prueba, puntuaciones mayores indican mayor sintomatología de TCA. Los resultados se presentan en la tabla 8-3.

**Tabla 8-3. Puntuaciones en la prueba que mide síntomas de TCA en hombres y mujeres universitarios**

| Hombres | Mujeres |
|---|---|
| 7 | 12 |
| 7 | 13 |
| 8 | 17 |
| 9 | 13 |
| 10 | 15 |
| 10 | 16 |
| 10 | 17 |
| 11 | 17 |
| 11 | 13 |
| 12 | 18 |
| 13 | 19 |
| 15 | 19 |

| | |
|---|---|
| 17 | 20 |
| 17 | 21 |
| 17 | 22 |
| 18 | 23 |
| 19 | 24 |
| 19 | 25 |
| 11 | 17 |
| 11 | 13 |
| 12 | 18 |
| 13 | 19 |
| 15 | 19 |
| 17 | 20 |
| 10 | 17 |
| 11 | 13 |
| 12 | 18 |
| 17 | 19 |
| 15 | 19 |
| 17 | 20 |
| 20 | 30 |
| 30 | 40 |
| 35 | |

# Estimación de parámetros y contraste de hipótesis

El primer paso consiste en establecer los parámetros que se contrastarán. En este caso, la comparación entre las dos

mediciones, de acuerdo con los criterios de la prueba *t*, corresponde a la comparación de la media aritmética obtenida en los dos grupos: hombres y mujeres.

La fórmula para calcular el estadístico *t* para muestras independientes es la siguiente:

$$t = \frac{\overline{D}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Donde:

$t$ = estadístico *t* Student para muestras independientes.

$\overline{D}$ = diferencia entre los promedios de las dos mediciones.

$n_1$ = tamaño de la muestra uno (hombres).

$n_2$ = tamaño de la muestra dos (mujeres).

$S_1^2$ = varianza de las puntuaciones de la muestra uno.

$S_2^2$ = varianza de las puntuaciones de la muestra dos.

En términos de hipótesis nula, se propone que la media de cada medición es igual o que no existen diferencias entre éstas. El razonamiento es que si se logra rechazar la hipótesis nula (diferencias significativas) se justifica concluir que las diferencias entre las dos mediciones no se deben al azar; es decir, que las posibles diferencias que se observan entre las mediciones no ocurrieron por razones desconocidas (variables extrañas) y, por lo tanto, es apropiado pensar que existe algún grado de dominio sobre la variable que se está manipulando, así como sobre la variable que se está midiendo.

***Contraste de hipótesis***

Las hipótesis a comparar son:

Hipótesis nula ($H_0$): en la que se afirma que la diferencia entre las medias aritméticas no existe (con un nivel de al menos $p < .05$).

Hipótesis alterna ($H_1$): en la que se afirma que la diferencia entre las medias aritméticas sí existe (con un nivel de al menos $p < .05$).

# Pasos de la inferencia

Una vez que se establecieron las hipótesis de investigación, es necesario considerar que todo el procedimiento para el cálculo del estadístico se enfoca en la hipótesis nula, ya que es el supuesto que se pretende rechazar porque pone en duda las diferencias entre hombres y mujeres. Los siguientes pasos están enfocados a calcular el valor del estadístico *t* usando el nivel de confianza de 95%, comparar este dato con el valor crítico y utilizar el razonamiento de decisión de que si el valor observado es mayor o igual al valor de las tablas, entonces se considera apropiado rechazar la hipótesis nula.

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***

De acuerdo con el tipo de datos, se observa que existe una medición con dos grupos independientes (hombres y mujeres) y, por lo tanto, se determina la pertinencia de aplicar la prueba *t* para muestras independientes.

Dado que el problema que se enfrenta incluye la comparación de las medias aritméticas de dos grupos distintos, la prueba estadística apropiada es la ***t* para muestras independientes.** Los supuestos que es necesario cumplir para analizar los datos son (Field, 2009):

1. Muestras aleatorias: los sujetos que se extrajeron de la población se obtuvieron al azar.
2. Distribución normal: se asume que las distribuciones de las muestras son normales.
3. Medias iguales.

***Establecimiento de las hipótesis estadísticas***

En la hipótesis nula ($H_0$) se afirma que las medias aritméticas de las mediciones son iguales. Para el ejemplo, el planteamiento de $H_0$ es: los síntomas de TCA son iguales entre hombres y mujeres.

$$H_0: m_{medición1} = m_{medición2}$$

Mientras que en la hipótesis alterna ($H_1$) se afirma que las medias aritméticas de las mediciones son diferentes. Para el ejemplo, el planteamiento de $H_0$ es: los síntomas de TCA son diferentes entre hombres y mujeres.

$$H_1: m_{medición1} \neq m_{medición2}$$

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

Si se considera que de un conjunto de datos (población) es posible extraer todas las muestras posibles del mismo o de diferente tamaño, la media de cada una de las distribuciones muestrales es igual a la media de la población, siempre y cuando los datos de cada muestra se obtengan al azar. Por ello, es necesario establecer un margen de error con el cual se pueda demostrar que una hipótesis nula se está rechazando acertadamente, esto es, un área debajo de la curva en la que se encuentra la menor frecuencia de eventos que difieren del resultado que se pretende demostrar. Por ejemplo, utilizar un nivel alfa de .05 quiere decir que si el experimento se repitiera 100 veces, sólo en cinco ocasiones el resultado se explicaría por medio del azar.

Una vez que se estima el valor del estadístico *t*, es necesario compararlo con el valor crítico o dato que limita la región crítica, es decir, el área bajo la curva en la que se incluyen todos los valores del estadístico que validan el rechazo de la hipótesis nula.

Los grados de libertad serían $n_1 + n_2 - 2$.

***Cálculo de los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

Las medias, varianzas y el tamaño de la muestra para los hombres y las mujeres se presentan en la tabla 8-4.

Al sustituir los valores en la fórmula de *t*, el resultado es:

$$t = \frac{14.42 - 18.94}{\sqrt{\frac{35.38}{33} + \frac{30.06}{32}}} = -4.85/1.42 = -3.18$$

Los grados de libertad serían $n_1 + n_2$ -2 = 32 + 33 -2 = 63. De acuerdo con la Tabla D del Apéndice, el valor crítico

es 2.00.

| | Tabla 8-4. Medias, varianzas y tamaño de la muestra para hombres y mujeres universitarios | |
|---|---|---|
| | **Hombres** | **Mujeres** |
| | 7 | 12 |
| | 7 | 13 |
| | 8 | 17 |
| | 9 | 13 |
| | 10 | 15 |
| | 10 | 16 |
| | 10 | 17 |
| | 11 | 17 |
| | 11 | 13 |
| | 12 | 18 |
| | 13 | 19 |
| | 15 | 19 |
| | 17 | 20 |
| | 17 | 21 |
| | 17 | 22 |
| | 18 | 23 |
| | 19 | 24 |
| | 19 | 25 |
| | 11 | 17 |
| | 11 | 13 |
| | 12 | 18 |
| | 13 | 19 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 15 | 19 |
| | 17 | 20 |
| | 10 | 17 |
| | 11 | 13 |
| | 12 | 18 |
| | 17 | 19 |
| | 15 | 19 |
| | 17 | 20 |
| | 20 | 30 |
| | 30 | 40 |
| | 35 | |
| **Media** | 14.42 | 18.94 |
| **Varianza** | 35.38 | 30.06 |
| **Tamaño de la muestra** | 33 | 32 |

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

De acuerdo con el resultado obtenido en que el valor crítico de *t* (2.00) fue menor al valor derivado de la fórmula (3.18), se puede rechazar la hipótesis nula.

***Representación e interpretación***

Debido a que el valor crítico de *t* (2.00) fue menor al valor derivado de la fórmula (–3.18), se puede aceptar la hipótesis alterna, es decir, existen diferencias entre las puntuaciones de hombres y mujeres, lo cual significa las mujeres presentan significativamente más síntomas de TCA que los hombres.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

***Muestras relacionadas***

1. **Presentación del problema.** Un profesor diseñó un programa de regularización que fue impartido a 30 estudiantes, un mes antes de su examen final. Con el fin de conocer si el programa tenía efectos sobre el desempeño académico de sus alumnos, estos fueron evaluados antes y después del programa de regularización.

Las calificaciones registradas por los estudiantes fueron las siguientes:

**Tabla 8-1. Calificaciones obtenidas antes y después de programa de regularización**

| Estudiante | Calificaciones | |
|---|---|---|
| | Antes | Después |
| 1 | 5 | 7 |
| 2 | 6 | 7 |
| 3 | 9 | 8 |
| 4 | 6 | 5 |
| 5 | 7 | 7 |
| 6 | 5 | 8 |
| 7 | 9 | 9 |
| 8 | 7 | 9 |
| 9 | 7 | 8 |
| 10 | 10 | 9 |
| 11 | 8 | 7 |
| 12 | 8 | 10 |
| 13 | 7 | 8 |
| 14 | 5 | 5 |
| 15 | 9 | 9 |
| 16 | 7 | 8 |
| 17 | 7 | 9 |
| 18 | 10 | 10 |
| 19 | 8 | 9 |
| 20 | 5 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | 5 | 6 |
| 22 | 7 | 7 |
| 23 | 6 | 6 |
| 24 | 9 | 8 |
| 25 | 8 | 9 |
| 26 | 10 | 9 |
| 27 | 7 | 7 |
| 28 | 6 | 9 |
| 29 | 7 | 9 |
| 30 | 9 | 10 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas en las calificaciones antes y después del programa de regularización, considere un nivel de significación de .05.

**Hipótesis:**

$H_0$: si los estudiantes participan en un programa de regularización, no habrá diferencias entre sus calificaciones antes y después del programa.

$H_1$: si los estudiantes participan en un programa de regularización, habrá diferencias entre sus calificaciones antes y después del programa.

**Lógica de la solución:**

Se tiene un grupo de estudiantes y se desea conocer si obtienen puntuaciones diferentes antes y después de un programa de regularización, por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras relacionadas.

2. **Presentación del problema.** Un laboratorio clínico está interesado en evaluar el efecto de un nuevo medicamento sobre los niveles de glucosa, por lo que administró una dosis a 36 pacientes que fueron medidos antes y después de la administración del fármaco. Los niveles de glucosa obtenidos fueron:

**Tabla 8-2. Niveles de glucosa antes y después de la administración del fármaco**

| Paciente | Glucosa | |
|---|---|---|
| | Antes | Después |
| 1 | 91 | 81 |
| 2 | 89 | 79 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 101 | 93 |
| 4 | 126 | 120 |
| 5 | 91 | 85 |
| 6 | 89 | 78 |
| 7 | 98 | 96 |
| 8 | 97 | 75 |
| 9 | 88 | 79 |
| 10 | 93 | 96 |
| 11 | 84 | 95 |
| 12 | 87 | 100 |
| 13 | 89 | 64 |
| 14 | 85 | 101 |
| 15 | 73 | 86 |
| 16 | 86 | 91 |
| 17 | 87 | 95 |
| 18 | 79 | 81 |
| 19 | 93 | 91 |
| 20 | 98 | 91 |
| 21 | 79 | 73 |
| 22 | 101 | 93 |
| 23 | 126 | 92 |
| 24 | 95 | 83 |
| 25 | 86 | 94 |
| 26 | 88 | 89 |

| | | |
|---|---|---|
| 27 | 90 | 83 |
| 28 | 88 | 98 |
| 29 | 96 | 96 |
| 30 | 91 | 93 |
| 31 | 89 | 99 |
| 32 | 85 | 94 |
| 33 | 93 | 93 |
| 34 | 91 | 93 |
| 35 | 89 | 90 |
| 36 | 98 | 76 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas entre los niveles de glucosa antes y después de la administración del medicamento, considere un nivel de significación de .01.

**Hipótesis:**

$H_0$: si los pacientes reciben una dosis de medicamento, no habrá diferencias entre sus niveles de glucosa antes y después de su administración.

$H_1$: si los pacientes reciben una dosis de medicamento, habrá diferencias entre sus niveles de glucosa antes y después de su administración.

**Lógica de la solución:**

Se tiene un grupo de pacientes y se desea conocer si sus niveles de glucosa son diferentes antes y después de la administración del medicamento, por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras relacionadas.

3. **Presentación del problema.** Un psicólogo desea investigar el efecto de una intervención cognitiva sobre la reducción de peso en pacientes con sobrepeso y obesidad, por lo que obtuvo el Índice de masa corporal (IMC) de 30 pacientes, antes de participar en el programa y un mes después. El IMC registrado por los participantes fue:

**Tabla 8-3. IMC de pacientes antes y después del programa de intervención cognitiva**

| Paciente | Índice de masa corporal (IMC) | |
|---|---|---|
| | Antes | Un mes después |
| 1 | 26.7 | 26.0 |
| 2 | 26.7 | 25.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 26.8 | 26.4 |
| 4 | 26.9 | 25.2 |
| 5 | 27.7 | 25.3 |
| 6 | 28.0 | 25.4 |
| 7 | 28.2 | 25.9 |
| 8 | 28.5 | 25.9 |
| 9 | 28.6 | 27.3 |
| 10 | 28.8 | 26.0 |
| 11 | 28.9 | 27.7 |
| 12 | 28.9 | 28.0 |
| 13 | 29.2 | 28.0 |
| 14 | 29.2 | 28.6 |
| 15 | 29.5 | 28.8 |
| 16 | 29.9 | 33.2 |
| 17 | 30.0 | 34.0 |
| 18 | 31.1 | 29.2 |
| 19 | 31.2 | 32.3 |
| 20 | 32.3 | 29.9 |
| 21 | 32.6 | 30.0 |
| 22 | 28.9 | 28.0 |
| 23 | 29.2 | 28.0 |
| 24 | 29.2 | 28.6 |
| 25 | 29.5 | 28.8 |
| 26 | 29.9 | 33.2 |
| 27 | 30.0 | 34.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 31.1 | 29.2 |
| 29 | 31.2 | 32.3 |
| 30 | 32.3 | 29.9 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas en el IMC de los pacientes antes de participar en la intervención y un mes después de ésta, considere un nivel de significación de .05.

**Hipótesis:**

$H_0$: si los pacientes con sobrepeso y obesidad participan en una intervención cognitiva, no habrá diferencias en su IMC antes y un mes después de su participación.

$H_1$: si los pacientes con sobrepeso y obesidad participan en una intervención cognitiva, habrá diferencias en su IMC antes y un mes después de su participación.

**Lógica de la solución:**

Se tiene un grupo de pacientes y se desea conocer si su IMC es diferente antes de participar en un programa cognitivo y un mes después de éste, por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras relacionadas.

4. **Presentación del problema.** En una empresa se desea conocer si la música tiene un efecto sobre la satisfacción laboral de los trabajadores, y para ello, los participantes respondieron la Escala de Satisfacción Laboral (Reiko, 1987) en dos momentos diferentes durante la jornada laboral: con y sin música. Las puntuaciones obtenidas por los trabajadores fueron las siguientes:

**Tabla 8-4. Satisfacción laboral de trabajadores con y sin música durante su jornada laboral**

| Trabajadores | Satisfacción laboral | |
|---|---|---|
| | Sin música | Con música |
| 1 | 23 | 26 |
| 2 | 25 | 30 |
| 3 | 27 | 33 |
| 4 | 22 | 35 |
| 5 | 28 | 34 |
| 6 | 22 | 30 |
| 7 | 28 | 39 |
| 8 | 27 | 31 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 18 | 35 |
| 10 | 34 | 40 |
| 11 | 30 | 35 |
| 12 | 21 | 38 |
| 13 | 33 | 35 |
| 14 | 26 | 20 |
| 15 | 28 | 38 |
| 16 | 29 | 30 |
| 17 | 26 | 32 |
| 18 | 38 | 40 |
| 19 | 30 | 30 |
| 20 | 30 | 25 |
| 21 | 20 | 32 |
| 22 | 22 | 28 |
| 23 | 20 | 32 |
| 24 | 27 | 30 |
| 25 | 22 | 22 |
| 26 | 28 | 38 |
| 27 | 29 | 30 |
| 28 | 26 | 32 |
| 29 | 38 | 40 |
| 30 | 30 | 30 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas en la satisfacción laboral de los trabajadores durante jornadas de trabajo con y sin música, considere un nivel de significación de .05.

**Hipótesis:**

$H_0$: no existen diferencias estadísticamente significativas en la satisfacción laboral de los trabajadores durante las jornadas de trabajo con y sin música.

$H_1$: existen diferencias estadísticamente significativas en la satisfacción laboral de los trabajadores durante las jornadas de trabajo con y sin música.

**Lógica de la solución:**

Se tiene un grupo de trabajadores y se desea conocer si su satisfacción laboral es diferente durante jornadas de trabajo con y sin música, por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras relacionadas.

5. **Presentación del problema.** Un psicólogo evaluó el efecto de un taller de autocontrol sobre la regulación que ejercen las mujeres en el estilo de crianza de sus hijos preadolescentes; para ello, aplicó el Cuestionario de Percepción de las Madres de su Estilo de Crianza (López, 2000) a un grupo de 30 madres de familia, antes y después de su participación en el taller.

**Tabla 8-5. Percepción del estilo de crianza antes y después de participar en un programa de autocontrol**

| Madres de familia | Percepción del estilo de crianza | |
|---|---|---|
| | Antes | Después |
| 1 | 23 | 25 |
| 2 | 27 | 34 |
| 3 | 25 | 25 |
| 4 | 30 | 33 |
| 5 | 30 | 29 |
| 6 | 32 | 25 |
| 7 | 25 | 31 |
| 8 | 33 | 30 |
| 9 | 29 | 32 |
| 10 | 37 | 32 |
| 11 | 28 | 30 |
| 12 | 34 | 36 |
| 13 | 32 | 36 |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 31 | 31 |
| 15 | 35 | 35 |
| 16 | 27 | 31 |
| 17 | 36 | 30 |
| 18 | 30 | 32 |
| 19 | 27 | 28 |
| 20 | 23 | 25 |
| 21 | 32 | 40 |
| 22 | 31 | 37 |
| 23 | 31 | 32 |
| 24 | 29 | 35 |
| 25 | 36 | 33 |
| 26 | 33 | 34 |
| 27 | 37 | 35 |
| 28 | 32 | 31 |
| 29 | 31 | 32 |
| 30 | 31 | 32 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas en la percepción que tienen las participantes del estudio acerca de su estilo de crianza, antes y después del programa de autocontrol, considere un nivel de significación de .05.

**Hipótesis:**

$H_0$: si las madres de familia participan en un programa de autocontrol, no habrá cambios en su percepción sobre el estilo de crianza de sus hijos adolescentes.

$H_1$: si las madres de familia participan en un programa de autocontrol, habrá cambios en su percepción sobre el estilo de crianza de sus hijos adolescentes.

**Lógica de la solución:**

Se tiene un grupo de madres de familia y se desea conocer si existen cambios en su percepción sobre el estilo de

crianza de sus hijos adolescentes, antes y después de su participación en un programa de autocontrol, por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras relacionadas.

***Muestras independientes***

6. **Presentación del problema.** Con la finalidad de dirigir programas preventivos, una institución de salud comparó el conocimiento sobre el uso de métodos anticonceptivos entre adolescentes de ambos sexos. Las puntuaciones obtenidas por los adolescentes se muestran a continuación:

**Tabla 8-6. Conocimiento de adolescentes sobre el uso de métodos anticonceptivos**

| Hombres | Mujeres |
|---|---|
| 50 | 14 |
| 31 | 27 |
| 33 | 42 |
| 15 | 34 |
| 26 | 35 |
| 40 | 15 |
| 23 | 43 |
| 25 | 45 |
| 14 | 41 |
| 41 | 35 |
| 38 | 21 |
| 29 | 35 |
| 13 | 28 |
| 37 | 41 |
| 40 | 41 |
| 28 | 24 |
| 32 | 35 |
| 19 | 17 |

| | |
|---|---|
| 59 | 19 |
| 12 | 34 |
| 10 | 33 |
| 27 | 46 |
| 25 | 23 |
| 10 | 32 |
| 15 | 25 |
| 25 | 31 |
| 25 | 15 |
| 25 | 13 |
| 15 | 17 |
| 23 | 23 |
| 12 | 30 |
| 17 | 19 |
| 14 | 12 |
| 21 | 34 |
| 11 | 23 |
| | 40 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas entre hombres y mujeres en su nivel de conocimiento sobre los métodos anticonceptivos, considere un nivel de significación de .05.

**Hipótesis:**

$H_0$: no existen diferencias entre hombres y mujeres adolescentes en su nivel de conocimiento sobre métodos anticonceptivos.

$H_1$: existen diferencias entre hombres y mujeres adolescentes en su nivel de conocimiento sobre métodos anticonceptivos.

**Lógica de solución:**

Se desea saber si existen diferencias en el nivel de conocimiento sobre métodos anticonceptivos entre dos grupos

diferentes (hombres y mujeres), por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras independientes.

7. **Presentación del problema.** Un psicólogo aplicó el Inventario de Depresión de Beck a una muestra conformada por adultos mayores sedentarios y recreativos para conocer si existían diferencias en su nivel de sintomatología depresiva. Las puntuaciones obtenidas fueron:

**Tabla 8-7. Diferencias de sintomatología entre adultos mayores sedentarios y recreativos**

| Adultos mayores | |
|---|---|
| **Sedentarios** | **Recreativos** |
| 30 | 27 |
| 20 | 20 |
| 25 | 23 |
| 28 | 25 |
| 23 | 25 |
| 25 | 22 |
| 23 | 20 |
| 27 | 25 |
| 22 | 20 |
| 26 | 20 |
| 20 | 23 |
| 23 | 25 |
| 25 | 23 |
| 28 | 20 |
| 23 | 20 |
| 25 | 23 |
| 23 | 25 |
| 27 | 23 |

| | |
|---|---|
| 22 | 20 |
| 26 | 20 |
| 28 | 23 |
| 23 | 25 |
| 25 | 23 |
| 23 | 20 |
| 27 | 20 |
| 28 | 20 |
| 23 | 20 |
| 25 | 20 |
| 23 | 20 |
| 27 | 23 |
| 22 | 25 |
| 26 | 23 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas entre los adultos mayores sedentarios y recreativos, considere un nivel de significación de .01.

**Hipótesis:**

$H_0$: no existen diferencias en el nivel de sintomatología depresiva entre los adultos mayores sedentarios y recreativos.

$H_1$: existen diferencias en el nivel de sintomatología depresiva entre los adultos mayores sedentarios y recreativos.

**Lógica de la solución:**

Se desea saber si existen diferencias en el nivel de sintomatología depresiva entre dos grupos de adultos mayores, sedentarios y recreativos, por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras independientes.

**8. Presentación del problema.** Se sabe que las redes sociales han tenido un gran impacto sobre los movimientos sociales y la actividad política (Guerrero, 2012), por lo que se desea conocer si la confianza hacia las instituciones que conforman el sistema político es diferente entre los usuarios de Facebook y Twitter. Se aplicó una Escala de Confianza en las instituciones a un grupo de voluntarios, quienes informaron gastar al menos 15 h a la semana en una red social. Dicha escala es un instrumento tipo Likert, en donde a mayor puntuación, mayor confianza en las instituciones. Las puntuaciones obtenidas en el factor gubernamental se muestran a continuación:

| Tabla 8-8. Diferencias en la confianza hacia las instituciones entre usuarios de Facebook y Twitter | |
|---|---|
| **Usuarios** | |
| **Facebook** | **Twitter** |
| 9 | 7 |
| 5 | 7 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 3 |
| 4 | 8 |
| 6 | 3 |
| 7 | 6 |
| 3 | 4 |
| 6 | 2 |
| 9 | 3 |
| 4 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 7 |
| 8 | 3 |
| 8 | 7 |
| 5 | 3 |
| 9 | 5 |
| 9 | 3 |
| 9 | 7 |
| 5 | 7 |
| 3 | 3 |

| | |
|---|---|
| 4 | 5 |
| 5 | 3 |
| 4 | 8 |
| 6 | 3 |
| 7 | 6 |
| 3 | 4 |
| 6 | 2 |
| 9 | 3 |
| 4 | 4 |
| 3 | 9 |
| 9 | 7 |
| 4 | 4 |
| 3 | 9 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas en la confianza hacia las instituciones que conforman el sistema político entre usuarios de Facebook y Twitter, considere un nivel de significación de .01.

**Hipótesis:**

$H_0$: no existen diferencias en el nivel de confianza hacia las instituciones que conforman el sistema político entre los usuarios de Facebook y Twitter.

$H_1$: existen diferencias en el nivel de confianza hacia las instituciones que conforman el sistema político entre los usuarios de Facebook y Twitter.

**Lógica de la solución:**

Se desea saber si existen diferencias en nivel de confianza hacia las instituciones que conforman el sistema político entre dos grupos diferentes (usuarios de Facebook y usuarios de Twitter), por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras independientes.

**9. Presentación del problema.** Se realizó con estudio para comparar la satisfacción con el servicio médico entre los pacientes del turno matutino y vespertino de una institución de salud pública. Para ello, se aplicó un cuestionario con 30 preguntas tipo Likert (1 = totalmente satisfecho, 5 = totalmente insatisfecho). Las puntuaciones obtenidas fueron:

| Tabla 8-9. Satisfacción con el servicio médico entre pacientes del turno matutino y vespertino | |
|---|---|
| **Pacientes** | |

| Matutino | Vespertino |
|---|---|
| 30 | 88 |
| 126 | 84 |
| 102 | 96 |
| 18 | 84 |
| 90 | 48 |
| 132 | 112 |
| 66 | 64 |
| 126 | 98 |
| 78 | 104 |
| 108 | 88 |
| 96 | 106 |
| 90 | 72 |
| 78 | 64 |
| 90 | 88 |
| 18 | 66 |
| 90 | 96 |
| 120 | 52 |
| 54 | 56 |
| 84 | 24 |
| 126 | 84 |
| 78 | 66 |
| 84 | 80 |
| 132 | 72 |
| 144 | 86 |

| | |
|---|---|
| 96 | 60 |
| 126 | 104 |
| 90 | 60 |
| | 112 |
| | 64 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas entre pacientes del turno matutino y el vespertino en su nivel de satisfacción con el servicio médico, considere un nivel de significación de .01.

**Hipótesis:**

$H_0$: no existen diferencias entre pacientes del turno matutino y vespertino en su nivel de satisfacción con el servicio médico.

$H_1$: existen diferencias entre pacientes del turno matutino y vespertino en su nivel de satisfacción con el servicio médico.

**Lógica de la solución:**

Se desea saber si existen diferencias en satisfacción con el servicio médico entre dos grupos diferentes (pacientes del turno matutino y del vespertino), por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras independientes.

**10. Presentación del problema.** Debido al incremento de accidentes automovilísticos, una institución gubernamental comparó el nivel de ansiedad entre conductores de transporte particular con los del público. Los participantes respondieron el Inventario de Ansiedad de Beck (Robles *et al.*, 2001) una semana después de un choque automovilístico.

**Tabla 8-10. Nivel de ansiedad entre conductores de transporte particular y público**

| Particular | Público |
|---|---|
| 13 | 19 |
| 12 | 25 |
| 14 | 10 |
| 10 | 11 |
| 11 | 15 |
| 33 | 15 |
| 15 | 14 |

| | |
|---|---|
| 25 | 12 |
| 9 | 32 |
| 15 | 44 |
| 10 | 18 |
| 7 | 21 |
| 25 | 17 |
| 14 | 14 |
| 13 | 22 |
| 12 | 30 |
| 7 | 15 |
| 21 | 12 |
| 17 | 15 |
| 19 | 35 |
| 29 | 12 |
| 30 | 13 |
| 13 | 22 |
| 8 | 18 |
| 5 | 34 |
| 7 | 28 |

Indique si existen diferencias estadísticamente significativas en el nivel de ansiedad entre conductores de transporte particular y del público una semana después de un choque automovilístico, considere un nivel de significación de .05.

**Hipótesis:**

$H_0$: no existen diferencias entre conductores del transporte particular y del público en su nivel de ansiedad una semana después de un choque automovilístico.

$H_1$: existen diferencias entre conductores del transporte particular y del público en su nivel de ansiedad una semana

después de un choque automovilístico.

**Lógica de la solución:**
Se desea saber si existen diferencias en el nivel de ansiedad una semana después de un choque automovilístico entre dos grupos de conductores (transporte particular y público), por lo tanto, se debe realizar una prueba *t* Student para muestras independientes.

# Ejercicios voluntarios

**1.** La literatura señala que la autoestima se construye a partir de los comentarios provenientes de personas significativas, por ejemplo, la familia (Berger y Luckman, 1986). A partir de esta premisa, un grupo de trabajadores sociales plantea que el nivel de autoestima es diferente entre adolescentes de familias monoparentales y biparentales, por lo que se evaluó a un grupo de estudiantes que viven con uno ($n$ = 31) o ambos padres ($n$ = 29). A partir de los siguientes datos, indique cuál es la decisión sobre $H_1$, considere un nivel de significancia de .05.

**Tabla 8-11. Nivel de autoestima entre adolescentes de familias monoparentales y biparentales**

| Tipo de familia | |
|---|---|
| **Monoparental** | **Biparental** |
| 33 | 25 |
| 23 | 31 |
| 30 | 26 |
| 37 | 43 |
| 28 | 33 |
| 16 | 37 |
| 36 | 37 |
| 22 | 30 |
| 33 | 29 |
| 26 | 30 |
| 39 | 23 |
| 25 | 37 |
| 34 | 34 |

| | |
|---|---|
| 29 | 41 |
| 17 | 28 |
| 38 | 36 |
| 33 | 38 |
| 33 | 29 |
| 33 | 29 |
| 31 | 30 |
| 18 | 37 |
| 29 | 34 |
| 33 | 30 |
| 31 | 23 |
| 32 | 30 |
| 18 | 23 |
| 29 | 37 |
| 31 | 34 |
| 32 | 32 |
| 18 | |
| 29 | |

**2.** Un grupo de activistas comparó las actitudes hacia la esterilización canina entre los asistentes a una intervención comunitaria. Participaron 60 jóvenes asignados a una actividad: cine-debate o conferencia. Se esperaba que los participantes del cine-debate y asistentes a la conferencia, obtuvieran puntuaciones diferentes en su actitud hacia la esterilización canina. A partir de los siguientes datos, indique cuál es la decisión sobre $H_1$, considere un nivel de significancia de .05.

**Tabla 8-12. Actitud hacia la esterilización canina entre asistentes a cine-debate y conferencia**

| Actividad | |
|---|---|
| **Cine-debate** | **Conferencia** |

| | |
|---|---|
| 41 | 44 |
| 60 | 47 |
| 37 | 47 |
| 45 | 43 |
| 40 | 38 |
| 40 | 70 |
| 63 | 51 |
| 55 | 59 |
| 60 | 42 |
| 65 | 57 |
| 61 | 50 |
| 51 | 28 |
| 53 | 36 |
| 63 | 32 |
| 79 | 33 |
| 41 | 44 |
| 60 | 47 |
| 37 | 47 |
| 45 | 43 |
| 40 | 38 |
| 40 | 70 |
| 63 | 51 |
| 55 | 59 |
| 60 | 42 |
| | |

| | |
|---|---|
| 65 | 57 |
| 61 | 50 |
| 51 | 28 |
| 53 | 36 |
| 63 | 32 |
| 79 | 33 |

**3.** Algunos estudios han aportado evidencia sobre la relación que existe entre la exposición a los videojuegos violentos y la conducta agresiva (Etxeberri, 2011; Tejeiro *et al*., 2009). Con base en ello, un psicólogo planteó que el nivel de agresión es diferente entre niños que practican alguno de los videojuegos más famosos del momento. Para evaluar esta hipótesis, convocó a 58 niños que juegan A o B ($n$ = 28 y 30, respectivamente) a que respondieran un inventario de conducta agresiva. A partir de las puntuaciones obtenidas, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .01.

**Tabla 8-13. Conducta agresiva entre niños que utilizan los videojuegos A o B**

| Videojuego | |
|---|---|
| **A** | **B** |
| 50 | 53 |
| 48 | 59 |
| 56 | 54 |
| 48 | 50 |
| 53 | 44 |
| 38 | 63 |
| 42 | 52 |
| 51 | 50 |
| 44 | 42 |
| 49 | 57 |
| 47 | 43 |

| | |
|---|---|
| 47 | 56 |
| 45 | 57 |
| 44 | 42 |
| 41 | 63 |
| 40 | 49 |
| 50 | 51 |
| 48 | 54 |
| 56 | 55 |
| 48 | 49 |
| 53 | 59 |
| 38 | 54 |
| 42 | 50 |
| 51 | 44 |
| 44 | 63 |
| 49 | 52 |
| 47 | 50 |
| 44 | 42 |
| | 57 |
| | 43 |

**4.** Un nutriólogo plantea que hay diferencias en la cantidad de peso corporal perdido de acuerdo con los diferentes tipos de menús dietéticos que se asignan a los pacientes. Para evaluar dicha hipótesis, se comparó el número de kilogramos perdidos entre un grupo de pacientes con dieta basada en alimentos permitidos frente a los que recibieron un menú de porciones específicas. Con base en los siguientes datos, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .01.

**Tabla 8-14. Cantidad de peso corporal perdido de acuerdo con el tipo de menú asignado**

| **Menú** | |
|---|---|

| Alimentos permitidos | Porciones específicas |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 8 |
| 3 | 3 |
| 0 | 2 |
| 4 | 4 |
| 2 | 7 |
| 8 | 3 |
| 1 | 5 |
| 1 | 2 |
| 4 | 3 |
| 0 | 5 |
| 3 | 4 |
| 0 | 6 |
| 3 | 5 |
| 0 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 8 |
| 4 | 3 |
| 3 | 2 |
| 0 | 4 |
| 4 | 7 |
| 2 | 3 |
| 8 | 5 |
| | |

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | 3 |
| 4 | 5 |
| 0 | 4 |
| 3 | 6 |
| 0 | 5 |
| 3 | |

**5.** Se sabe que el estrés laboral puede estar relacionado con la carga de trabajo excesiva (Organización Mundial de la Salud, 2004). Con base en ello, se plantea que los profesores que dedican más tiempo a sus actividades docentes tienen mayor nivel de estrés laboral. Para probar dicha hipótesis, se comparó el nivel de estrés aboral entre profesores de escuelas de medio tiempo frente a los que laboran tiempo completo. A partir de las puntuaciones obtenidas, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .05.

**Tabla 8-15. Nivel de estrés de profesores que trabajan medio tiempo y tiempo completo**

| Tipo de escuela | |
|---|---|
| **Medio tiempo** | **Tiempo completo** |
| 79 | 83 |
| 77 | 87 |
| 86 | 73 |
| 85 | 92 |
| 77 | 85 |
| 79 | 85 |
| 84 | 71 |
| 83 | 85 |
| 75 | 77 |
| 81 | 86 |
| 84 | 89 |

| | |
|---|---|
| 79 | 85 |
| 80 | 73 |
| 84 | 94 |
| 79 | 103 |
| 86 | 79 |
| 61 | 86 |
| 77 | 77 |
| 79 | 83 |
| 77 | 87 |
| 86 | 73 |
| 85 | 92 |
| 77 | 85 |
| 79 | 85 |
| 84 | 71 |
| 83 | 85 |
| 75 | 77 |
| 81 | 86 |
| 84 | 89 |
| 79 | 85 |
| 80 | 73 |
| 84 | 94 |
| 79 | 103 |

***Ejercicios de t Student para muestras relacionadas***

**6.** El director de un hospital plantea que si las enfermeras participan en un programa de conductas de autocuidado, incrementarán su bienestar emocional. Para probar dicha hipótesis, se evaluó a 30 enfermeras antes y después de

su participación en una intervención. A partir de las puntuaciones obtenidas, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .01.

**Tabla 8-16. Bienestar emocional de enfermeras antes y después de su participación en una intervención**

| Bienestar emocional | |
|---|---|
| **Preprueba** | **Posprueba** |
| 81 | 85 |
| 79 | 83 |
| 82 | 85 |
| 83 | 86 |
| 80 | 85 |
| 81 | 85 |
| 81 | 83 |
| 82 | 85 |
| 84 | 88 |
| 85 | 87 |
| 83 | 85 |
| 80 | 84 |
| 82 | 83 |
| 80 | 83 |
| 80 | 83 |
| 80 | 86 |
| 79 | 83 |
| 79 | 83 |
| 83 | 85 |
| 83 | 87 |

| | |
|---|---|
| 78 | 83 |
| 77 | 83 |
| 82 | 88 |
| 81 | 85 |
| 80 | 85 |
| 83 | 85 |
| 82 | 84 |
| 81 | 84 |
| 83 | 87 |
| 78 | 84 |

**7.** Se considera que el programa de movilidad estudiantil incrementa el compromiso afectivo que tienen los estudiantes hacia la institución educativa. Para evaluar dicha hipótesis, se solicitó a 35 alumnos que respondieran una escala de compromiso afectivo antes y después de una movilidad estudiantil. A partir de los datos obtenidos, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .01.

**Tabla 8-17. Compromiso afectivo de estudiantes hacia su institución educativa antes y después de una movilidad estudiantil**

| Compromiso afectivo | |
|---|---|
| **Antes** | **Después** |
| 19 | 21 |
| 28 | 25 |
| 24 | 26 |
| 26 | 29 |
| 21 | 25 |
| 21 | 23 |
| 20 | 22 |
| 24 | 24 |
| | |

| | |
|---|---|
| 27 | 29 |
| 25 | 23 |
| 24 | 29 |
| 23 | 23 |
| 19 | 20 |
| 22 | 20 |
| 22 | 26 |
| 24 | 26 |
| 25 | 28 |
| 18 | 18 |
| 25 | 29 |
| 24 | 26 |
| 26 | 19 |
| 20 | 24 |
| 22 | 25 |
| 27 | 30 |
| 24 | 20 |
| 19 | 25 |
| 21 | 25 |
| 30 | 30 |
| 24 | 23 |
| 24 | 26 |
| 29 | 30 |
| 25 | 28 |
| 24 | 26 |
| 29 | 30 |

| | |
|---|---|
| 24 | 30 |

**8.** Un psicólogo planteó que el grado de insatisfacción corporal femenina es diferente antes y después del nacimiento del primer hijo. Para corroborar dicha hipótesis, una muestra de 32 madres primerizas respondieron el Cuestionario de Imagen Corporal (Vázquez *et al*., 2011): durante el octavo mes de embarazo y un mes después del parto. A partir de las puntuaciones obtenidas, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .05.

**Tabla 8-18. Insatisfacción corporal durante el octavo mes de embarazo y un mes después del parto**

| Insatisfacción corporal | |
|---|---|
| **Octavo mes de embarazo** | **Un mes después del parto** |
| 86 | 110 |
| 93 | 100 |
| 49 | 60 |
| 53 | 50 |
| 91 | 118 |
| 91 | 75 |
| 38 | 50 |
| 67 | 70 |
| 138 | 115 |
| 60 | 85 |
| 42 | 90 |
| 133 | 100 |
| 84 | 103 |
| 125 | 126 |
| 89 | 75 |
| 84 | 62 |
| 61 | 101 |
| 92 | 120 |

| | |
|---|---|
| 89 | 90 |
| 97 | 100 |
| 58 | 74 |
| 100 | 112 |
| 144 | 103 |
| 150 | 122 |
| 90 | 100 |
| 86 | 118 |
| 94 | 157 |
| 130 | 118 |
| 90 | 100 |
| 81 | 90 |
| 52 | 50 |
| 54 | 56 |

**9.** Un médico desea conocer si un nuevo tratamiento farmacológico es eficaz para la disminución del dolor crónico. Se aplicó una escala analógica visual del dolor a 36 pacientes, antes y después de suministrar el medicamento. A partir de los datos obtenidos, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .05.

**Tabla 8-19. Nivel de dolor antes y después de suministrar el medicamento**

| Nivel del dolor | |
|---|---|
| **Antes** | **Después** |
| 8 | 8 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |
| 10 | 9 |
| 9 | 9 |
| 8 | 9 |

| | |
|---|---|
| 8 | 7 |
| 8 | 7 |
| 10 | 8 |
| 8 | 9 |
| 8 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 8 | 9 |
| 8 | 8 |
| 8 | 9 |
| 8 | 9 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 8 | 9 |
| 8 | 8 |
| 8 | 8 |
| 8 | 9 |
| 9 | 9 |
| 8 | 8 |
| 7 | 8 |
| 9 | 9 |
| 9 | 10 |
| 9 | 9 |
| 9 | 9 |

| | |
|---|---|
| 10 | 8 |
| 9 | 9 |
| 8 | 10 |
| 10 | 8 |
| 8 | 8 |
| 8 | 9 |

**10.** Se desea saber si la práctica deportiva mejora el ajuste psicológico en personas que han perdido algún miembro. Se evaluó a un grupo de 32 deportistas, antes y seis meses después de su incorporación a un equipo de fútbol. A partir de los siguientes datos, indique cuál es la decisión sobre $H_0$, considere un nivel de significancia de .01.

**Tabla 8-20. Ajuste psicológico en personas con amputación, antes y después de su incorporación a un equipo de fútbol**

| Ajuste psicológico | |
|---|---|
| **Antes** | **Seis meses después** |
| 60 | 64 |
| 62 | 56 |
| 65 | 64 |
| 55 | 57 |
| 64 | 65 |
| 65 | 55 |
| 63 | 63 |
| 66 | 67 |
| 65 | 72 |
| 68 | 57 |
| 64 | 70 |
| 63 | 63 |
| 64 | 66 |

| | |
|---|---|
| 63 | 63 |
| 63 | 65 |
| 63 | 62 |
| 63 | 60 |
| 58 | 63 |
| 65 | 67 |
| 63 | 63 |
| 63 | 69 |
| 29 | 39 |
| 14 | 26 |
| 15 | 46 |
| 35 | 51 |
| 22 | 39 |
| 34 | 41 |
| 35 | 38 |
| 55 | 67 |
| 91 | 88 |
| 34 | 41 |
| 35 | 38 |

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

***Muestras relacionadas***
**Ejercicio 1**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener el promedio para las puntuaciones de cada medición.
- Obtener la diferencia entre las puntuaciones, y de éstas calcular la desviación estándar.

| Estudiante | Calificaciones | | $X_1 - X_2$ |
|---|---|---|---|
| | Antes | Después | |
| 1 | 5 | 7 | –2 |
| 2 | 6 | 7 | –1 |
| 3 | 9 | 8 | 1 |
| 4 | 6 | 5 | 1 |
| 5 | 7 | 7 | 0 |
| 6 | 5 | 8 | –3 |
| 7 | 9 | 9 | 0 |
| 8 | 7 | 9 | –2 |
| 9 | 7 | 8 | –1 |
| 10 | 10 | 9 | 1 |
| 11 | 8 | 7 | 1 |
| 12 | 8 | 10 | –2 |
| 13 | 7 | 8 | –1 |
| 14 | 5 | 5 | 0 |
| 15 | 9 | 9 | 0 |
| 16 | 7 | 8 | –1 |
| 17 | 7 | 9 | –2 |
| 18 | 10 | 10 | 0 |
| 19 | 8 | 9 | –1 |
| 20 | 5 | 5 | 0 |
| 21 | 5 | 6 | –1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 | 7 | 7 | 0 |
| 23 | 6 | 6 | 0 |
| 24 | 9 | 8 | 1 |
| 25 | 8 | 9 | –1 |
| 26 | 10 | 9 | 1 |
| 27 | 7 | 7 | 0 |
| 28 | 6 | 9 | –3 |
| 29 | 7 | 9 | –2 |
| 30 | 9 | 10 | –1 |
| **Promedio** | 7.30 | 7.90 | |
| **Desviación estándar** | | | 1.19 |

- Calcular el valor de *t*:

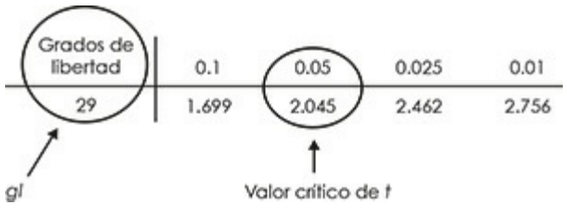
$$t = \frac{7.30 - 7.90}{1.19 / \sqrt{30}}$$

$$t = -2.76$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 30 - 1 = 29$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .05:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es menor a la obtenida, por lo tanto se rechaza $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(29)} = -2.76$, $p \leq .05$

**Interpretación:**
Se observaron diferencias estadísticamente significativas entre las puntuaciones de los estudiantes ($t_{(29)} = -2.76$, $p \leq .05$) antes y después del programa de regularización.

**Ejercicio 2**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener el promedio para las puntuaciones de cada medición.
- Obtener la diferencia entre las puntuaciones, y de éstas calcular la desviación estándar.

| Paciente | Glucosa | | $X_1 - X_2$ |
|---|---|---|---|
| | Antes | Después | |
| 1 | 91 | 81 | 10 |
| 2 | 89 | 79 | 10 |
| 3 | 101 | 93 | 8 |
| 4 | 126 | 120 | 6 |
| 5 | 91 | 85 | 6 |
| 6 | 89 | 78 | 11 |
| 7 | 98 | 96 | 2 |
| 8 | 97 | 75 | 22 |
| 9 | 88 | 79 | 9 |
| 10 | 93 | 96 | –3 |
| 11 | 84 | 95 | –11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 87 | 100 | –13 |
| 13 | 89 | 64 | 25 |
| 14 | 85 | 101 | –16 |
| 15 | 73 | 86 | –13 |
| 16 | 86 | 91 | –5 |
| 17 | 87 | 95 | –8 |
| 18 | 79 | 81 | –2 |
| 19 | 93 | 91 | 2 |
| 20 | 98 | 91 | 7 |
| 21 | 79 | 73 | 6 |
| 22 | 101 | 93 | 8 |
| 23 | 126 | 92 | 34 |
| 24 | 95 | 83 | 12 |
| 25 | 86 | 94 | –8 |
| 26 | 88 | 89 | –1 |
| 27 | 90 | 83 | 7 |
| 28 | 88 | 98 | –10 |
| 29 | 96 | 96 | 0 |
| 30 | 91 | 93 | –2 |
| 31 | 89 | 99 | –10 |
| 32 | 85 | 94 | –9 |
| 33 | 93 | 93 | 0 |
| 34 | 91 | 93 | –2 |
| 35 | 89 | 90 | –1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 98 | 76 | 22 |
| **Promedio** | 91.92 | 89.33 | |
| **Desviación estándar** | | | 11.43 |

- Calcular el valor de *t*:

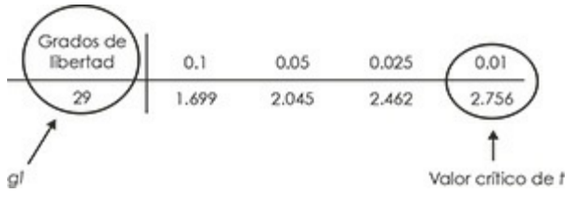
$$t = \frac{91.92 - 89.33}{11.43 / \sqrt{36}}$$

$$t = -1.36$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 36 - 1 = 35$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .01:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t:* el valor crítico para la prueba *t* es mayor a la obtenida, por lo tanto se acepta $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(35)} = 1.36$, $p > .01$.

**Interpretación:**
No se observaron diferencias estadísticamente significativas entre las puntuaciones de los pacientes antes y después de la administración del nuevo medicamento ($t_{(35)} = 1.36$, $p > .01$), por lo que se concluye que el medicamento no produce efectos en el nivel de glucosa.

**Ejercicio 3**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener el promedio para las puntuaciones de cada medición.
- Obtener la diferencia entre las puntuaciones, y de éstas calcular la desviación estándar.

| Paciente | Índice de masa corporal (IMC) | | $X_1 - X_2$ |
|---|---|---|---|
| | Antes | Un mes después | |
| 1 | 26.7 | 26.0 | 0.7 |
| 2 | 26.7 | 25.0 | 1.7 |
| 3 | 26.8 | 26.4 | 0.4 |
| 4 | 26.9 | 25.2 | 1.7 |
| 5 | 27.7 | 25.3 | 2.4 |
| 6 | 28.0 | 25.4 | 2.6 |
| 7 | 28.2 | 25.9 | 2.3 |
| 8 | 28.5 | 25.9 | 2.6 |
| 9 | 28.6 | 27.3 | 1.3 |
| 10 | 28.8 | 26.0 | 2.8 |
| 11 | 28.9 | 27.7 | 1.2 |
| 12 | 28.9 | 28.0 | 0.9 |
| 13 | 29.2 | 28.0 | 1.2 |
| 14 | 29.2 | 28.6 | 0.6 |
| 15 | 29.5 | 28.8 | 0.7 |
| 16 | 29.9 | 33.2 | –3.3 |
| 17 | 30.0 | 34.0 | –4.0 |
| 18 | 31.1 | 29.2 | 1.9 |
| 19 | 31.2 | 32.3 | –1.1 |
| 20 | 32.3 | 29.9 | 2.4 |
| 21 | 32.6 | 30.0 | 2.6 |
| 22 | 28.9 | 28.0 | 0.9 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 29.2 | 28.0 | 1.2 |
| 24 | 29.2 | 28.6 | 0.6 |
| 25 | 29.5 | 28.8 | 0.7 |
| 26 | 29.9 | 33.2 | –3.3 |
| 27 | 30.0 | 34.0 | –4 |
| 28 | 31.1 | 29.2 | 1.9 |
| 29 | 31.2 | 32.3 | –1.1 |
| 30 | 32.3 | 29.9 | 2.4 |
| **Promedio** | 29.37 | 28.67 | |
| **Desviación estándar** | | | 1.99 |

- Calcular el valor de *t*:

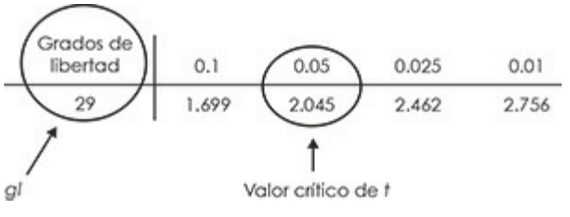
$$t = \frac{29.37 - 28.67}{1.99 / \sqrt{30}}$$

$$t = -1.93$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 30 - 1 = 29$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .05:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es menor a la obtenida, por lo tanto se rechaza $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(29)} = 1.94$, $p \leq .05$.

**Interpretación:**
Se observaron diferencias estadísticamente significativas en el IMC de los pacientes antes y un mes después ($t_{(29)} = 1.94$, $p \leq .05$) de la intervención, por lo que se concluye que el programa cognitivo para la reducción del peso tiene efectos sobre el IMC.

## Ejercicio 4

### Cálculos necesarios para la solución:

- Obtener el promedio para las puntuaciones de cada medición.
- Obtener la diferencia entre las puntuaciones, y de éstas calcular la desviación estándar.

| Trabajadores | Satisfacción laboral | | $X_1 - X_2$ |
|---|---|---|---|
| | Con música | Sin música | |
| 1 | 23 | 26 | –3 |
| 2 | 25 | 30 | –5 |
| 3 | 27 | 33 | –6 |
| 4 | 22 | 35 | –13 |
| 5 | 28 | 34 | –6 |
| 6 | 22 | 30 | –8 |
| 7 | 28 | 39 | –11 |
| 8 | 27 | 31 | –4 |
| 9 | 18 | 35 | –17 |
| 10 | 34 | 40 | –6 |
| 11 | 30 | 35 | –5 |
| 12 | 21 | 38 | –17 |
| 13 | 33 | 35 | –2 |
| 14 | 26 | 20 | 6 |
| 15 | 28 | 38 | –10 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 29 | 30 | –1 |
| 17 | 26 | 32 | –6 |
| 18 | 38 | 40 | –2 |
| 19 | 30 | 30 | 0 |
| 20 | 30 | 25 | 5 |
| 21 | 20 | 32 | –12 |
| 22 | 22 | 28 | –6 |
| 23 | 20 | 32 | –12 |
| 24 | 27 | 30 | –3 |
| 25 | 22 | 22 | 0 |
| 26 | 28 | 38 | –10 |
| 27 | 29 | 30 | –1 |
| 28 | 26 | 32 | –6 |
| 29 | 38 | 40 | –2 |
| 30 | 30 | 30 | 0 |
| **Promedio** | 26.90 | 32.33 | |
| **Desviación estándar** | | | 5.60 |

- Calcular el valor de *t*:

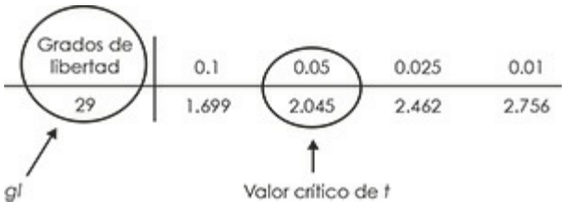
$$t = \frac{29.90 - 32.33}{5.60 / \sqrt{30}}$$

$$t = -5.31$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 30 - 1 = 29$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .05:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es mayor al obtenido, por lo tanto se acepta $H_0$.

**Resultado y representación del resultado**

$$t_{(29)} = -5.31,\ p > .05$$

**Interpretación:**
No se observaron diferencias estadísticamente significativas en la satisfacción laboral de los trabajadores entre jornadas de trabajo con y sin música ($t_{(29)} = -5.31$, $p > .05$).

**Ejercicio 5**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener el promedio para las puntuaciones de cada medición.
- Obtener la diferencia entre las puntuaciones, y de éstas calcular la desviación estándar.

| Madres de familia | Percepción del estilo de crianza | | $X_1 - X_2$ |
|---|---|---|---|
| | Antes | Después | |
| 1 | 23 | 25 | –2 |
| 2 | 27 | 34 | –7 |
| 3 | 25 | 25 | 0 |
| 4 | 30 | 33 | –3 |
| 5 | 30 | 29 | 1 |
| 6 | 32 | 25 | 7 |
| 7 | 25 | 31 | –6 |
| 8 | 33 | 30 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 29 | 32 | –3 |
| 10 | 37 | 32 | 5 |
| 11 | 28 | 30 | –2 |
| 12 | 34 | 36 | –2 |
| 13 | 32 | 36 | –4 |
| 14 | 31 | 31 | 0 |
| 15 | 35 | 35 | 0 |
| 16 | 27 | 31 | –4 |
| 17 | 36 | 30 | 6 |
| 18 | 30 | 32 | –2 |
| 19 | 27 | 28 | –1 |
| 20 | 23 | 25 | –2 |
| 21 | 32 | 40 | –8 |
| 22 | 31 | 37 | –6 |
| 23 | 31 | 32 | –1 |
| 24 | 29 | 35 | –6 |
| 25 | 36 | 33 | 3 |
| 26 | 33 | 34 | –1 |
| 27 | 37 | 35 | 2 |
| 28 | 32 | 31 | 1 |
| 29 | 31 | 32 | –1 |
| 30 | 31 | 32 | –1 |
| **Promedio** | 30.57 | 31.70 | |
| **Desviación estándar** | | | 3.67 |

- Calcular el valor de *t*:

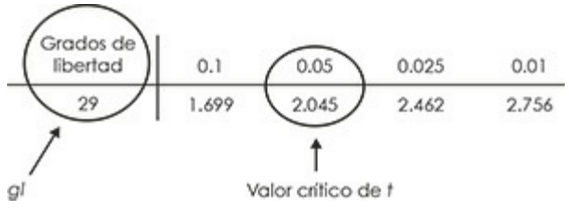
$$t = \frac{30.57 - 31.70}{3.67 / \sqrt{30}}$$

$$t = -1.69$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 30 - 1 = 29$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .05:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es mayor al obtenido, por lo tanto se acepta $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(29)} = -1.69$, $p > .05$.

**Interpretación:**
No se observaron diferencias estadísticamente significativas en la percepción de las madres sobre el estilo de crianza de sus hijos adolescentes ($t_{(29)} = -1.69$, $p > .05$) antes y después de su participación en el programa de autocontrol.

***Muestras independientes***

**Ejercicio 6**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener la puntuación promedio y la varianza de cada uno de los grupos.

| | Hombres | Mujeres |
|---|---|---|
| | 50 | 14 |
| | 31 | 27 |
| | 33 | 42 |
| | 15 | 34 |

| | | |
|---|---|---|
| | 26 | 35 |
| | 40 | 15 |
| | 23 | 43 |
| | 25 | 45 |
| | 14 | 41 |
| | 41 | 35 |
| | 38 | 21 |
| | 29 | 35 |
| | 13 | 28 |
| | 37 | 41 |
| | 40 | 41 |
| | 28 | 24 |
| | 32 | 35 |
| | 19 | 17 |
| | 59 | 19 |
| | 12 | 34 |
| | 10 | 33 |
| | 27 | 46 |
| | 25 | 23 |
| | 10 | 32 |
| | 15 | 25 |
| | 25 | 31 |
| | 25 | 15 |
| | 25 | 13 |

| | | |
|---|---|---|
| | 15 | 17 |
| | 23 | 23 |
| | 12 | 30 |
| | 17 | 19 |
| | 14 | 12 |
| | 21 | 34 |
| | 11 | 23 |
| | | 40 |
| **Promedio =** | 25.14 | 28.94 |
| **n =** | 35 | 36 |
| **Varianza =** | 140.36 | 102.28 |

- Calcular el valor de *t*:

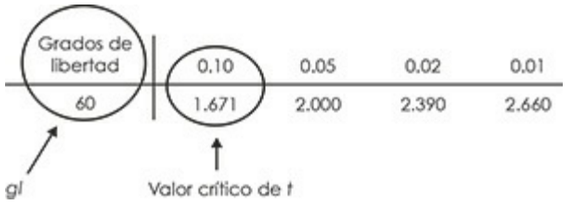
$$t = \frac{25.14 - 28.94}{\sqrt{\frac{140.36}{35} + \frac{102.28}{36}}}$$

$$t = -1.45$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 35 + 36 - 2 = 69$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .05:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: El valor crítico para la prueba *t* es mayor al obtenido, por lo tanto

se acepta $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(69)} = -1.45$, $p > .05$.

**Interpretación:**
No se observaron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(69)} = -1.45$, $p > .05$); por lo tanto, se concluye que hombres y mujeres tienen el mismo nivel de conocimiento acerca de los métodos anticonceptivos.

**Ejercicio 7**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener la puntuación promedio y la varianza de cada uno de los grupos.

| | Adultos mayores | |
|---|---|---|
| | **Sedentarios** | **Recreativos** |
| | 30 | 27 |
| | 20 | 20 |
| | 25 | 23 |
| | 28 | 25 |
| | 23 | 25 |
| | 25 | 22 |
| | 23 | 20 |
| | 27 | 25 |
| | 22 | 20 |
| | 26 | 20 |
| | 20 | 23 |
| | 23 | 25 |
| | 25 | 23 |
| | 28 | 20 |
| | 23 | 20 |
| | 25 | 23 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 23 | 25 |
| | 27 | 23 |
| | 22 | 20 |
| | 26 | 20 |
| | 28 | 23 |
| | 23 | 25 |
| | 25 | 23 |
| | 23 | 20 |
| | 27 | 20 |
| | 28 | 20 |
| | 23 | 20 |
| | 25 | 20 |
| | 23 | 20 |
| | 27 | 23 |
| | 22 | 25 |
| | 26 | 23 |
| **Promedio =** | 24.72 | 22.22 |
| **n =** | 32 | 32 |
| **Varianza =** | 6.14 | 4.89 |

- Calcular el valor de *t*:

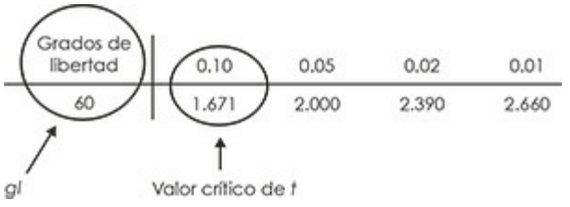
$$t = \frac{24.72 - 22.22}{\sqrt{\frac{6.14}{32} + \frac{4.89}{32}}}$$

$$t = 4.26$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 32 + 32 - 2 = 62$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .01:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es menor al obtenido, por lo tanto se rechaza $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(62)} = 4.26$, $p < .01$.

**Interpretación:**
Se observaron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(62)} = 4.26$, $p < .01$); por lo tanto, se concluye que existen discrepancias en el nivel de sintomatología depresiva entre los adultos mayores sedentarios y recreativos.

**Ejercicio 8**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener la puntuación promedio y la varianza de cada uno de los grupos.

| | **Usuarios** | |
|---|---|---|
| | **Facebook** | **Twitter** |
| | 9 | 7 |
| | 5 | 7 |
| | 3 | 3 |
| | 4 | 5 |
| | 5 | 3 |
| | 4 | 8 |
| | 6 | 3 |
| | 7 | 6 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 3 | 4 |
| | 6 | 2 |
| | 9 | 3 |
| | 4 | 4 |
| | 3 | 9 |
| | 4 | 7 |
| | 8 | 3 |
| | 8 | 7 |
| | 5 | 3 |
| | 9 | 5 |
| | 9 | 3 |
| | 9 | 7 |
| | 5 | 7 |
| | 3 | 3 |
| | 4 | 5 |
| | 5 | 3 |
| | 4 | 8 |
| | 6 | 3 |
| | 7 | 6 |
| | 3 | 4 |
| | 6 | 2 |
| | 9 | 3 |
| | 4 | 4 |
| | 3 | 9 |
| | 9 | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| | 4 | 4 |
| | 3 | 9 |
| **Promedio =** | 5.57 | 5.03 |
| **n =** | 35 | 35 |
| **Varianza =** | 4.90 | 4.79 |

- Calcular el valor de *t*:

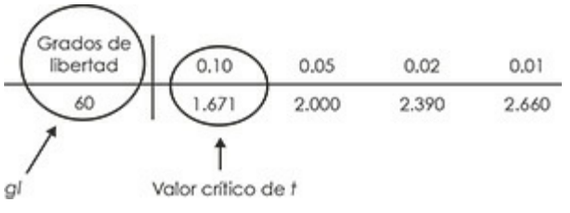
$$t = \frac{2.57 - 5.03}{\sqrt{\frac{4.90}{35} + \frac{4.79}{35}}}$$

$$t = 1.03$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 35 + 35 - 2 = 68$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de 0.01:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es mayor al obtenido, por lo tanto se acepta $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(68)} = 1.03$, $p > .01$

**Interpretación:**
No se observaron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(68)} = 1.03$, $p > .01$); por lo tanto, se concluye que los usuarios de Facebook y Twitter tienen el mismo nivel de confianza hacia las instituciones que conforman el sistema político.

**Ejercicio 9**

**Cálculos necesarios para la solución:**

■ Obtener la puntuación promedio y la varianza de cada uno de los grupos.

| | Pacientes | |
|---|---|---|
| | **Matutino** | **Vespertino** |
| | 30 | 88 |
| | 126 | 84 |
| | 102 | 96 |
| | 18 | 84 |
| | 90 | 48 |
| | 132 | 112 |
| | 66 | 64 |
| | 126 | 98 |
| | 78 | 104 |
| | 108 | 88 |
| | 96 | 106 |
| | 90 | 72 |
| | 78 | 64 |
| | 90 | 88 |
| | 18 | 66 |
| | 90 | 96 |
| | 120 | 52 |
| | 54 | 56 |
| | 84 | 24 |
| | 126 | 84 |
| | 78 | 66 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 84 | 80 |
| | 132 | 72 |
| | 144 | 86 |
| | 96 | 60 |
| | 126 | 104 |
| | 90 | 60 |
| | | 112 |
| | | 64 |
| **Promedio =** | 91.56 | 78.55 |
| **n =** | 27 | 29 |
| **Varianza =** | 1128.72 | 447.68 |

- Calcular el valor de *t*:

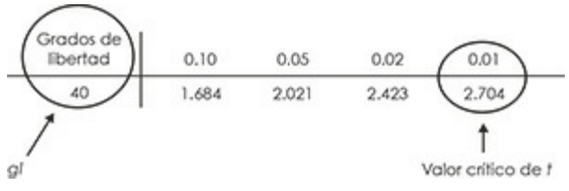
$$t = \frac{91.56 - 78.55}{\sqrt{\frac{1128.72}{27} + \frac{447.68}{29}}}$$

$$t = 1.72$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 27 + 29 - 2 = 54$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .01:




- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es mayor al obtenido, por lo tanto se acepta $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(54)} = 1.72$, $p > .01$.

**Interpretación:**
No se observaron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(54)} = 1.72$, $p > .01$); por lo tanto, se concluye que los pacientes del turno matutino y vespertino tienen el mismo nivel de satisfacción con el servicio médico.

**Ejercicio 10**

**Cálculos necesarios para la solución:**

- Obtener la puntuación promedio y la varianza de cada uno de los grupos.

| | Particular | Público |
|---|---|---|
| | 13 | 19 |
| | 12 | 25 |
| | 14 | 10 |
| | 10 | 11 |
| | 11 | 15 |
| | 33 | 15 |
| | 15 | 14 |
| | 25 | 12 |
| | 9 | 32 |
| | 15 | 44 |
| | 10 | 18 |
| | 7 | 21 |
| | 25 | 17 |
| | 14 | 14 |
| | 13 | 22 |
| | 12 | 30 |
| | 7 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| | 21 | 12 |
| | 17 | 15 |
| | 19 | 35 |
| | 29 | 12 |
| | 30 | 13 |
| | 13 | 22 |
| | 8 | 18 |
| | 5 | 34 |
| | 7 | 28 |
| **Promedio =** | 15.15 | 20.12 |
| **n =** | 26 | 26 |
| **Varianza =** | 59.02 | 78.03 |

- Calcular el valor de *t*:

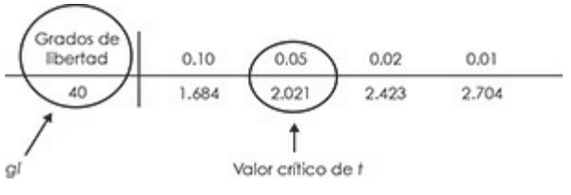
$$t = \frac{15.15 - 20.12}{\sqrt{\frac{59.02}{26} + \frac{78.03}{26}}}$$

$$t = -2.16$$

- Establecer los grados de libertad:

$$gl = 26 + 26\text{-}2 = 50$$

- Buscar en la tabla el valor crítico de *t* con un nivel de significación de .05:



- Comparar la *t* obtenida con el valor crítico de *t*: el valor crítico para la prueba *t* es menor al obtenido, por lo tanto se rechaza $H_0$.

**Resultado y representación del resultado:** $t_{(50)} = -2.16$, $p < .05$.

**Interpretación:**
Se observaron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(50)} = -2.16$, $p < .05$); por lo tanto, se concluye que los conductores de transporte particular y público tienen diferentes niveles de ansiedad una semana después del choque automovilístico.

# Solución a los ejercicios voluntarios

**Ejercicio 1**

Se acepta $H_0$. Existen diferencias estadísticamente significativas en el nivel de autoestima ($t_{(58)} = -2.00$, $p < .05$) entre adolescentes de familias monoparentales ($M = 28.90$) y biparentales ($M = 31.93$).

**Ejercicio 2**

Se rechaza $H_0$. Los participantes de ambos grupos obtuvieron puntuaciones diferentes en las actitudes hacia la esterilización canina ($t_{(58)} = 3.09$, $p < .05$).

**Ejercicio 3**

Se rechaza $H_0$. Hay diferencias en el nivel de agresión ($t_{(56)} = -3.36$, $p < .01$) entre los niños que practican el videojuego A ($M = 46.89$) y los que usan el B ($M = 51.90$).

**Ejercicio 4**

Se acepta $H_0$. Existen diferencias estadísticamente significativas en la cantidad de kilogramos perdidos ($t_{(59)} = -2.45$, $p < .01$) entre los pacientes con un menú de alimentos permitidos ($M = 2.45$) y los que consumen porciones específicas ($M = 4.13$).

**Ejercicio 5**

Se acepta $H_0$. Existen diferencias estadísticamente significativas en el nivel de estrés laboral ($t_{(64)} = -2.26$, $p < .05$) entre los profesores de escuelas de medio tiempo $M$ = (80.24) y los que se desempeñan en escuelas de tiempo completo (84.18).

**Ejercicio 6**

Se rechaza $H_0$. El programa de conductas de autocuidado mejoró el bienestar emocional de las enfermeras, ya que se encontraron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(29)} = -14.63$, $p < .01$) antes ($M = 81.07$, $DE = 1.91$) y después ($M = 84.73$, $DE = 1.55$) de su participación.

**Ejercicio 7**

Se rechaza $H_0$. El programa de movilidad estudiantil incrementa el compromiso afectivo de los estudiantes, ya que se

encontraron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(34)} = –3.30$, $p < .01$) antes ($M = 23.69$, $DE = 3.03$) y después ($M = 25.23$, $DE = 3.49$) de una movilidad estudiantil.

**Ejercicio 8**

Se acepta $H_0$. No se encontraron diferencias estadísticamente significativas en el nivel de insatisfacción corporal ($t_{(31)} = –1.59$, $p > .05$) antes ($M = 87.22$, $DE = 29.89$) y después ($M = 93.75$, $DE = 25.93$) del nacimiento del primer hijo.

**Ejercicio 9**

Se acepta $H_0$. El nuevo tratamiento farmacológico no es eficaz en la reducción del dolor crónico, ya que no se encontraron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(35)} = –.55$, $p > .05$) antes ($M = 8.36$, $DE = 0.79$) y después ($M = 8.44$, $DE = 0.77$) de la administración del medicamento.

**Ejercicio 10**

Se acepta $H_0$. La práctica deportiva no mejora el ajuste psicológico en las personas con amputación, ya que no se encontraron diferencias estadísticamente significativas ($t_{(31)} = –2.66$, $p > .01$) antes ($M = 53.88$, $DE = 17.88$) y después ($M = 57.66$, $DE = 13.09$) de su incorporación a un equipo de fútbol.

# GLOSARIO

**Desviación estándar (típica):** característica de una muestra o población que cuantifica su dispersión o variabilidad.
**Diferencias estadísticamente significativas:** las diferencias entre lo observado y lo supuesto en la hipótesis nula no se pueden explicar por medio del azar.
**Media:** es una medida de centralización para una variable continua, que se obtiene al sumar todos los valores y dividirlos por el tamaño de la muestra.
**Muestras:** subgrupos de observaciones de la población en estudio.
**P (p-valor):** nivel de significación observado en la prueba. Cuanto más pequeño sea, mayor será la evidencia para rechazar la hipótesis nula.
**Prueba *t* para muestras independientes:** esta prueba se utiliza cuando se tienen dos condiciones experimentales y diferentes participantes fueron asignados a cada condición.
**Prueba *t* para muestras relacionadas:** esta prueba se utiliza cuando se tienen dos condiciones experimentales y los mismos participantes formaron parte de ambas condiciones.
**Varianza:** característica de una muestra o población que cuantifica su dispersión o variabilidad. La varianza tiene unidades al cuadrado de la variable. Su raíz cuadrada positiva es la desviación típica.

# BIBLIOGRAFÍA

Berger, M. y Luckman, T. (1986). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.
Escoto, M.C., Mancilla, J.M. y Camacho, E.J. (2008). A Pilot Study of the Clinical and Statistical Significance of a Program to Reduce Eating Disorder Risk Factors in Children. *Eating and Weight Disorders*, 13(3), 111-118.

Etxeberri, F. (2011). Videojuegos violentos y agresividad. *Pedagogía Social. Revista Interuniversitaria*, 18, 31-39.
Field, A. (2013). *Discovering Statistics using IBM SPSS Statistics*, 4a ed. Washington: SAGE Publications.
Guerrero, F. (2012). *El impacto de las redes sociales en los sistemas electorales*. México: UNAM.
López, R.M. (2000). *Medición de la percepción en los estilos de crianza madre-hijo*. Tesis de Maestría en Psicología. México: UNAM.
Organización Mundial de la Salud. (2004). *La organización del trabajo y el estrés*. Francia: OMS.
Reiko, S.M. (1987). Influencia de variables familiares y laborales en la satisfacción de mujeres profesionistas con su trabajo. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 21(3), 423-436.
Robles, R., Varela, R., Jurado, S. y Páez, F. (2001). Versión mexicana del Inventario de Ansiedad de Beck: propiedades psicométricas. *Revista Mexicana de Psicología*, 18, 211-218.
Tejeiro, R., Pelegrina, M. y Gómez, J.L. (2009). Efectos psicosociales de los videojuegos. *Comunicación*, 7(1), 235-250.
Vázquez, R., Galán, J., López, X., Alvarez, G.L., Mancilla, J.M. Caballero, A. y Unikel, C. (2011). Validez del Body Shape Questionnaire (BSQ) en mujeres mexicanas. *Revista Mexicana de Trastornos Alimentarios*, 2(1), 42-52.

# Capítulo 9

# PRUEBAS DE DIFERENCIA SOBRE UNA VARIABLE CATEGÓRICA ORDINAL (Rangos con signo de Wilcoxon para muestras Relacionadas, U de Mann-Whitney para dos grupos independientes, Kruskall-Wallis y el ANOVA de Friedman)

*Patricia Serna González, Rodolfo Zaragoza Sánchez, Ma. Leticia Serna González, Fabiola González Betanzos*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo, el lector aplicará las pruebas de diferencia sobre una variable categórica ordinal. Para ello, utilizará la prueba de rangos con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas y la prueba *U* de Mann-Whitney para dos grupos independientes. Asimismo, conocerá las pruebas que se utilizan en estos mismos casos para comparar más de tres grupos o condiciones, es decir, la prueba de Kruskall-Wallis y el ANOVA de Friedman. En particular, el lector estimará los parámetros y contrastará la hipótesis poniendo en práctica los pasos de la inferencia estadística hasta calcular los estadísticos e interpretarlos con el fin de rechazar o aceptar la hipótesis nula.

## PRUEBA DE RANGOS CON SIGNO DE WILCOXON (T): MUESTRAS RELACIONADAS U OBSERVACIONES PAREADAS

La **prueba de rangos con signo de Wilcoxon** es una prueba no paramétrica que se utiliza para saber si existen diferencias entre dos observaciones que corresponden al mismo sujeto (como en los estudios de antes y después de una intervención) o cuando los sujetos están pareados mediante un vínculo relevante (por ejemplo en los estudios de gemelos, cuando la variable relevante es la genética). Esta prueba es equivalente a la ***t* de Student para muestras relacionadas** y se utiliza cuando ocurre alguna de las siguientes situaciones: 1) la variable observable está medida en escala ordinal; 2) la variable observable no tiene una distribución normal; y (3) se tiene una muestra muy pequeña. En esta prueba los resultados se expresan mediante la letra *T* mayúscula y se toma en cuenta tanto la magnitud como la dirección de los puntajes de diferencia, lo cual la hace más potente que la **prueba binomial de los signos**, pero menos potente que la *t* de Student para grupos relacionados (Pagano, 2008).

# Presentación del problema

En una escuela primaria se invita a un programa de entrenamiento a los padres de 10 niños que tienen niveles muy altos de desobediencia. Para el estudio se utiliza un diseño pretest-intervención-postest. En el pretest se pide a los padres que anoten durante dos días el número de veces que el niño sigue la instrucción que se le da. Después de realizar el registro, los padres participan en un programa de entrenamiento durante ocho sesiones, en las que se les enseña cómo dar una instrucción, técnicas de reforzamiento, entre otros recursos básicos del modelo conductual (Fulgencio *et al*., 1998). Al finalizar se realiza el postest, en el que se pide de nuevo que los padres anoten durante dos días el número de veces que el niño sigue las instrucciones. De modo que la pregunta de investigación es: ¿existen diferencias en el número de instrucciones que siguen los hijos e hijas antes y después de que sus padres han asistido a un programa de entrenamiento? La psicóloga de la escuela tiene la hipótesis de que después del entrenamiento para padres habrá un aumento en la capacidad de seguir instrucciones. Los resultados se presentan en la tabla 9-1.

**Tabla 9-1. Datos acerca del seguimiento de instrucciones de los hijos e hijas de padres que participaron en un programa de entrenamiento**

| Casos | Seguimiento de instrucciones | | Diferencia | Rango de la diferencia | Suma de los rangos positivos | Suma de los rangos negativos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pretest | Postest | | | | |
| 1 | 40 | 44 | 4 | 4 | 4 | |
| 2 | 33 | 40 | 7 | 6 | 6 | |
| 3 | 49 | 49 | 0 | - | - | |
| 4 | 34 | 36 | 2 | 2 | 2 | |
| 5 | 40 | 39 | –1 | 1 | | 1 |
| 6 | 31 | 40 | 9 | 8 | 8 | |
| 7 | 30 | 27 | –3 | 3 | | 3 |
| 8 | 36 | 42 | 6 | 5 | 5 | |
| 9 | 24 | 35 | 11 | 9 | 9 | |
| 10 | 20 | 28 | 8 | 7 | 7 | |
| | | | | 45 | 41 | 4 |
| Mdn pretest= 33.5, Mdn postest = 39.5 | | | | | | |

# Pasos de la inferencia

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***

**1.** La pregunta de investigación es de diferencia
**2.** El nivel de la variable observable (número de veces que el niño o niña sigue una instrucción) es ordinal
**3.** El diseño es relacionado, ya que en el pretest y postest participan los mismos sujetos
**4.** Por ello se aplica la prueba de rangos con signo de Wilcoxon.

***Establecer las hipótesis estadísticas***

La prueba *T* de Wilcoxon es una prueba sobre las medianas. A continuación se plantean los tres conjuntos de hipótesis:

**a)** Contraste bilateral o de dos colas:

$$H_0: Mdn_{PRETEST} = Mdn_{POSTEST}$$

$$H_1: Mdn_{PRETEST} \neq Mdn_{POSTEST}$$

**b)** Contraste unilateral derecho o prueba de una cola del lado positivo:

$$H_0: Mdn_{PRETEST} \leq Mdn_{POSTEST}$$

$$H_1: Mdn_{PRETEST} > Mdn_{POSTEST}$$

**c)** Contraste unilateral izquierdo o prueba de una cola de lado negativo:

$$H_0: Mdn_{PRETEST} \geq Mdn_{POSTEST}$$

$$H_1: Mdn_{PRETEST} < Mdn_{POSTEST}$$

En el caso descrito, la psicóloga tiene la hipótesis de que la mediana en el seguimiento de instrucciones será menor en el pretest que en el postest; por lo tanto, se debe utilizar la opción c): contraste unilateral izquierdo o prueba de una cola del lado negativo.

***Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

Para inferir *T* se requiere de los siguientes pasos:

**1.** Calcular la diferencia entre cada pareja de datos (pretest-postest, véase tabla 9-1).
**2.** Ordenar los valores absolutos de los puntajes de la diferencia, iniciando desde menor, al cual se le asigna el número 1, hasta el mayor sin importar el signo (p. ej., es decir, que una diferencia de +3 o –3 tendrían el mismo rango). Si una diferencia es cero, ese dato se excluye de la asignación y se considera un rango nulo.
**3.** Calcular por separado la suma de los rangos para los rangos con signos positivos ($T_+$) y los negativos ($T_-$). En este caso los resultados son contundentes, dado que $T_+ = 41$ y $T_- = 4$.
4. El estadístico *T* es el menor de los dos valores (p. ej., la suma más baja es $T_{obt}$). En este caso, $T_{obt} = 4$.

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

La distribución del estadístico se encuentra en la Tabla E del Apéndice, el nivel de significacion o a = 0.05, para una

prueba de una cola con grados de libertad iguales al número de rangos no nulos ($gl = 9$).

Por lo tanto, el valor crítico (a = 0.05, para una hipótesis de una cola, $gl = 9$): $T_{crit} = 8$.

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso $T_{obt} = 4 < T_{crit} = 8$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.

***Representación e interpretación***

Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que, en el seguimiento de instrucciones del postest ($Mdn_{POSTEST} = 39.5$), la mediana es significativamente mayor que la mediana en el seguimiento del pretest ($Mdn_{PRETEST} = 33.5$) en los registros que hicieron los padres que participaron en un programa de entrenamiento para dar seguimiento de instrucciones de sus hijos e hijas [$T(9) = 4$, $p < 0.05$].

# PRUEBA *U* DE MANN-WHITNEY: DOS GRUPOS INDEPENDIENTES

La prueba ***U* de Mann-Whitney** (Mann y Whitney, 1947) es el equivalente a la prueba t de Student para muestras independientes pero en su versión no paramétrica. Por lo tanto, se utiliza en los casos que se quiere conocer si hay diferencia en la aplicación de dos tratamientos, así como para comparar un grupo experimental y uno control, o dos muestras con características distintas en alguna variable; por ejemplo, hombres y mujeres; depresivos y no-depresivos (Pardo y San Martín, 2010). Al igual que la prueba anterior, en la *U* de Mann-Whitney se requiere que los datos estén por lo menos en una escala ordinal y su uso no depende de que los datos tengan una distribución normal (Siegel y Castellan, 2009).

## Presentación del problema

En una escuela secundaria, un profesor de matemáticas quiere poner a prueba un método de enseñanza alternativo en el cual se grafican e identifican las funciones cuadráticas con el uso de Excel. Para ello eligió dos grupos de la institución, uno experimental y otro de control. El grupo experimental trabajó con Excel y el grupo de control trabajó con el modelo tradicional de papel y lápiz. Se eligieron 40 estudiantes, de los cuales 20 constituyeron el grupo de control y los otros 20 el grupo experimental. Después de utilizar los métodos se aplicó una prueba no estandarizada para medir los conocimientos adquiridos (véase tabla 9-2). La pregunta de investigación es la siguiente: ¿existen diferencias en el nivel de conocimientos entre el grupo experimental y el grupo control? El profesor considera que con el uso de la tecnología se obtendrán mejores resultados en oposición al método tradicional, en el que solo se utiliza papel y lápiz (Zaragoza, 2014).

## Pasos de la inferencia

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***

1. La pregunta de investigación es de diferencia.
2. El nivel de la variable observable, es decir, rendimiento en una prueba no estandarizada, es ordinal.
3. El diseño es no relacionado o de grupos independientes, dado que es un diseño con dos grupos con distintos

participantes: grupo control y grupo experimental.

**4.** Por ello se aplica la prueba *U* de Mann-Whitney.

***Establecer las hipótesis estadísticas***

La prueba *U* de Mann-Whitney es una prueba sobre las medianas. A continuación se plantean los tres conjuntos de hipótesis:

**a)** Contraste bilateral o de dos colas:

$$H_0: Mdn_{Gpo.\ Control} = Mdn_{Gpo.\ Experimental}$$

$$H_1: Mdn_{Gpo.\ Control} \neq Mdn_{Gpo.\ Experimental}$$

**b)** Contraste unilateral derecho o de una cola:

$$H_0: Mdn_{Gpo.\ Control} \leq Mdn_{Gpo.\ Experimental}$$

$$H_1: Mdn_{Gpo.\ Control} > Mdn_{Gpo.\ Experimental}$$

**c)** Contraste unilateral izquierdo o prueba de una cola del lado negativo:

$$H_0: Mdn_{Gpo.\ Control} \geq Mdn_{Gpo.\ Experimental}$$

$$H_1: Mdn_{Gpo.\ Control} < Mdn_{Gpo.\ Experimental}$$

En este caso, el profesor tiene la hipótesis de que la mediana de conocimientos en el grupo control será menor que la mediana de conocimientos en el grupo experimental, por lo tanto se debe utilizar la opción c) contraste unilateral izquierdo o prueba de una cola del lado negativo.

***Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

Para inferir la *U* se requiere de los siguientes pasos:

**1.** El primer paso para calcular la *U* de Mann-Whitney es asignar un rango de menor a mayor. Enseguida, al valor menor se le da un rango de 1 y al mayor se le asigna un rango de 40, puesto que son 40 datos. Sin embargo, la muestra dada también presenta valores iguales en los datos proporcionados, de tal manera que algunos rangos estarán empatados.

**2.** En la tabla 9-2 se puede observar que los datos que contienen valores 10 son iguales en los rangos 3 y 4. A estos se les asignó un rango de 3.5, que es el promedio de [(3 + 4)/2= 3.5]. A los siguientes rangos les correspondería 5 y 6, respectivamente, pero están empatados, por lo que reciben el rango de 5.5, que es el promedio de 5 y 6. Esto es [(5 + 6)/2= 5.5]. Se sigue este proceso con los demás valores, a los cuales se les asigna el rango correspondiente y se calcula el promedio si los valores son iguales. Si los rangos fueron asignados correctamente, entonces el último dato deberá tener un rango igual a *N*, a menos que haya rangos empatados al final. En este caso, los últimos datos fueron iguales y el rango fue 36, ya que el promedio fue [(32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40)/9 = 324/9 = 36].

**3.** Lo siguiente es sumar los rangos de cada muestra por separado. A esta suma se le denominará $R_1$ y $R_2$,

respectivamente. A los datos de cada grupo se les asigna $n_1$ y $n_2$, como puede observarse en la tabla 9-2

**4.** El siguiente paso es necesario calcular el valor de *U* para cada grupo.

**Grupo experimental**

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_1 = (20)(20) + \frac{20\ (20 + 1)}{2} - 223$$

$$U_1 = 400 + 210 - 223 = 294.5$$

**Grupo control**

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2 (n_2 + 1)}{2} - R_2$$

$$U_1 = (20)(20) + \frac{20\ (20 + 1)}{2} - 597$$

$$U_2 = 400 + 210 - 597 = 13$$

**5.** El estadístico *U* es el menor de los dos valores (p. ej., la suma más baja es $U_{obt}$). En este caso: $U_{obt} = 13$.

**Tabla 9-2. Puntuaciones obtenidas por dos grupos de estudiantes en una prueba de conocimientos**

| Participante | Grupo control | Rango inicial | Rango final | Participante | Grupo experimental | Rango inicial | Rango final |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **8** | 4 | 4.5 | **21** | **15** | 23 | 22.5 |
| **2** | **8** | 5 | 4.5 | **22** | **16** | 26 | 28 |
| **3** | **14** | 18 | 18.5 | **23** | **16** | 27 | 28 |
| **4** | **13** | 15 | 16 | **24** | **16** | 28 | 28 |
| **5** | **9** | 6 | 7 | **25** | **16** | 29 | 28 |
| **6** | **7** | 3 | 3 | **26** | **16** | 30 | 28 |
| **7** | **3** | 1 | 1 | **27** | **19** | 35 | 37.5 |
| **8** | **11** | 11 | 12 | **28** | **15** | 24 | 22.5 |
| **9** | **6** | 2 | 2 | **29** | **19** | 36 | 37.5 |
| **10** | **9** | 7 | 7 | **30** | **13** | 17 | 16 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **11\|** | **12** | 14 | 14 | **31** | **15** | 25 | 22.5 |
| **12** | **15** | 20 | 22.5 | **32** | **18** | 34 | 34 |
| **13** | **9** | 8 | 7 | **33** | **17** | 31 | 32 |
| **14** | **15** | 21 | 22.5 | **34** | **19** | 37 | 37.5 |
| **15** | **10** | 9 | 9.5 | **35** | **19** | 38 | 37.5 |
| **16** | **11** | 12 | 12 | **36** | **14** | 19 | 18.5 |
| **17** | **15** | 22 | 22.5 | **37** | **19** | 39 | 37.5 |
| **18** | **13** | 16 | 16 | **38** | **19** | 40 | 37.5 |
| **19** | **11** | 13 | 12 | **39** | **17** | 32 | 32 |
| **20** | **10** | 10 | 9.5 | **40** | **17** | 33 | 32 |
| | | $R_1$ = | 223 | | | $R_2$ = | 597 |

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados*** de libertad y valor crítico
La distribución del estadístico se encuentra en la Tabla F del Apéndice, mientras que el nivel de significación o $a$ = 0.05 para una prueba de una cola, con grados de libertad iguales $gl = n_1, n_2$ $gl$ = (10, 10). Por lo tanto, la zona crítica [$a$ = 0.05, para una hipótesis de una cola, $gl$ = (10,10)]: $U_{crit} = 27$.

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***
Si $U_{obt} \leq U_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso $U_{obt} = 13 < U_{crit} = 27$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.

***Representación e interpretación***
Dado que se rechazó la $H_0$, se concluye que la mediana en el aprendizaje de las funciones cuadráticas en el grupo experimental donde se utilizó el método de enseñanza alternativo ($Mdn_{Experimental}$ = 16.5), es mayor que la mediana en el aprendizaje de las funciones cuadráticas donde se utilizó el método de enseñanza tradicional ($Mdn_{Control}$ = 10.5). Este resultado es estadísticamente significativo [$U$(10, 10) = 13, $p < 0.05$].

# PRUEBA DE KRUSKAL-WALLIS: MÁS DE DOS GRUPOS INDEPENDIENTES

La prueba **Kruskal-Wallis** es una generalización de la prueba U de Mann-Whitney en los casos que existen más de dos grupos; además es equivalente del ANOVA para grupos independientes pero en su versión no paramétrica. Al igual que la U de Mann-Whitney, en esta prueba se requiere que los datos estén por lo menos en una escala ordinal y

su uso no depende de que estos tengan una distribución normal. Esta prueba se utiliza cuando se quiere saber si existen diferencias entre tres o más muestras no relacionadas. La prueba de Kruskall-Wallis se representa con la letra H (Pardo y San Martín, 2009).

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Se desea saber si existe un deterioro en el sistema atencional dependiendo del grupo de edad en el que la persona se encuentra. Para ello se forman tres grupos de edad con cinco participantes cada uno y se aplican 20 ejercicios de atención que se puntúan como 1 si aciertan y 0 en caso de error. En la tabla 9-3 se señala el número de aciertos para cada participante en cada grupo. La pregunta de investigación es la siguiente: ¿existen diferencias en el número de aciertos en una prueba de atención entre los grupos de 1) 40-50, 2) 51-60 y 3) 61-70 años? La teoría considera que hay diferencias entre los grupos de edad en la ejecución de las pruebas de atención.

## Pasos de la inferencia

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***

1. La pregunta de investigación es de diferencia.
2. El nivel de la variable observable, número de respuestas correctas en una prueba no estandarizada, es ordinal.
3. El diseño es no relacionado o de grupos independientes, ya que es un diseño con tres grupos con distintos participantes: el grupo 1, 40 a 50 años, grupo 2, 51 a 60 y grupo 3, 61 a 70 años.
   Por ello se aplica la prueba Kruskall-Wallis.

***Establecer las hipótesis estadísticas***

La prueba *Kruskall-Wallis* indaga si hay diferencias entre los grupos. A continuación se plantean las hipótesis.

$$H_0: Mdn_{Gpo.1} = Mdn_{Gpo.2} = Mdn_{Gpo.3}$$

$$H_1: \text{Existen diferencias entre al menos dos grupos}$$

Al igual que el ANOVA, la prueba de Kruskal-Wallis es una prueba no direccional. El estadístico de Kruskall-Wallis resulta significativo si existen diferencias en por lo menos dos grupos.

***Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

Para inferir la *H* se requiere de los siguientes pasos:

1. El primer paso para calcular la *H* de Kruskall-Wallis es asignar un rango de menor a mayor sin tomar en cuenta el grupo al cual pertenecen. A esta asignación se le llama rango inicial (Rango_ini). Como se puede observar en la tabla 9-3, dos personas del grupo de 61 a 70 obtuvieron tres respuestas correctas, en estos casos se asignan los rangos consecutivos 2 y 3, y se obtiene el promedio en los casos que los valores sean iguales. Si los rangos fueron asignados correctamente, entonces el último dato deberá tener un rango igual a *N*.

**Tabla 9-3. Puntuaciones obtenidas en una prueba de atención en personas que pertenecen a uno de tres rangos de edad: 1, 40 a 50 años 61 a 70 años**

| ID | Grupo A (40 a 50) | Rango_ini | Rango_final | ID | Grupo B (51 a 60) | Rango_ini | Rango_final | ID | Grupo C (61 a 70) | Ra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **10** | 11 | 11 | **6** | **2** | 1 | 1 | **11** | **3** | |
| **2** | **8** | 8 | 8.5 | **7** | **7** | 7 | 6.5 | **12** | **5** | |
| **3** | **7** | 6 | 6.5 | **8** | **9** | 10 | 10 | **13** | **6** | |
| **4** | **11** | 12 | 12 | **9** | **8** | 9 | 8.5 | **14** | **3** | |
| **5** | **20** | 15 | 15 | **10** | **18** | 14 | 14 | **15** | **16** | |
| | Suma | $R_1$ = | 53 | | | $R_2$ = | 40 | | | |

**2.** El siguiente paso es identificar los casos en que se han asignado rangos iniciales diferentes a los mismos datos y con ellos se obtiene el promedio; por ejemplo, en el caso que analizado se les asigna un rango final de 2.5 que es el promedio [(2+3)/2 = 2.5].

**3.** El siguiente paso es sumar los rangos de cada grupo, por separado. A esta suma se le denominará $R_1$, $R_2$, y $R_3$, respectivamente.

**4.** Se calcula el valor de *H* mediante la ecuación:

$$H = \frac{12}{N(N-1)} \sum_{i\_1}^{k} \frac{R_i^2}{ni} - 3(N+1)$$

Donde $R_i$ es la suma de rangos para cada grupo, *N* es el tamaño total de la muestra (en este caso 15) y $n_i$ es el tamaño de la muestra en cada grupo en particular (en el ejemplo se tienen muestras iguales para cada grupo de $n = 5$). Por lo tanto, lo que realmente es necesario hacer en cada grupo es elevar al cuadrado la suma de los rangos y dividir este valor entre el tamaño de la muestra de cada grupo. Después se suman esos valores para tener una parte de la ecuación, los demás cálculos tienen que ver con los tamaños de las muestras. Para estos datos se tiene:

$$H = \frac{12}{15\,(15-1)}\left(\frac{53^2}{5} + \frac{40^2}{5} + \frac{27^2}{5}\right) - 3\,(15+1)$$

$$H = \frac{12}{240}\left(\frac{2809}{5} + \frac{1600}{5} + \frac{729}{5}\right) - 3\,(16)$$

$$H = 0.05\,(561.8 + 320 + 145.8) - 48$$

$$H = 51.38 - 48$$

$$H = 3.38$$

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

La distribución del estadístico *H* es aproximadamente el mismo que Chi-cuadrado con $gl = k - 1$, donde $k$ = número de grupos. En el presente estudio, $gl = 3 - 1 = 2$. De acuerdo con la Tabla C (chi-cuadrado) del Apéndice, con a 0 0.05 y $gl = 2$, $H_{crit} = 5.99$.

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

La regla de decisión establece que si:

$$H_{obt} \geq H_{crit} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_{obt} < H_{crit} \text{ se retiene la } H_0$$

Dado que la $H_{obt}$ 3.38 < $H_{crit}$ 5.99, se retiene la $H_0$.

***Pruebas post hoc para Kruskall-Wallis***

En casos como éste, en los que se retiene la $H_0$, no es necesario hacer pruebas adicionales porque el efecto total de la prueba resultó no significativo. En caso de tener un efecto significativo (rechazo de la $H_0$), entonces interesa conocer específicamente en dónde hay diferencias, y para ello se utiliza la prueba *post hoc* no paramétrica que le corresponde a cada comparación. En este caso lo más natural es usar tantas pruebas *U* de Mann-Whit*ney* (ver la sección previa) como sea necesario, por lo que sería común preguntarse: ¿por qué no se hizo esto desde el principio? La respuesta es que cuando se hacen múltiples comparaciones con los mismos datos se está inflando el error tipo I, es decir, es más probable que se rechace $H_0$ cuando en realidad no hay diferencias entre los grupos. La explicación es la siguiente: imagine una situación en la que hay tres condiciones experimentales y existe el interés en encontrar las diferencias entre esos tres grupos. Si se llevara a cabo una prueba para cada par de grupo, entonces se tendrían tres pruebas: a) la comparación entre los grupos 1 y 2; b) la comparación entre el grupo 1 y 3; y c) la comparación entre el grupo 2 y 3. Si en cada una de esas pruebas se utiliza un nivel de significancia de 0.5, entonces para cada prueba, la probabilidad de rechazar la $H_0$ (error tipo I) es de 5%. Por lo tanto, la probabilidad de no cometer el error tipo I sería de .95 (95%). En caso de asumir que cada prueba es independiente se deben multiplicar las probabilidades para la prueba global de no cometer el error tipo I, que sería $(.95)^3 = .95 \times .95 \times .95 = .857$; por lo tanto, la probabilidad de cometer el error tipo I sería 1 – .857 = .143, o 14.3%, lo cual está muy lejos del valor de 5% que se usa en las

pruebas. Por esta razón se utiliza la prueba de Kruskall-Wallis y únicamente cuando se ha comprobado que la prueba global es significativa, se hacen pruebas *U* de Mann-Whitney para hacer una comparación por pares, pero haciendo un ajuste en el nivel de significancia. Dicho ajuste se conoce como **corrección de Bonferroni**, la cual se refiere a dividir el nivel de significancia (0.05) entre el número de pruebas por pares que se realizan, si se hacen tres pruebas el nivel de significancia es $\alpha = 0.05/3 = .0167$ (Field, 2007, pág. 348).

***Representación e interpretación***

Dado que se retiene la $H_0$ se puede concluir que no existen diferencias estadísticamente significativas [$H(2) = 3.38$, $p > 0.05$] en la ejecución en las pruebas de atención entre los grupos de edad: 1, 40-50 años (*Mdn* = 10); el grupo 2, de 51-60 (*Mdn* = 8) y el 3, de 61-70 años (*Mdn* = 5). Por lo tanto, con base en el estudio realizado no se puede hablar de un deterioro en dicha función.

# PRUEBA DE FRIEDMAN: MÁS DE DOS GRUPOS RELACIONADOS

En un capítulo previo se revisó la prueba ANOVA de medidas repetidas, la cual permite conocer si existen diferencias entre varios grupos relacionados. Aun cuando la ANOVA de medidas repetidas se considera como una prueba robusta ante la violación de sus supuestos (medida de intervalo, distribución normal y tamaño de la muestra), existe una alternativa en el caso de que no se cumplieran dichos supuestos. El **ANOVA de Friedman** se considera la versión no paramétrica del ANOVA de medidas repetidas. Al igual que las demás pruebas que se han estudiado en este capítulo, en la prueba de Friedman se requiere que los datos estén por lo menos en una escala ordinal y su uso no depende de que estos tengan una distribución normal. Además, esta prueba es una extensión de la prueba de rangos con signo de Wilcoxon para dos muestras relacionadas; en el caso de la prueba de Friedman, ésta se utiliza para probar si existen diferencias entre tres o más condiciones cuando las personas son las mismas (o están pareadas por una variable relevante) en todas esas condiciones. El símbolo de esta prueba es $F_r$ (Pardo y San Martín, 2010).

## Presentación del problema

El objetivo de la investigación es evaluar la eficacia de tres técnicas de relajación para disminuir los síntomas de tensión, ansiedad o estrés en pacientes con cáncer que son atendidos en la unidad de quimioterapia ambulatoria del Instituto Jalisciense de Cancerología. Para ello se probaron tres técnicas de relajación en 10 pacientes mientras se les realizaba la quimioterapia. Las técnicas fueron: 1) técnica de relajación progresiva de Jacobson, 2) relajación autógena de Schultz, y 3) una técnica basada en el *biofeedback*. Al finalizar el procedimiento se aplicó una escala análogo-visual en la que el paciente calificaba del 0 al 10 su nivel de relajación. En este caso, la pregunta de investigación es: ¿existen diferencias en el nivel de relajación percibido en pacientes oncológicos entre las tres técnicas utilizadas?

## Pasos de la inferencia

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***

1. La pregunta de investigación es de diferencia.
2. El nivel de la variable observable, percepción del nivel de relajación, es ordinal.

**3.** El diseño es relacionado o de medidas repetidas, ya que los 10 participantes estuvieron bajo las tres técnicas de relajación, que son: 1) técnica de relajación progresiva de Jacobson, 2) relajación autógena de Schultz y 3) una técnica basada en el *biofeedback*.
**4.** Por ello se aplica la prueba de Friedman.

***Establecer las hipótesis estadísticas***

El ANOVA de Friedman permite identificar si existen diferencias en las medianas en las diferentes condiciones por las que pasa una persona. A continuación se plantean las hipótesis.

$$H_0: Mdn_{Técnica\ 1} = Mdn_{Técnica\ 2} = Mdn_{Técnica\ 3}$$

$H_1$: Existen diferencias en la percepción de relajación entre al menos dos técnicas de relajación.

Al igual que el ANOVA de medidas repetidas, la prueba de Friedman es una prueba no direccional. El estadístico $F_r$ resulta significativo si existen diferencias en al menos dos de las técnicas.

***Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

Para inferir la $F_r$ se requiere de los siguientes pasos:

**1.** La teoría de Friedman es muy similar a las otras pruebas que se han estudiado en este capítulo. Para iniciar se colocan los datos de las diferentes condiciones en cada columna. Los datos del ejemplo se encuentran en la tabla 9-4, donde cada valor representa el nivel de relajación que sintieron los pacientes cuando se les aplicó cada una de las técnicas. El primer paso para calcular la $F_r$ de Friedman es asignar un rango de menor a mayor en las puntuaciones para cada persona. Para iniciar se observan las puntuaciones de la persona 1 y se asigna el rango 1 al nivel de relajación menor, al siguiente el 2 y al más alto el 3; esto se hace con todas las personas.

**Tabla 9-4. Niveles de relajación en cada una de las tres técnicas utilizadas**

| | Niveles de relajación | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Medidas en cada técnica | | | Rangos en cada técnica | | |
| ID | Jacobson | Schulz | Biofeedback | Jacobson | Schulz | Biofeedback |
| 1 | 6 | 6.5 | 8.2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3.4 | 1.6 | 6.5 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2.8 | 3.5 | 7 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5.5 | 5 | 6.5 | 2 | 1 | 3 |
| 5 | 2.4 | 3.6 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 7 | 8.5 | 9 | 1 | 2 | 3 |
| 7 | 6.8 | 5 | 8 | 2 | 1 | 3 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3.5 | 5 | 6.5 | 1 | 2 | 3 |
| 9 | 7.5 | 8 | 9.5 | 1 | 2 | 3 |
| 10 | 8 | 6 | 7.5 | 3 | 1 | 2 |
| | | | *Ri* = | 15 | 16 | 29 |
| *Ri* = suma de rangos en cada grupo *i*. | | | | | | |

**2.** El siguiente paso consiste en sumar los rangos a lo que se denomina $R_i$, donde la *i* denota la técnica empleada.
**3.** Se calcula el valor de $F_r$ mediante la siguiente ecuación:

$$F_r = \left[ \frac{12}{Nk\,(k+1)} \sum_{i\_1}^{k} R_i^2 \right] - 3N\,(k+1)$$

En esta ecuación, $R_i$ es la suma de rangos para cada grupo, $N$ es el tamaño total de la muestra (en este caso 10) y $k$ es el número de condiciones (en el ejemplo se tiene $k = 3$). Para estos datos se tiene que:

$$F_r = \left[ \frac{12}{10 \times 3\ \ (3+1)} \left(15^2 + 16^2 + 29^2\right) \right] - 3 \times 10\,(3+1)$$

$$F_r = \left[ \frac{12}{120} \left(225 + 256 + 841\right) \right] - 120$$

$$F_r = \left[ .1\,(1322) \right] - 120$$

$$F_r = 132.2 - 120 = 12.2$$

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

En este estadístico, cuando el número de participantes es igual o mayor a 10, como en el caso de la prueba de Kruskall-Wallis, $F_r$ tiene una distribución aproximadamente igual que Chi-cuadrado con $gl = k - 1$, donde $k$ = número de grupos. En el presente estudio, $gl = 3 - 1 = 2$. De acuerdo con la Tabla C (chi-cuadrado) (véase Apéndice), con a = 0.05 y $gl = 2$, $F_{r\_crit} = 5.99$.

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

La regla de decisión establece que si:

$F_{r\_crit} \geq F_{r\_crit}$ se rechaza $H_0$

$F_{r\_crit} < F_{r\_crit}$ se retiene la $H_0$

Dado que la $F_{r\_obt}$ 12.2 > $F_{r\_crit}$ 5.99 se rechaza la $H_0$.

***Pruebas post hoc para la ANOVA de Friedman***

En los casos en que se retiene la $H_0$ no es necesario hacer ninguna prueba adicional. Sin embargo, cuando la prueba de Friedman es significativa es necesario encontrar en dónde se están produciendo las diferencias, como en el caso de la prueba de Kruskall-Wallis, que se hace una corrección en el nivel de significancia; pero ahora se utilizará la prueba *T* de rangos con signo de Wilcoxon haciendo correcciones por el número de pruebas que se realizará.

En el estudio se cuenta con tres técnicas de relajación, por lo que habrá tres comparaciones por pares, por lo tanto, en lugar de usar un nivel de significancia de 0.05, se utilizará $a = 0.05/3 = 0.0167$. Al realizar estas pruebas se obtuvieron los resultados que se exponen a en la tabla 9-5.

**Tabla 9-5. Comparación por pares entre las técnicas de relajación, se presentan los valores de Z y su correspondiente nivel de significancia**

| Técnicas que se comparan | Z (valor de significancia) |
|---|---|
| 1) Schultz-Jacobson | –0.153 (.878) |
| 2) Biofeedback-Jacobson | –2.703 (.007)* |
| 3) Biofeedback-Schultz | –2.821 (.005)* |
| * Significativos p < .0167. | |

***Representación e interpretación***

Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existen diferencias estadísticamente significativas [$F_r(2) = 12.2$, $p > 0.05$] en el nivel de relajación producido entre las diferentes técnicas. Las pruebas post hoc señalan que no produce mayor relajación la técnica de Jacobson (*Mdn* = 5.75) en comparación con la técnica de Schultz (*Mdn* = 5.00, T(9) = 4, z = –.153, $p > 0.0167$); mientras que sí produce mayor relajación la técnica de biofeedback (*Mdn* = 7.25) en relación con la técnica de Jacobson (*Mdn* = 5.75, T(9) = 1, z = –2.703, p < 0.0167) y la de *biofeedback* con respecto a la de Schultz (T(9) = 0, z = –2.821, $p > 0.0167$).

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

Es necesario practicar ambas pruebas con los siguientes ejercicios.

***Prueba T de rangos con signo de Wilcoxon***

Realice la prueba de hipótesis para los siguientes ejercicios usando Wilcoxon.

**1.** Un médico y un psicólogo quieren conocer la efectividad de un medicamento para dormir; en el experimento se añadió un placebo para conocer si el efecto se debía a la atención psicológica que estaban recibiendo los pacientes.

Después de tomar el medicamento durante 15 días, el médico preguntaba a los pacientes cuánto tiempo al día consideraban que dormían de manera reparadora y sentían que descansaban, se les daba el placebo y 15 días después se hacía la misma pregunta. Dado que la pregunta mide la percepción de la persona, la variable se considera ordinal. Se eligieron 10 pacientes de manera aleatoria, a quienes se les aplicó primero el medicamento y luego el placebo.

**Tabla 9-1. Horas de sueño reparador cuando los pacientes tomaban el medicamento y cuando se les daba el placebo**

| Paciente | Horas de sueño reparador | |
|---|---|---|
| | Con medicamento | Con placebo |
| 1 | 6.1 | 5.2 |
| 2 | 7.0 | 7.9 |
| 3 | 8.2 | 3.9 |
| 4 | 7.6 | 4.7 |
| 5 | 6.5 | 5.3 |
| 6 | 8.4 | 5.4 |
| 7 | 6.9 | 4.2 |
| 8 | 6.7 | 6.1 |
| 9 | 7.4 | 3.8 |
| 10 | 5.8 | 6.3 |

**2.** Para conocer las capacidades creativas de los jóvenes, se invitó a 16 estudiantes que debían resolver 6 tangramas con las figuras que se les proporcionaron. Para ello se les explicaba el procedimiento con materiales impresos y se les pedía que resolvieran seis figuras; luego se les daba la explicación por medio de videos para que resolvieran otras seis figuras. Un juez evaluaba de 1 a 10 el nivel de creatividad en la construcción de las figuras, donde el máximo de puntuación era 10. Se quiere saber si existen diferencias entre el material impreso y el video con respecto al nivel de creatividad en la resolución de los tangramas. Los resultados se presentan en la tabla 9-2.

**Tabla 9-2. Nivel de creatividad cuando se entrenó con material impreso y cuando se entrenó con un video en la resolución de los tangramas**

| Estudiante | Nivel de creatividad | |
|---|---|---|
| | Material impreso | Video |
| 1 | 4.2 | 4.1 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 4.7 | 4.9 |
| 3 | 6.6 | 6.2 |
| 4 | 7.0 | 6.9 |
| 5 | 6.7 | 6.8 |
| 6 | 4.5 | 4.4 |
| 7 | 5.7 | 5.7 |
| 8 | 6.0 | 5.8 |
| 9 | 7.4 | 6.9 |
| 10 | 4.9 | 4.9 |
| 11 | 6.1 | 6.0 |
| 12 | 5.2 | 4.9 |
| 13 | 5.7 | 5.3 |
| 14 | 6.9 | 6.5 |
| 15 | 6.8 | 7.1 |
| 16 | 4.9 | 4.8 |

**3.** Se quiere saber si un estudiante universitario puede aumentar su calificación en el examen EGEL (Examen general de egreso de la licenciatura) del Ceneval (Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior A.C.), si se le proporcionan problemas de muestra para prepararlo. Para probar esta afirmación se eligieron 10 estudiantes que presentaron dicho examen y no superaron la puntuación necesaria; después de ello se les dio una capacitación en la que durante un mes recibían todos los días un entrenamiento para responder preguntas similares a las del EGEL; y al terminar dicha preparación, volvieron a aplicar el examen. En la tabla 9-3 se presenta la puntuación en las dos ocasiones.

**Tabla 9-3. Puntuación en el EGEL sin entrenamiento y con entrenamiento**

| Paciente | Puntos en el examen | |
|---|---|---|
| | Sin entrenamiento | Con entrenamiento |
| 1 | 809 | 831 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 840 | 921 |
| 3 | 988 | 933 |
| 4 | 802 | 879 |
| 5 | 724 | 751 |
| 6 | 983 | 960 |
| 7 | 868 | 891 |
| 8 | 1048 | 1019 |
| 9 | 830 | 843 |
| 10 | 824 | 875 |

**4.** Un médico desea saber si los niños prefieren los medicamentos sabor fresa o mango. Con este fin se eligen 10 pacientes entre niños y niñas que presentan tos persistente y se entrega a la madre dos frascos de jarabe, uno sabor mango y otro sabor fresa. Se le pide a la madre que dé una toma al niño cada 8 horas hasta que se cure; también le debe preguntar de qué sabor quiere el jarabe y anotar su preferencia en un registro. Después de un mes se recoge la hoja de registro con la que se realiza la tabla 9-4.

**Tabla 9-4. Número de veces en las que cada niño elige un sabor de jarabe**

| Niño(a) | Preferencia por el sabor | |
|---|---|---|
| | Fresa | Mango |
| 1 | 250 | 108 |
| 2 | 17 | 24 |
| 3 | 49 | 31 |
| 4 | 55 | 33 |
| 5 | 2 | 17 |
| 6 | 38 | 8 |
| 7 | 35 | 12 |
| 8 | 27 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 29 | 18 |
| 10 | 39 | 5 |

**5.** Un profesor mexicano desea saber si las zonas arqueológicas de México son más visitadas por europeos o por asiáticos; para ello, toma un día al azar y pide a las oficinas que le digan el número de visitantes europeos y asiáticos que tienen registrados. Los resultados se encuentran en la tabla 9-5.

**Tabla 9-5. Número de europeos y asiáticos que asistieron el 12 de mayo a seis zonas arqueológicas mexicanas**

| Zonas arqueológicas visitadas | Número de extranjeros visitantes | |
|---|---|---|
| | Europeos | Asiáticos |
| Chichén Itzá | 10 | 37 |
| Cholula | 15 | 28 |
| El Tajín | 26 | 52 |
| Monte Albán | 49 | 14 |
| Palenque | 10 | 5 |
| Teotihuacán | 30 | 2 |

**6.** El gerente de recursos humanos de una empresa quiere saber si la capacitación en relaciones humanas puede mejorar el desempeño de sus empleados. Para comprobar esta hipótesis selecciona a un grupo de empleados, a quienes les proporciona capacitación y evalúa su desempeño utilizando como indicador el número de ventas realizadas en un mes, antes y después del curso de capacitación. El gerente supone que la capacitación mejorará el desempeño de los empleados.

**Tabla 9-6. Número de ventas mensuales en una empresa antes y después de la capacitación**

| Trabajadores | Número de ventas mensuales | |
|---|---|---|
| | Antes | Después |
| 1 | 8 | 8 |
| 2 | 7 | 9 |
| 3 | 6 | 9 |
| 4 | 7 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 8 | 9 |
| 6 | 7 | 9 |
| 7 | 5 | 10 |

**7.** Un terapeuta de pareja quiere comprobar la efectividad de su intervención para mejorar la relación marital. Para ello, evalúa a un grupo de pacientes antes y después del tratamiento utilizando una escala de satisfacción que aún no ha sido estandarizada. El investigador supone que la satisfacción aumentará después del tratamiento.

**Tabla 9-7. Nivel de satisfacción de las parejas, antes y después de la terapia**

| Pacientes | Nivel de satisfacción marital | |
|---|---|---|
| | Antes | Después |
| 1 | 2 | 14 |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 8 | 7 |
| 4 | 7 | 12 |
| 5 | 9 | 10 |
| 6 | 6 | 9 |
| 7 | 5 | 11 |
| 8 | 7 | 10 |
| 9 | 7 | 7 |

**8.** Un mercadólogo quiere ver si hay diferencias en la preferencia de un grupo de consumidores por dos bebidas de toronja. La preferencia se evalúa de acuerdo con una escala de 0 a 10, donde 0 es "no me gusta nada" y 10 "es mi favorita".

**Tabla 9-8. Nivel de preferencia por dos bebidas de toronja**

| Consumidores | Puntos en el examen | |
|---|---|---|
| | Bebida 1 | Bebida 2 |
| 1 | 8 | 6 |
| 2 | 10 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 10 | 6 |
| 4 | 7 | 5 |
| 5 | 8 | 6 |
| 6 | 9 | 7 |
| 7 | 8 | 8 |
| 8 | 7 | 5 |

**9.** Un psicólogo del deporte está interesado en saber si hay mejoría en la agilidad después de realizar ejercicios de yoga una hora diaria durante una semana. Para el pretest y el postest se utiliza una escala no estandarizada en la que se evalúa el nivel de flexibilidad. El grupo de participantes está conformado por 15 mujeres de 50 a 65 años.

**Tabla 9-9. Nivel de flexibilidad de las participantes en el taller de yoga**

| Participantes | Nivel de flexibilidad | |
|---|---|---|
| | Antes | Después |
| 1 | 45 | 51 |
| 2 | 67 | 60 |
| 3 | 54 | 69 |
| 4 | 66 | 72 |
| 5 | 32 | 51 |
| 6 | 28 | 30 |
| 7 | 59 | 65 |
| 8 | 77 | 88 |
| 9 | 45 | 58 |
| 10 | 40 | 44 |
| 11 | 29 | 29 |
| 12 | 31 | 30 |
| 13 | 26 | 42 |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 78 | 90 |
| 15 | 53 | 77 |

**10.** La psicóloga encargada del desarrollo del personal de una empresa de exportación de electrónicos se ha preguntado si los obreros de planta podrían tener una buena relación con sus hijos si trabajaran menos horas a la semana. Para comprobarlo, la psicóloga aplica una encuesta no estandarizada antes de reducir el horario laboral y vuelve a aplicarla un mes después de haberlo reducido. El grupo consta de 20 trabajadores que son padres de niños mayores de 10 años.

**Tabla 9-10. Relación padre-hijo antes y después de reducir el horario laboral**

| Sujetos | Relación padre-hijo | |
|---|---|---|
| | Horario completo | Horario reducido |
| 1 | 12 | 12 |
| 2 | 16 | 17 |
| 3 | 21 | 25 |
| 4 | 25 | 23 |
| 5 | 19 | 21 |
| 6 | 24 | 23 |
| 7 | 11 | 26 |
| 8 | 20 | 21 |
| 9 | 29 | 23 |
| 10 | 9 | 18 |
| 11 | 22 | 19 |
| 12 | 14 | 26 |
| 13 | 17 | 19 |
| 14 | 19 | 21 |
| 15 | 22 | 23 |
| 16 | 15 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 17 | 15 | 16 |
| 18 | 20 | 23 |
| 19 | 12 | 27 |
| 20 | 27 | 20 |

## Prueba *U* de Mann-Whitney

**11.** Una especialista en nutrición tiene la sospecha de que consumir una dieta rica en proteínas a edad muy temprana aumenta el índice de masa corporal (IMC). En el área geográfica donde vive la investigadora la dieta es alta en proteínas. Ella cree que la dieta baja en proteínas ingerida en los primeros años disminuye el IMC. Si está en lo cierto, entonces los niños de su población tienen un IMC alto. Para averiguarlo, realiza un experimento en el cual elige 18 niños de manera aleatoria, 9 son del lugar donde vive la psicóloga y 9 de una población cercana. Al grupo control se le alimenta durante tres años con la dieta usual, pobre en proteínas; mientras que el grupo experimental ingiere una dieta rica en proteínas durante ese mismo periodo. Al final de los tres años, a cada uno de los niños se le calcula su IMC. Los datos resultantes se presentan en la tabla 9-11. Cabe mencionar que un niño del grupo experimental se mudó a otra ciudad y no fue sustituido.

**Tabla 9-11. Índice de masa corporal en niños con una dieta rica en proteínas y del grupo experimental, que fue alimentado con una dieta alta en proteínas**

| Índice de masa corporal | |
|---|---|
| **Dieta baja en proteínas** | **Dieta alta en proteínas** |
| 10.2 | 11.0 |
| 10.4 | 11.5 |
| 10.5 | 11.7 |
| 10.7 | 12.2 |
| 10.8 | 12.5 |
| 11.1 | 13.0 |
| 11.3 | 13.5 |
| 11.8 | 14.0 |
| 12.0 | |

**12.** Se tiene la hipótesis de que los hombres son más hábiles para el razonamiento abstracto en comparación con las mujeres. Un investigador reacciona con escepticismo ante esta afirmación y pone a prueba la hipótesis de que existen diferencias entre los sexos. Para eso selecciona al azar a ocho hombres y ocho mujeres de una clase de primer año de universidad, y los somete a una prueba de razonamiento abstracto. De esta manera obtiene los siguientes datos (véase tabla 9-12).

**Tabla 9-12 Puntuación en la prueba de razonamiento abstracto para hombres y mujeres**

| Razonamiento abstracto | |
|---|---|
| **Hombres** | **Mujeres** |
| 70 | 82 |
| 86 | 80 |
| 60 | 50 |
| 92 | 95 |
| 82 | 93 |
| 65 | 85 |
| 74 | 90 |
| 94 | 75 |

**13.** Un científico social cree que los profesores de la Facultad de Teología de una universidad local tienen una orientación política más conservadora que sus colegas de la Facultad de Psicología. Para probar su hipótesis, a una muestra aleatoria conformada por ocho profesores del departamento de Teología y 12 profesores del departamento de Psicología de dicha universidad local, les aplica un cuestionario de 50 puntos para medir su nivel de conservadurismo político. Así se obtuvieron los resultados que se presentan en la tabla 9-13. Los puntajes más altos indican mayor grado de conservadurismo político.

**Tabla 9-13. Nivel de conservadurismo político en profesores universitarios de las Facultades de Teología y de Psicología**

| Nivel de conservadurismo político | |
|---|---|
| **Profesores de Teología** | **Profesores de Psicología** |
| 36 | 13 |
| 42 | 25 |

| | |
|---|---|
| 22 | 40 |
| 48 | 29 |
| 31 | 10 |
| 35 | 26 |
| 47 | 43 |
| 38 | 17 |
| | 12 |
| | 32 |
| | 27 |
| | 32 |

**14.** Una psicóloga está interesada en averiguar si existe alguna diferencia en la habilidad espacial entre las personas zurdas y diestras. Para averiguarlo, selecciona al azar a 10 zurdos y 10 diestros entre los estudiantes inscritos en la universidad donde ella trabaja, y los somete a una prueba para medir su habilidad espacial. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 9-14 (un puntaje más alto indica mayor habilidad espacial y la prueba no está estandarizada).

**Tabla 9-14. Habilidad espacial de individuos zurdos y diestros**

| Habilidad espacial | |
|---|---|
| **Zurdos** | **Diestros** |
| 87 | 47 |
| 94 | 68 |
| 56 | 92 |
| 74 | 73 |
| 98 | 71 |
| 83 | 82 |
| 92 | 55 |
| 84 | 61 |

| | |
|---|---|
| 76 | 75 |
| | 95 |

**15.** Se compara la media de la velocidad de mecanografía de dos grupos de estudiantes de una escuela comercial. El grupo 1 aprende mecanografía con un método tradicional, en tanto que el grupo 2 la aprende mecanografiando con un cubreteclado. Ponga a prueba la hipótesis de que los estudiantes que aprenden con el segundo método escriben más palabras por minuto que los del grupo 1; para ello utilice $\alpha = 0.05$.

**Tabla 9-15. Palabras por minuto que escribe cada uno de los dos grupos**

| Palabras por minuto | |
|---|---|
| **Grupo 1** | **Grupo 2** |
| 36.0 | 38.2 |
| 32.5 | 40.1 |
| 41.3 | 29.8 |
| 40.1 | 30.3 |
| 50.8 | 32.8 |
| 39.2 | 40.4 |
| 41.2 | 37.2 |
| 29.7 | 34.1 |
| 32.5 | 36.2 |
| 37.8 | 41.5 |
| 46.6 | 35.5 |
| | 42.5 |
| | 44.9 |

**16.** Un partido político desea evaluar si existen diferencias entre hombres y mujeres respecto a la aceptación de campaña de un candidato independiente con actitudes machistas. Para ello, se pidió a 20 personas que evaluaran con una escala de 0 a 10, qué tanto aceptaban al candidato.

| Tabla 9-16. Aceptación de hombres y mujeres de un candidato independiente con actitudes machistas | |
|---|---|
| **Aceptación de un candidato independiente** | |
| **Mujeres** | **Hombres** |
| 9 | 6 |
| 10 | 7 |
| 8 | 5 |
| 9 | 8 |
| 10 | 9 |
| 8 | 5 |
| 9 | 6 |
| 7 | 4 |
| 6 | 5 |
| 8 | 6 |

**17.** Un psicólogo infantil quiere evaluar el impacto del escenario de crianza sobre el desarrollo del lenguaje. Para ello, selecciona un grupo de niños criados en el hogar y otro grupo de niños criados en la guardería; la única característica que comparten es la edad, todos tienen dos años y un mes. Para evaluar el lenguaje, el investigador contó el número de palabras que el niño puede pronunciar correctamente.

| Tabla 9-17. Palabras que un niño pronuncia en cada uno de los dos grupos | |
|---|---|
| **Número de palabras emitidas por niños** | |
| **Educados en el hogar** | **Educados en guardería** |
| 29 | 16 |
| 10 | 47 |
| 18 | 35 |
| 39 | 48 |
| 10 | 19 |

| | |
|---|---|
| 28 | 15 |
| 29 | 26 |
| 17 | 14 |
| 26 | 25 |
| 28 | 26 |

# Pruebas de más de dos condiciones o grupos: *H* de Kruskall-Wallis y *F* de Friedman

**18.** Como parte de una investigación de psicología de la salud, se somete a prueba la hipótesis de que la edad afecta el estrés premenstrual; y para ello, los investigadores tratan de identificar si existen diferencias en la sintomatología del síndrome premenstrual entre tres grupos de mujeres de diferentes edades: 12 a 20, 21 a 30 y 31 a 40 años de edad. Para este fin se utilizó el cuestionario de estrés menstrual, el cual proporciona la puntuación de la sintomatología; sin embargo, dicho instrumento se encuentra en fase de piloteo.

**Tabla 9-18. Nivel de estrés premenstrual en mujeres en tres rangos de edad**

| Estrés premenstrual por rango de edad | | |
|---|---|---|
| **12 a 20 años** | **21 a 30 años** | **31 a 40 años** |
| 9 | 5 | 4 |
| 8 | 6 | 3 |
| 9 | 7 | 4 |
| 8 | 7 | 5 |
| 9 | 7 | 6 |
| 7 | 7 | 3 |
| 9 | 7 | 2 |

**19.** Se quiere comprobar la efectividad de tres píldoras para la depresión, para lo cual, a un grupo de hombres que padecen depresión se le suministra la primera píldora, después de un periodo de desintoxicación se les suministra el segundo fármaco y de esta misma forma se procede con el total de las píldoras.

**Tabla 9-19. Efectividad de tres píldoras para la depresión**

| Efectividad de píldoras para la depresión | | | |
|---|---|---|---|
| **Pacientes** | **Píldora 1** | **Píldora 2** | **Píldora 3** |
| 1 | 15 | 6 | 10 |
| 2 | 18 | 6 | 12 |
| 3 | 19 | 8 | 11 |
| 4 | 12 | 7 | 9 |
| 5 | 20 | 10 | 10 |

# EJERCICIOS VOLUNTARIOS

## Prueba *T* de rangos con signo de Wilcoxon

**1.** Un médico desea conocer si los enfermos reincidentes de H1N1 son más resistentes a las cepas tradicionales o a las nuevas; para ello, revisa al azar estudios de laboratorio de enfermos de dicha patología que cuentan con expediente de largo tiempo en el hospital donde él trabaja; también considera detalles de historial muy claros con respecto al comportamiento de la enfermedad en múltiples ocasiones, encontrando lo siguiente (véase tabla 9-20).

**Tabla 9-20. Nivel de resistencia a las cepas tradicionales y nuevas**

| Enfermos | Resistencia a las cepas | |
|---|---|---|
| | **Tradicional** | **Nuevas** |
| 1 | 8 | 6 |
| 2 | 5 | 1 |
| 3 | 2 | 1 |
| 4 | 4 | 1 |
| 5 | 9 | 4 |

**2.** Una profesora midió el número de objetos que recordaban sus alumnos de una pintura. Se trabajó con un grupo de cinco niños al principio del curso, cuando tenían habilidad lectora baja, y al finalizar el curso de escritura,

cuando los niños tenían habilidad lectora alta. Los registros se presentan en la tabla 9-21:

**Tabla 9-21. Número de objetos que recuerdan los niños de una pintura**

| Niños | Número de objetos recordados | |
|---|---|---|
| | Habilidad lectora baja | Habilidad lectora alta |
| 1 | 10 | 12 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 8 | 11 |
| 4 | 7 | 7 |
| 5 | 9 | 13 |

**3.** Un psicólogo realizo una prueba de destreza manual a un grupo de siete niños; primero la hicieron acompañados de música instrumental y enseguida con música rap. La velocidad con que insertaron las agujas en el punto dibujado para ello fue la siguiente.

**Tabla 9-22. Resultados de una prueba de destreza manual con acompañamiento de música instrumental y de música rap**

| Niños | Destreza manual | |
|---|---|---|
| | Música instrumental | Música rap |
| 1 | 5 | 7 |
| 2 | 4 | 4 |
| 3 | 5 | 8 |
| 4 | 5 | 9 |
| 5 | 7 | 9 |
| 6 | 9 | 9 |
| 7 | 8 | 9 |

**4.** Una psicóloga realizó ejercicios de aplicación de habilidades sociales a 12 estudiantes de séptimo semestre en la materia de Orientación educativa en diferentes situaciones, primero con compañeros de su grupo y luego con un grupo distinto. Así, realizó un registro para evaluar las habilidades sociales mostradas con la idea de ver si éstas cambian con el acercamiento grupal o no.

| Tabla 9-23. Habilidades sociales mostradas por estudiantes con su grupo y en un grupo distinto | | |
|---|---|---|
| **Estudiantes** | **Habilidades sociales** | |
| | **Con su grupo** | **Con un grupo distinto** |
| 1 | 94 | 89 |
| 2 | 85 | 90 |
| 3 | 89 | 87 |
| 4 | 89 | 95 |
| 5 | 81 | 86 |
| 6 | 76 | 81 |
| 7 | 107 | 102 |
| 8 | 89 | 105 |
| 9 | 87 | 83 |
| 10 | 91 | 88 |
| 11 | 88 | 91 |
| 12 | 80 | 79 |

**5.** Escriba un ejemplo de la carrera que estudia en el que requiera la prueba Wilcoxon. Asigne los rangos a las diferencias de los valores absolutos de las diferencias. ¿Existen valores repetidos?

También encuentre la suma de rangos correspondientes a los valores positivos y a los negativos, así como el valor del estadístico de contraste y el valor *T*(de la prueba de Wicoxon) de la prueba. Por último, describa cómo sería la hipótesis nula y si ésta se rechaza o se acepta.

**6.** Una muestra de seis sujetos lee 1, 3 y 5 veces una lista de 50 palabras que deben memorizar. Tras cada lectura se les asigna una tarea para reforzar la memorización. Sus resultados (o aciertos) fueron:

Una lectura: 15, 17, 14, 18, 18, 16.
Tres lecturas: 21, 25, 22, 24, 29, 27.
Cinco lecturas: 28, 32, 34, 35, 30, 30.

**a)** ¿Qué prueba utilizaría?
**b)** ¿La tarea de reforzamiento incrementa el número de palabras memorizadas?
**c)** ¿Dónde se dan los mejores y peores resultados?
**d)** ¿Cuál de las hipótesis se aprueba?

**7.** ¿Bajo qué condiciones se puede utilizar la prueba *U* de Mann-Whitney?

**8.** La mayoría de los alumnos de la escuela Johnston provienen de la escuela Garfield o de la escuela Mulberry. Los directivos de la escuela Johnston desean saber si la población de los estudiantes provenientes de la escuela Garfield es idéntica, en términos de preparación académica, a la población de estudiantes que provienen de la escuela Mulberry. Para ello, los directivos de la escuela Johnston toman una muestra aleatoria de cuatro estudiantes provenientes de la escuela Garfield y otra muestra aleatoria de cinco estudiantes de la escuela Mulberry. De cada uno de los estudiantes se registra la puntuación que obtiene en la prueba de desempeño.

**Tabla 9-24. Puntuación en la prueba PISA para los estudiantes provenientes de las dos escuelas**

| Escuela Garfield | | Escuela Mulberry | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 5 | 70 |
| 2 | 52 | 6 | 202 |
| 3 | 112 | 7 | 144 |
| 4 | 21 | 8 | 175 |
| | | 9 | 146 |

**9.** Un experimentador utiliza dos métodos para enseñar a leer a un grupo de 10 niños de seis años, quienes acaban de ingresar a la escuela. El experimentador quiere demostrar que el procedimiento ideado por él es más efectivo que el tradicional; para ello, mide el desempeño en la lectura. El plan experimental preliminar consiste en elegir al azar una muestra de 10 niños, así como el método a utilizar (Bidegain, Diaz, y Barreiro, 2009).

**Tabla 9-25. Calificaciones en el test para medir el desempeño en la lectura para los niños de cada uno de los grupos**

| Método aplicado | Calificaciones | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tradicional** | 80 | 85 | 25 | 70 | 90 |
| **Inventado por el investigador** | 95 | 100 | 93 | 110 | 45 |

**10.** Una universidad que acepta estudiantes de preparatorias rurales y urbanas desea saber si los antecedentes distintos contribuyen una diferencia en los promedios generales del primer año. Se presentan los datos de 13 estudiantes de primer ingreso provenientes de una zona rural que son elegidos al azar, así como de 16 estudiantes con antecedentes urbanos. Use la prueba *U* de Mann-Whitney con 5% de nivel de significancia (Levin y Rubin, 2010).

| Tabla 9-26. Promedios generales del primer año de estudiantes provenientes de dos tipos de preparatorias | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rural** | 3.19 | 2.05 | 2.82 | 2.16 | 3.84 | 4.0 | 2.91 | 2.75 |
| **Urbana** | 3.45 | 3.16 | 2.84 | 2.09 | 2.11 | 3.08 | 3.97 | 3.85 |
| **Rural** | 3.01 | 1.98 | 2.58 | 2.76 | 2.94 | | | |
| **Urbana** | 3.72 | 2.73 | 2.81 | 2.64 | 1.57 | 1.87 | 2.54 | 2.62 |

**11.** Para contratar a la mayoría de sus enfermeras, un gran hospital elige candidatas de dos universidades importantes del área. Durante el año pasado, aplicaron un examen a las enfermeras recién graduadas que entran al hospital para determinar qué escuela prepara mejor a sus estudiantes. Con base en las siguientes calificaciones (de 100 puntos posibles), ayude a la oficina de personal del hospital a determinar si las escuelas difieren en calidad. Use la prueba *U* de Mann-Whitney con un nivel de significancia de 10% (Levin y Rubin, 2010: pág. 638).

| Tabla 9-27. Calificaciones del examen de las enfermeras que provienen de dos universidades | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Escuela A** | 97 | 69 | 73 | 84 | 76 | 92 | 90 | 88 | 84 | 87 | 93 | | |
| **Escuela B** | 88 | 99 | 65 | 69 | 97 | 84 | 85 | 89 | 91 | 90 | 87 | 91 | 72 |

**12.** Se realiza la comparación de dos muestras de 10 hombres y 10 mujeres (semejantes en distintas variables extrañas) en un test que mide su autoestima (escala cuantitativa de 0 a 10 puntos). Con base en ello:
**a)** ¿Se puede afirmar que ambas muestras difieren de manera significativa en la autoestima?
**b)** ¿Se puede afirmar que la autoestima de los hombres es significativamente mayor que la de las mujeres?
Hombres: 8, 7, 6, 8, 7, 5, 6, 4, 9, 9.
Mujeres: 8, 6, 5, 6, 5, 4, 4, 4, 6, 4.

**13.** Se realiza un experimento con grupos independientes para ver si el tratamiento A difiere del B. De manera aleatoria se asignan ocho sujetos al tratamiento A y siete al tratamiento B y se reúnen los siguientes datos:
Tratamiento A: 30, 35, 34, 40, 19, 32, 21, 23.
Tratamiento B: 14, 8, 25, 16, 26, 28, 9.
**a)** ¿Cuál es la hipótesis alternativa? Utilice una hipótesis no direccional.
**b)** ¿Cuál es la hipótesis nula?
**c)** Calcule la suma de rangos en ambos grupos.
**d)** ¿Cuál es la conclusión?

# Prueba *H* de Kruskall-Wallis y *F* Friedman

**14.** Un organismo certificado quiere comprobar si existen diferencias en el desempeño laboral de los trabajadores de cuatro empresas dedicadas al calzado. Para ello, se seleccionó al azar a 30 trabajadores de cada empresa y se les aplicó un instrumento creado por una consultoría y que no ha sido validado y estandarizado.

| Tabla 9-28. Desempeño laboral en personal que trabajó en cuatro empresas de calzado | | | |
|---|---|---|---|
| **Desempeño laboral en empresas de calzado** | | | |
| **Andrea** | **Hush Puppies** | **Emyco** | **Flexi** |
| 9 | 7 | 8 | 8 |
| 9 | 6 | 9 | 8 |
| 8 | 5 | 10 | 8 |
| 7 | 6 | 9 | 8 |
| 8 | 7 | 8 | 7 |
| 9 | 5 | | 6 |

**15.** En la Facultad de Psicología se quiere indagar acerca del rendimiento académico; para ello, se evalúa el rendimiento de un grupo de estudiantes en diferentes materias. Para llevar a cabo la evaluación se toman en cuenta las calificaciones de dichos estudiantes, las cuales fueron otorgadas por los profesores de cada una de las materias.

| Tabla 9-29. Rendimiento académico de estudiantes de psicología en diferentes materias | | | |
|---|---|---|---|
| **Rendimiento académico en diferentes materias.** | | | |
| **Estudiantes** | **Estadística** | **Teorías de la personalidad** | **Sistemas** |
| 1 | 10 | 8 | 10 |
| 2 | 8 | 10 | 9 |
| 3 | 10 | 10 | 9 |
| 4 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 9 | 9 | 8 |
| 6 | 6 | 7 | 8 |
| 7 | 10 | 9 | 10 |
| 8 | 9 | 6 | 6 |
| 9 | 1 | 10 | 10 |
| 10 | 9 | 9 | 9 |

# Resultados a los ejercicios de autocomprobación

***Prueba T de rango con signo de Wilcoxon***

**Ejercicio 1**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en la percepción de horas de sueño reparador cuando se utiliza un nuevo medicamento durante 15 días y después de 15 días de tomar un placebo?

- **Paso 1.**

  Hipótesis nula: No existen diferencias entre la percepción de horas de sueño reparador cuando se utiliza un nuevo medicamento durante 15 días y después de 15 días de tomar un placebo:

$$H_0 = Mdn_{sueño\_medicamento} = Mdn_{sueño\_placebo}$$

  Hipótesis alterna: Existen diferencias entre la percepción de horas de sueño reparador cuando se utiliza un nuevo medicamento durante 15 días y después de 15 días de tomar un placebo:

$$H_1 = Mdn_{sueño\_medicamento} \neq Mdn_{sueño\_placebo}$$

- **Paso 2.** $T_+ = 50.5$ y T- = 4.5; $T_{obt} = 4.5$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$:

$$gl = 10;\ T_{crit} = 8.$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso $T_{obt} = 4.5 < T_{crit} = 8$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existen diferencias entre la percepción del sueño reparador cuando los pacientes se tomaban el medicamento (Mdn = 6.95), que cuando tomaron el placebo (Mdn = 5.25) y dichas diferencias son estadísticamente significativas [T(10) = 4.5, $p < 0.05$].

**Ejercicio 2**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en el nivel de creatividad cuando se entrena a resolver un tangrama con material impreso en relación a cuando se enseña con videos?

- **Paso 1.**

  Hipótesis nula: No existen diferencias en el nivel de creatividad cuando se entrena a resolver un tangram con material impreso en relación a cuando se enseña con videos:

$$H_0 = Mdn_{creatividad\_mat.impreso} = Mdn_{creatividad\_video}$$

  Hipótesis alterna: Existen diferencias en el nivel de creatividad cuando se entrena a resolver un tangram con material impreso en relación a cuando se enseña con videos:

$$H_1 = Mdn_{creatividad\_mat.impreso} \neq Mdn_{creatividad\_video}$$

- **Paso 2.** $T_+ = 20.5$ y T- = 84.5; $T_{obt} = 20.5$.

- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$:

$$gl = 14 \text{ (recuerde que se eliminan los empates); } T_{crit} = 21$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 20.5 < T_{crit} = 21$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existen diferencias en el nivel de creatividad que observa un juez en la resolución del tangram cuando se enseñó con material impreso (Mdn = 5.85) en relación a cuando se enseñó mediante videos (Mdn = 5.75). Además, dichas diferencias son estadísticamente significativas [T(14) = 20.5, $p < 0.05$].

**Ejercicio 3**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en la puntuación obtenida en el EGEL antes y después de haber recibido un entrenamiento en la forma de responder dicho examen?

- **Paso 1**

Hipótesis nula: No existen diferencias en la puntuación en el EGEL antes y después de haber recibido un entrenamiento en la forma de responder dicho examen:

$$H_0 = Mdn_{EGEL\_sin\_entrenamiento} = Mdn_{EGEL\_con\_entrenamiento}$$

Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en la puntuación en el EGEL antes y después de haber recibido un entrenamiento en la forma de responder dicho examen:

$$H_1 = Mdn_{EGEL\_sin\_entrenamiento} \neq Mdn_{EGEL\_con\_entrenamiento}$$

- **Paso 2.** $T_+ = 37.5$ y T- = 17.5; $T_{obt} = 17.5$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$:

$$gl = 10;\ T_{crit} = 8.$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 17.5 < T_{crit} = 8$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existen diferencias en la puntuación obtenida en el EGEL antes del entrenamiento (Mdn = 535) y después de éste (Mdn = 585). Además, dichas diferencias son estadísticamente significativas [T(10) = 17.5, $p < 0.05$].

**Ejercicio 4**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en la preferencia de los niños por el sabor del jarabe para la tos (fresa o mango)?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existen diferencias en la preferencia de los niños por el sabor del jarabe para la tos (fresa o mango):

$$H_0 = Mdn_{preferencia\_fresa} = Mdn_{preferencia\_mango}$$

Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en la preferencia de los niños por el sabor del jarabe para la tos (fresa o mango):

$$H_1 = Mdn_{preferencia\_fresa} \neq Mdn_{preferencia\_mango}$$

- **Paso 2.** $T_+ = 5$ y T- = 50; $T_{obt} = 5$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$:

$$gl = 10;\ T_{crit} = 8$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 5 < T_{crit} = 8$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existen diferencias en la preferencia de los niños por el sabor del jarabe para la tos sabor fresa que les gusta más (Mdn = 36.5), que el jarabe sabor mango (Mdn = 17.5), y dichas diferencias son estadísticamente significativas [T(10) = 5, $p < 0.05$].

**Ejercicio 5**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en la cantidad de visitas a las zonas arqueológicas mexicanas de los turistas europeos en comparación con los turistas asiáticos?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existen diferencias en la cantidad de visitas a las zonas arqueológicas mexicanas de los turistas europeos en comparación con los turistas asiáticos:

$$H_0 = Mdn_{visitas\_europeos} = Mdn_{visitas\_asiáticos}$$

Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en la cantidad de visitas a las zonas arqueológicas mexicanas de los turistas europeos en comparación con los turistas asiáticos.

$$H_1 = Mdn_{visitas\_europeos} \neq Mdn_{visitas\_asiáticos}$$

- **Paso 2.** $T_+ = 9$ y T- = 12; $T_{obt} = 9$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$:

$$gl = 6;\ T_{crit} = 0$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq$ Tcrit se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 9 < T_{crit} = 0$. Por lo tanto, se acepta (o retiene) $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se acepta la $H_0$ se puede concluir que no existen diferencias en la cantidad de visitas de turistas europeos (Mdn = 20.5) en comparación con las visitas de los asiáticos (Mdn = 21) a las zonas arqueológicas mexicanas. Es decir, las diferencias no son estadísticamente significativas [T(6) = 9, $p > 0.05$].

**Ejercicio 6**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe un mejor desempeño en los empleados de una tienda después de una capacitación en relaciones humanas?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existe un mejor desempeño en los empleados de una tienda después de una capacitación en relaciones humanas:

$$H_0 = Mdn_{desempeño\_antes} \geq Mdn_{desempeño\_después}$$

Hipótesis alterna: Sí existe un mejor desempeño en los empleados de una tienda después de una capacitación en relaciones humanas (en este caso la hipótesis tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_0 = Mdn_{desempeño\_antes} < Mdn_{desempeño\_después}$$

- **Paso 2.** En este caso, como se cree que el desempeño de los empleados será mejor que antes de la capacitación, la diferencia es después menos antes:

$$T_+ = 21 \text{ y } T- = 0;\ T_{obt} = 0.$$

- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{1\ cola}$:

$$gl = 6;\ T_{crit} = 2$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 0 < T_{crit} = 2$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existe un mejor desempeño en los empleados de una tienda después de una capacitación en relaciones humanas (Mdn = 9), en comparación con el desempeño previo a la capacitación (Mdn = 7); además, el resultado es estadísticamente significativo con [$T(6) = 0$, $p < 0.05$].

**Ejercicio 7**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe una mejor relación marital en parejas después de una intervención psicológica que antes de ésta?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existe una mejor relación marital en parejas después de una intervención psicológica que antes de ésta:

$$H_0 = Mdn_{satisfacción\_antes} \geq Mdn_{satisfacción\_después}$$

Hipótesis alterna: Sí existe una mejor relación marital en parejas después de una intervención psicológica que antes de ésta (en este caso la hipótesis tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{satisfacción\_antes} < Mdn_{satisfacción\_después}$$

- **Paso 2.** En este caso, como se cree que la relación marital será mejor después de la intervención psicológica que antes de ésta, la diferencia es después menos antes:

$$T_+ = 26.5 \text{ y } T- = 1.5;\ T_{obt} = 1.5.$$

- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{1\ cola:}$

$$gl = 7;\ T_{crit} = 3$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 1.5 < T_{crit} = 3$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existe una mejor relación marital en parejas después de una intervención psicológica (Mdn =7), que antes de ésta (Mdn = 10). Además, el resultado es estadísticamente significativo con [$T(7) = 1.5$, $p < 0.05$].

**Ejercicio 8**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en la preferencia de los consumidores por la bebida 1 en comparación con la bebida 2?

- **Paso 1.**

  Hipótesis nula: No existen diferencias en la preferencia de los consumidores por la bebida 1 en comparación con la bebida 2:

$$H_0 = Mdn_{preferencia\_bebida2} = Mdn_{preferencia\_bebida2}$$

  Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en la preferencia de los consumidores por la bebida-1 en comparación con la bebida 2:

$$H_1 = Mdn_{preferencia\_bebida2} \neq Mdn_{preferencia\_bebida2}$$

- **Paso 2.** $T_+ = 28$ y T- = 0; $T_{obt} = 0$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$:

$$gl = 7;\ T_{crit} = 2.$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza Ho. En este caso, $T_{obt} = 0 < T_{crit} = 2$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que existen diferencias en la preferencia por la bebida 1 (Mdn = 8) en comparación con la bebida 2 (Mdn = 6) en consumidores; además, el resultado es estadísticamente significativo con [T(7) = 0, $p < 0.05$].

**Ejercicio 9**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe un mejor nivel de flexibilidad después de haber realizado ejercicios de yoga durante una semana?

- **Paso 1.**

  Hipótesis nula: No existe un mejor nivel de flexibilidad después de haber realizado ejercicios de yoga durante una semana:

$$H_0 = Mdn_{flexibilidad\_después} \geq Mdn_{flexibilidad\_después}$$

  Hipótesis alterna: Sí existe un mejor nivel de flexibilidad después de haber realizado ejercicios de yoga durante una semana (en este caso la hipótesis tiene dirección positiva, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{flexibilidad\_después} \geq Mdn_{flexibilidad\_después}$$

- **Paso 2.** En este caso, como se cree que el desempeño será mejor después de la capacitación que antes de ésta, la diferencia es después menos antes: $T_+ = 97$ y T- = 8; $T_{obt} = 8$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación $\alpha = 0.05_{1\ cola}$:

$$gl = 14;\ T_{crit} = 25$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza Ho. En este caso, $T_{obt} = 0 < T_{crit} = 2$. Por lo tanto, se rechaza $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir un mejor nivel de flexibilidad después de haber realizado ejercicios de yoga (Mdn = 58), que antes de esta práctica (Mdn = 45); además, el resultado es estadísticamente significativo con [T(14) = 8, $p < 0.05$].

**Ejercicio 10**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe una mejor relación entre padres que son trabajadores de una fábrica y sus hijos cuando se les reduce su horario de trabajo?

- **Paso 1.**

  Hipótesis nula: No existe una mejor relación entre padres que son trabajadores de una fábrica y sus hijos cuando se les reduce el horario de trabajo:

$$H_0 = Mdn_{relaciónparental\_h.completo} \geq Mdn_{relaciónparental\_h.reducido}$$

  Hipótesis alterna: Sí existe una mejor relación entre padres que son trabajadores de una fábrica y sus hijos cuando se les reduce su horario de trabajo (en este caso la hipótesis tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{relaciónparental\_h.completo} < Mdn_{relaciónparental\_h.reducido}$$

- **Paso 2.** En este caso se considera que la relación entre padres e hijos es mejor cuando se les otorga el horario reducido a los trabajadores; la diferencia es del horario reducido menos horario completo:

$$T_+ = 48 \text{ y } T- = 123;\ T_{obt} = 48$$

- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{1\ cola:}$

$$gl = 18;\ T_{crit} = 47$$

- **Paso 4.** Si $T_{obt} \leq T_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $T_{obt} = 48 > T_{crit} = 47$. Por lo tanto, se acepta la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se acepta la $H_0$,se concluye que no existe una mejor relación entre padres que son trabajadores de una fábrica y sus hijos cuando los trabajadores tienen una jornada reducida (Mdn =21), con respecto a la condición de jornada completa [Mdn = 19; T(18) = 48, $p < 0.05$].

# Prueba U DE Mann-Whitney

**Ejercicio 11**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe un mayor índice de masa corporal en los niños que tienen una dieta alta en proteínas en comparación con aquellos cuya dieta es baja en proteínas?

- **Paso 1.**

  Hipótesis nula: No existe un mayor índice de masa corporal en los niños que tienen una dieta alta en proteínas en comparación con aquellos cuya dieta es baja en proteínas:

$$H_0 = Mdn_{IMC\_dieta\text{-}baja\text{-}en\text{-}proteínas} \geq Mdn_{IMC\_dieta\text{-}alta\text{-}en\text{-}proteínas}$$

  Hipótesis alterna: Sí existe un mayor índice de masa corporal en los niños que tienen una dieta alta en proteínas en comparación con aquellos cuya dieta es baja en proteínas (en este caso la hipótesis tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{IMC\_dieta\text{-}baja\text{-}en\text{-}proteínas} < Mdn_{IMC\_dieta\text{-}alta\text{-}en\text{-}proteínas}$$

- **Paso 2.** En este caso se considera que el IMC es mayor cuando la dieta es alta en proteínas.

$$U_1 = 8 \text{ y } U_2 = 64;\ U_{obt} = 8$$

- **Paso 3**. Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{1\ cola}$:

$$gl = (9, 8), \text{ dado que } n_1 = 9 \text{ y } n2 = 8;\ U_{crit} = 18$$

- **Paso 4.** Si $U_{obt} \leq U_{crit}$, entonces se rechaza $H_0$. En este caso, $U_{obt} = 8 < U_{crit} = 18$. Por lo tanto, se rechaza la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se concluye que existe un mayor índice de masa corporal en los niños que tienen una dieta alta en proteínas (Mdn = 12.35), en comparación con aquellos cuya dieta es baja en proteínas [Mdn = 10.8; U(9,8) = 8, $p < 0.05$].

**Ejercicio 12**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe un mejor razonamiento abstracto en hombres que en mujeres?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existe un mejor razonamiento abstracto en hombres que en mujeres:

$$H_0 = Mdn_{Razonamiento\text{-}abstracto\_Hombres} \leq Mdn_{Razonamiento\text{-}abstracto\_Mujeres}$$

Hipótesis alterna: Sí existe un mejor razonamiento abstracto en hombres que en mujeres (en este caso la hipótesis tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{Razonamiento\text{-}abstracto\_Hombres} > Mdn_{Razonamiento\text{-}abstracto\_Mujeres}$$

- **Paso 2.** $U_1 = 25.5$ y $U_2 = 38.5$; $U_{obt} = 25.5$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = 0.051 cola (recuerde que 0.05 de una cola es igual a 0.10 de dos colas).

$$gl = (8,8), \text{ dado que } n_1 = 8 \text{ y } n_2 = 8;\ U_{crit} = 15$$

- **Paso 4.** Si $U_{obt} \leq$ Ucrit se rechaza $H_0$. En este caso, $U_{obt} = 25.5 > U_{crit} = 15$. Por lo tanto, se acepta la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se acepta la $H_0$ se concluye que no existe un mejor razonamiento abstracto en hombres (Mdn = 78) que en mujeres [Mdn = 83.5; U(8, 8) = 25.5, p > 0.05].

**Ejercicio 13**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe una orientación política más conservadora en los profesores de teología en comparación con los profesores de psicología?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existe una orientación política más conservadora en los profesores de teología en relación con los profesores de psicología:

$$H_0 = Mdn_{conservadurismo\_profes\text{-}teología} \leq Mdn_{conservadurismo\_profes\text{-}psicología}$$

Hipótesis alterna: Sí existe una orientación política más conservadora en los profesores de teología en relación con los profesores de psicología (en este caso la hipótesis tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{conservadurismo\_profes\text{-}teología} > Mdn_{conservadurismo\_profes\text{-}psicología}$$

- **Paso 2.** $U_1$= 19 y $U_2$ = 77; $U_{obt}$ = 19.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = 0.051 cola (recuerde que 0.05 de una cola es igual a 0.10 de dos colas):

$$gl = (8, 12), \text{ dado que } n_1 = 8 \text{ y } n_2 = 12; U_{crit} = 26$$

- **Paso 4.** Si $U_{obt} \leq U_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $U_{obt} = 19 < U_{crit} = 26$. Por lo tanto, se rechaza la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se concluye que los profesores de teología tienen una orientación política más conservadora (Mdn = 37) que los profesores de psicología [Mdn = 26.5; U(8, 12) = 19, $p < 0.05$].

**Ejercicio 14**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en la habilidad espacial entre las personas zurdas y diestras?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existen diferencias en la habilidad espacial entre las personas zurdas y diestras:

$$H_0 = Mdn_{\text{habilidad-espacial\_zurdos}} = Mdn_{\text{habilidad-espacial\_diestros}}$$

Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en la habilidad espacial entre las personas zurdas y diestras (en este caso la hipótesis no tiene dirección, por lo que es bidireccional o dedos colas):

$$H_1 = Mdn_{\text{habilidad-espacial\_zurdos}} \neq Mdn_{\text{habilidad-espacial\_diestros}}$$

- **Paso 2.** $U_{1 =}$ 23.5 y $U_2$ = 66.5; $U_{obt}$ = 23.5.
- **Paso 3:** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2 \text{ colas}}$:

$$gl = (9,10), \text{ dado que } n_1 = 9 \text{ y } n_2 = 10; U_{crit} = 20$$

- **Paso 4.** Si $U_{obt} \leq U_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $U_{obt} = 23.5 > U_{crit} = 20$. Por lo tanto, se acepta la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se acepta la $H_0$ se concluye que no existen diferencias en la habilidad espacial entre las personas zurdas (Mdn = 84), en comparación con los diestros [Mdn = 72; U(9, 10) = 23.5, $p > 0.05$].

**Ejercicio 15**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe mayor velocidad en la mecanografía de estudiantes del grupo 2 que aprenden con cubreteclado y los estudiantes que utilizan un método tradicional?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existe mayor velocidad en el mecanografiado de los estudiantes del grupo 2 que aprenden con cubreteclado que los estudiantes que utilizan un método tradicional:

$$H_0 = Mdn_{\text{velocidad-método-tradicional}} \geq Mdn_{\text{velocidad-método-cubreteclado}}$$

Hipótesis alterna: Sí existe mayor velocidad en el mecanografiado de los estudiantes del grupo 2 que aprenden con cubreteclado que los estudiantes que utilizan un método tradicional (en este caso la hipótesis sí tiene dirección, por lo que es unidireccional o de una cola):

$$H_1 = Mdn_{velocidad\text{-}método\text{-}tradicional} < Mdn_{velocidad\text{-}método\text{-}cubreteclado}$$

- **Paso 2.** $U_1 = 64.5$ y $U_2 = 78.5$; $U_{obt} = 64.5$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{1\ cola}$:

$$gl = (11, 13), \text{ dado que } n_1 = 11 \text{ y } n_2 = 13;\ U_{crit} = 42$$

- **Paso 4.** Si $U_{obt} \leq U_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $U_{obt} = 64.5 > U_{crit} = 42$. Por lo tanto, se acepta la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se acepta la $H_0$ se concluye que no existe mayor velocidad en el mecanografiado de los estudiantes del grupo 2 que aprenden con cubreteclado (Mdn = 37.2), que los estudiantes del grupo 1 que utilizan un método tradicional [Mdn = 39.2; U(11, 13) = 64.5, p > 0.05].

**Ejercicio 16**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe diferencia en la aceptación de la campaña de un candidato independiente con actitudes machistas entre hombres y mujeres?

- **Paso 1.** Hipótesis nula: No existe diferencia en la aceptación de la campaña de un candidato independiente con actitudes machistas entre hombres y mujeres.

$$H_0: Mdn_{aceptación\_Mujeres} = Mdn_{aceptación\_Hombres}$$

Hipótesis alterna: Si existe diferencia en la aceptación de la campaña de un candidato independiente con actitudes machistas entre hombres y mujeres. (En este caso la hipótesis NO tiene dirección por lo que es bidireccional o de 2 colas).

$$H_0: Mdn_{aceptación\_Mujeres} \neq Mdn_{aceptación\_Hombres}$$

- **Paso 2.** $U_{obt} = 13$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación a = $0.05_{2\ colas}$ $gl = (10,10)$ dado que $n_1 = 10$ y $n_2 = 10$; $U_{crit} = 23$.
- **Paso 4.** Si $U_{0bt} \leq U_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso $U_{obt} = 13 < U_{crit} = 23$. Por lo tanto, se rechaza la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede concluir que SI existe diferencia entre la aceptación que las mujeres tienen al candidato (Mdn =8.5) que la que muestran los hombres (Mdn = 6), siendo estadísticamente mayor la aceptación de las mujeres [U(10,10) = 13, p < 0.05].

**Ejercicio 17**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe diferencia en el desarrollo del lenguaje entre niños de dos años que son educados en casa y niños que son educados en guardería?

- **Paso 1.** Hipótesis nula: No existe diferencia en el desarrollo del lenguaje entre niños de dos años que son educados en casa y niños que son educados en guardería.

$$H_0: Mdn_{lenguaje\_grupo1} = Mdn_{lenguaje\_grupo2}$$

**Hipótesis alterna:** Si existe diferencia en el desarrollo del lenguaje entre niños de dos años que son educados en casa y niños que son educados en guardería. (en este caso la hipótesis NO tiene dirección por lo que es bidireccional

o de 2 colas).

$$H_0: Mdn_{lenguaje\_grupo1} \neq Mdn_{lenguaje\_grupo2}$$

- **Paso 2.** $U_{obt} = 48$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación $a = 0.05_{2\ colas}$, $gl = (10,10)$ dado que $n_1 = 10$ y $n_2 = 10$; $U_{crit} = 23$.
- **Paso 4.** Si $U_{0bt} \leq U_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso $U_{obt} = 48 > U_{crit} = 23$. Por lo tanto, se acepta la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se acepta la $H_0$ se puede concluir que NO existen diferencias significativas en el desarrollo del lenguaje entre niños de dos años que son educados en casa (Mdn = 27) y niños que son educados en guardería [Mdn = 25.5; U(10,10) = 48, $p < 0.05$].

***Pruebas de más de dos condiciones o grupos: H de Kruskall-Wallis y F de Friedman***

**Ejercicio 18**

**Pregunta de investigación:** ¿Existe diferencia en el estrés premenstrual entre tres grupos de mujeres de diferentes edades: 12 a 20 años, 21 a 30 años y 31 a 40 años?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existen diferencias en el estrés premenstrual entre tres grupos de mujeres de diferentes edades: 12 a 20 años, 21 a 30 años y 31 a 40 años:

$$H_0 = Mdn_{estrés\text{-}premenstrual\_12a20} = Mdn_{estrés\text{-}premenstrual\_21a30} = Mdn_{estrés\text{-}premenstrual\_31a40}$$

Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en el estrés premenstrual entre mujeres de al menos dos rangos de edad: Para que no se cumpla la hipótesis nula es suficiente con que dos grupos sean diferentes.

- **Paso 2:** $H_{obt} = 16.765$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación $a = 0.05_{2\ colas}$:

$$gl = k - 1 \text{ dado que se tienen tres grupos } gl = 3 - 1 = 2;\ H_{crit} = 5.99$$

- **Paso 4.** Si $H_{obt} \geq H_{crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $H_{obt} = 16.76 > H_{crit} = 5.99$. Por lo tanto, se rechaza la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se concluye que existen diferencias significativas en el estrés premenstrual entre las mujeres dependiendo del rango de edad mayor [H(2) = 16.77, $p < 0.05$]. Los análisis *post hoc*, de acuerdo con la corrección de Bonferroni demuestran que las mujeres con mayor estrés premenstrual son las de 12 a 20 años (Mdn = 9), seguidas por de las de 21 a 30 (Mdn = 7) y, por último, las que experimentan menor estrés premenstrual son las de 31 a 40 años (Mdn = 4).

**Ejercicio 19**

**Pregunta de investigación:** ¿Existen diferencias en el efecto sobre el nivel de depresión cuando se prescriben tres medicamentos diferentes?

- **Paso 1.**

Hipótesis nula: No existen diferencias en el efecto sobre el nivel de depresión cuando se prescriben tres medicamentos diferentes:

$$H_0 = Mdn_{depresión\_píldora1} = Mdn_{depresión\_píldora2} = Mdn_{depresión\_píldora3}$$

Hipótesis alterna: Sí existen diferencias en el efecto sobre el nivel de depresión cuando se prescriben al menos dos medicamentos diferentes:

Es suficiente con que dos condiciones sean diferentes para que no se cumpla la hipótesis nula.

- **Paso 2.** $F_{r\_obt} = 9.58$.
- **Paso 3.** Se utilizará un nivel de significación $a = 0.05_{2\ colas}$:

$$gl = k - 1, \text{ dado que se tienen tres grupos: } gl = 3 - 1 = 2;\ F_{r\_crit} = 5.99$$

- **Paso 4.** Si $F_{r\_obt} \geq F_{r\_crit}$ se rechaza $H_0$. En este caso, $F_{r\_obt} = 9.58 > F_{r\_crit} = 5.99$. Por lo tanto, se rechaza la $H_0$.
- **Paso 5.** Dado que se rechaza la $H_0$ se concluye que existen diferencias significativas en el efecto sobre el nivel de depresión cuando se prescriben al menos dos medicamentos diferentes [Fr (2) = 9.58, $p < 0.05$].

# Resultados de los ejercicios voluntarios

**1.**

| Enfermos | Tradicional | Nuevas |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 4 |
| 2 | 8 | 6 |
| 3 | 5 | 1 |
| 4 | 2 | 1 |
| 5 | 4 | 1 |

Resultados: dado que se rechaza la $H_0$ podemos concluir que los enfermos reincidentes del virus 1H1N1 son significativamente [T(5) = 0, $p < 0.05$] más resistentes a las cepas tradicionales (Mdn = 5 ) que a las nuevas cepas ( Mdn =1).

**2.** Dado que se acepta la $H_0$ se puede concluir que los alumnos con habilidad lectora baja recordaron el mismo número de objetos (Mdn = 8) que cuando tenían mayor habilidad lectora (Mdn =11), es decir las diferencias no son estadísticamente significativas [T(4) = 10, $p > 0.05$].

**3.** Dado que se rechaza la $H_0$ podemos afirmar que los niños mostraron mayor destreza manual cuando insertaban agujas mientras tocaba música rap (Mdn = 9) que cuando había música instrumental (Mdn =5), es decir las diferencias sí son estadísticamente significativas [T(5) = 15, $p < 0.05$].

**4.** Dado que se acepta la $H_0$ se puede concluir que los alumnos mostraron las mismas habilidades sociales cuando estaban con su grupo (Mdn = 88.5) que cuando estaban con personas diferentes en otro grupo (Mdn = 88.5), como se puede observar las medianas son las mismas por lo tanto no existen diferencias estadísticamente

significativas [T(12) = 27.5, p > 0.05].

**6. a)** Para responder a esta pregunta es útil la preparación de la prueba: dado que el problema trata de identificar si existen diferencias en el número de palabras correctas que se recuerdan en una prueba no estandarizada (medida ordinal) en un diseño relacionado porque son las mismas personas, si hubiesen sido dos condiciones se usarían la T de Wilcoxon, pero como son 3 condiciones las que se comparan la prueba a utilizar es la $F_r$ de Friedman.

**b)** La repetición o reforzamiento incrementa significativamente el número de palabras memorizadas [$F_r$ (2) = 12, p < 0.05].

**c)** Los mejores resultados se dan después de la quinta repetición (Mdn = 31) y los peores en la prismera (Mdn = 16.5).

**d)** Se aprueba la $H_0$.

**7.** La prueba U de Mann-Whitney se utiliza cuando existe una pregunta de investigación de diferencia, la variable que se observa esta medida en una escala ordinal y el diseño es no relacionado, es decir se comparan dos grupos.

**8.** Dado que se rechaza la $H_0$ se puede afirmar existen diferencias significativas entre las puntuaciones en la prueba pisa de desempeño de los niños que provienen de la Escuela Garfield (Mdn = 36.5) y los niños que provienen de la Escuela Mulberry (Mdn = 146, U(4,5)=4, p < 0.05).

**9.** Dado que se acepta la $H_0$ se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre los niños que aprenden con un método tradicional en una tarea que evalúa el desempeño de lectura (Mdn = 80) de los niños que aprenden con el método ideado por el investigador (Mdn = 95, U(5,5)= 4, p > 0.05).

**10.** Se aplicó una prueba U de Mann Whitney, en el análisis se encontró que no existen diferencias en el promedio general de los alumnos que provienen de un contexto rural (Mdn = 2.82) de aquellos que vienen de un contexto urbano (Mdn = 2.77) y esto se puede afirmar con un 5% de error [U (29) = 98, p > 0.05].

**11.** Dado que se acepta la $H_0$ se puede afirmar con un 5% de error que no existen diferencias entre las calificaciones de las enfermeras de la Escuela A (Mdn = 87) y las enfermeras de la Escuela B [Mdn = 88, U (24) = 68.5, p > 0.05].

**12. a)** Podemos afirmar con un 5% de error que sí existen diferencias entre la autoestima de los hombres (Mdn = 7) y la autoestima de las mujeres [Mdn = 5, U (10,10) = 21, p < 0.05].

**b)** Se puede afirmar que la de los hombres tienen significativamente mayor autoestima que las mujeres. En este caso la hipótesis planteada es unidireccional y el valor crítico de $U_{crit}$ = 27.

**13. a)** Existen diferencias entre los resultados del tratamiento A y los del tratamiento B.

**b)** No existen diferencias entre los resultados del tratamiento A y los del tratamiento B.

**c)** $R_A$= 83 y $R_B$ = 37.

**d)** Dado que se rechaza la $H_0$ podemos afirmar que existen diferencias entre los resultados del tratamiento A (Mdn= 31) y los resultados del tratamiento B (Mdn = 16; U(8, 7) =9, p < 0.05).

**14.** En este caso se comparan 4 grupos independientes y la variable observable no proviene de un procedimiento estandarizado por lo que se utiliza la prueba de Kruskal-Wallis. Los resultados señalan que existen diferencias entre al menos dos grupos [H(3)=14.41, p < 0.05]. En las comparaciones pos hoc se encontró que no existen diferencias entre los trabajadores que tuvieron el mayor desempeño laboral que son de la Emyco (Mdn= 9) y Andrea (Mdn= 8.5) en relación con los trabajadores de Hush puppies (Mdn = 9). Los trabajadores de Flexi (Mdn =8) no mostraron un desempeño significativamente diferente de los demás grupos. En las comparaciones el valor de probabilidad corregido fue p < 0.0125.

**15.** En este problema se compara la ejecución del mismo grupo (diseño relacionado) de estudiantes en tres materias distintas, dado que las calificaciones son las que asignan sus profesores y los mecanismos de evaluación no son

estandarizados se obtienen datos en escala ordinal, por lo que se aplica una ANOVA de Friedman. Los resultados de esta prueba señalan que no existen diferencias estadísticamente significativas entre las medianas de las calificaciones en Estadística (mdn = 9), las calificaciones en Teorías de la personalidad (Mdn = 9 ) y Sistemas [Mdn =9 ; Fr(2) = .267, p > 0.05].

# GLOSARIO

**U obtenido:** valor menor calculado en el estadístico.
**U´ obtenido:** valor mayor calculado en el estadístico.
**U crítico:** valor menor buscado en tablas.
**U´ crítico:** valor mayor buscado en tablas.
**T(W) Prueba de Wilcoxon:** prueba no paramétrica de diferencia de rangos para muestras correlacionadas.
**Diferencia:** resta entre datos.

# BIBLIOGRAFÍA


Anderson, D.R., Sweeney, D.J. y Williams, T.A. (2008). *Estadística para administración y economía*. México: Cengage Learning.

Field, A. (2007). *Discovering Statistic Using SPSS*. Brighton: Sage Publication.

Fulgencio, J.M., Chaparro, C.L.A., Chinini, H.Y., Romero, G.G., Tellez, S.G., Barragán, T. N. y Ayala, V.H. (1998). Manual de entrenamiento a terapeutas para el manejo de problemas de desobediencia. México: Facultad de Psicología, UNAM.

Levin, R.I. y Rubin, D.S. (2010). *Estadística para administración y economía*. México: Pearson Educación.

Pagano, R.R. (2008). *Estadística para las ciencias del comportamiento*. México: Cengage Learning.

Pardo, M. A., y y San Martín, R. (2009). *Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud II*. Madrid: Síntesis.

Siegel, S. y Castellan, J. (2009). *Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta*. México: Trillas.

Stevenson, W.J. (1981). *Estadística para administración y economía: Conceptos y aplicaciones*. México: Harla.

Zaragoza, S.R. (2014). *La representación gráfica de las funciones cuadráticas con Excel, una experiencia de aprendizaje en tercero de secundaria* (tesis de maestría inédita). México: UPN.

# Capítulo 10

# PRUEBA DE DIFERENCIA SOBRE UNA VARIABLE CATEGÓRICA NOMINAL (Prueba binomial del signo)

*Mónica Fulgencio Juárez, Roberto Oropeza Tena, Gabriela Navarro Contreras*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo, el lector aprenderá a contrastar dos grupos de personas con respecto a una variable categórica nominal, para lo cual aplicará la prueba binomial del signo (contraste de proporciones). Asimismo, estimará los parámetros y contrastará la hipótesis aplicando los pasos de la inferencia. Después de seleccionar la prueba, comprobará sus supuestos y establecerá la hipótesis. Por último, el lector calculará los estadísticos y su probabilidad de ocurrencia para interpretar los resultados y rechazar o aceptar la hipótesis nula.

## PRUEBA BINOMIAL DEL SIGNO O CONTRASTE SOBRE UNA PROPORCIÓN

En la psicología, así como en diferentes ciencias sociales, la naturaleza del objeto de estudio no permite realizar mediciones precisas, por lo que en muchas ocasiones se trabaja con variables de tipo ordinal y nominal. Por ejemplo, si se solicitara a un grupo de pacientes que emitieran un juicio acerca del tratamiento recibido por su terapeuta, sería muy difícil, e incluso imposible que realizaran una medición exacta de la efectividad de la intervención. Este caso ilustra una situación en la que es posible clasificar y ordenar los datos, pero no es posible cuantificar la respuesta en términos precisos, pues no se podría afirmar, de acuerdo con la evaluación de los pacientes, que la intervención A es más efectiva que la B, con una diferencia de 4 unidades. De hecho sería ilógico pensar que se puede tener una medida exacta a partir de valoraciones subjetivas realizadas por los individuos en situaciones similares a ésta.

No obstante, una gran cantidad de las mediciones que se realizan en psicología son de tipo nominal y ordinal, y se pueden analizar sin perder la riqueza de su naturaleza, por medio de la estadística no paramétrica. En los casos que no es posible realizar una medición cuantitativa, la prueba binomial del signo un análisis paramétrico sencillo resulta de gran utilidad.

Al igual que la prueba de Wilcoxon, la prueba de los signos permite contrastar la hipótesis nula que señala la

igualdad entre dos medianas poblacionales. La diferencia entre ambas pruebas es que Wilcoxon aprovecha la información ordinal de los datos, mientras que en la prueba de los signos sólo se aprovechan las propiedades nominales de los datos (aunque exige un nivel de medida al menos ordinal).

En ambas pruebas se toman dos medidas a un grupo de sujetos o a dos grupos de sujetos relacionados ($X$, $Y$) y se calculan las diferencias entre las dos puntuaciones, desechando las diferencias nulas de cada par de puntuaciones.

La hipótesis de comprobación asume que las dos medidas o puntuaciones del grupo de sujetos proceden de poblaciones con la misma mediana ($Mdn_x = Mdn_y$); por lo tanto, debe verificarse que la probabilidad de las diferencias positivas sea igual a la probabilidad de diferencias negativas, es decir, que la mayoría de las puntuaciones se distribuyan alrededor de la mediana.

$$P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i) = 0.50$$

De acuerdo con los supuestos antes señalados, las variables de interés se distribuyen según el modelo binomial con una mediana de 0.50, por lo que esta distribución se utiliza para conocer las probabilidades asociadas a las diferencias positivas y negativas, y a partir de estas probabilidades se puede contrastar la hipótesis nula:

$$H_0: Mdn_x = Mdn_y$$

Se le llama prueba del signo debido a que se asignan los más y menos en la medición de las variables en lugar de cantidades; y se denomina binomial porque se basa en la distribución binomial para identificar la probabilidad de que ocurran resultados $p$ (signos positivos) y $q$ (signos negativos). Para realizar una prueba del signo cuando el tamaño de la muestra es muy pequeño, nos recurre directamente a una tabla de probabilidades binomiales como la tabla 10-1; pero cuando el tamaño de la muestra es grande, se usa la aproximación normal de la distribución binomial.

**Tabla 10-1. Datos de la distribución binomial**

| N | Número de eventos *P* o *Q* | *P* o *Q* = .50 |
|---|---|---|
| **11** | 0 | .0005 |
| | 1 | .0054 |
| | 2 | .0269 |
| | 3 | .0806 |
| | 4 | .1611 |
| | 5 | .2256 |
| | 6 | .2256 |
| | 7 | .1611 |
| | 8 | .0806 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 9 | .0269 |
| | 10 | .0054 |
| | 11 | .0005 |

En resumen, la prueba binomial del signo permite que el investigador establezca diferencias entre dos mediciones realizadas a una misma muestra de individuos o entre dos muestras relacionadas, esto es, cuando se someten a comparación dos grupos de sujetos distintos pero que fueron igualados en las variables extrañas que tienen un efecto sobre la variable independiente. Los supuestos que subyacen a esta prueba es que la variable tenga continuidad y que sea por lo menos de nivel de medición ordinal, aun cuando sólo se aprovechen sus propiedades de clasificación o nominales. Además, es una prueba que no exige una forma de la distribución de las diferencias y que puede ser aplicada en muestras pequeñas o grandes.

# PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Suponga que se lleva a cabo un estudio para comparar el nivel de procesamiento de la memoria de un grupo de niños que padecen trastorno por déficit de atención. Dichas comparaciones se realizaron en función del tipo de procesamiento (visual y fonológico). Para ello, el mismo grupo de niños fue sometido a dos tareas de reconocimiento: en la primera tarea se les dio una lista de 16 palabras impresas (reconocimiento visual) y en la segunda tarea se les leyó otra lista de 16 palabras (reconocimiento fonológico); y en ambas tareas se les pidió que escribieran las palabras que recordaran con el fin de contabilizar el número de palabras que memorizaron. En la tabla 10-2 se presentan las puntuaciones obtenidas en cada tarea, así como la diferencia en el número de palabras recordadas.

**Tabla 10-2. Puntuaciones obtenidas en dos tareas de procesamiento de memoria**

| Niño | Reconocimiento visual | Reconocimiento fonológico | Diferencias |
|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 13 | +4 |
| **2** | 9 | 11 | +2 |
| **3** | 11 | 10 | –1 |
| **4** | 7 | 9 | +2 |
| **5** | 10 | 12 | +2 |
| **6** | 8 | 10 | +2 |
| **7** | 7 | 9 | +2 |
| **8** | 8 | 9 | +1 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9** | 9 | 11 | +2 |
| **10** | 12 | 12 | 0 |
| **11** | 7 | 9 | +2 |
| **12** | 7 | 12 | +5 |

Nótese que aun cuando se tengan datos con nivel de medición ordinal, en la columna de **diferencias** la prueba del signo sólo clasifica los resultados de acuerdo con su dirección o signo, sin tomar en cuenta la magnitud de las diferencias. Esto significa que sólo se considera la naturaleza nominal de las variables y que se omite información que hace la prueba menos sensible para identificar diferencias entre las dos condiciones.

# ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS

De acuerdo con los supuestos señalados anteriormente, se asume que las diferencias en las puntuaciones de las dos condiciones a las que fueron sometidos los niños con trastorno por déficit de atención, se distribuyen según el modelo binomial, con una mediana de 0.50; es decir, la hipótesis nula plantea que no habrá diferencias entre las puntuaciones obtenidas en las dos condiciones: reconocimiento visual *versus* reconocimiento fonológico.

# PASOS DE LA INFERENCIA

## Selección de la prueba, comprobación de supuestos

La selección de la prueba es apropiada, ya que los investigadores quieren comprobar si hay diferencias en las puntuaciones obtenidas en las condiciones de reconocimiento visual y reconocimiento fonológico, en cuanto al número de palabras recordadas por los niños. Por otro lado, el único supuesto que subyace para su utilización es que las variables sean continuas y tengan al menos un nivel de medición ordinal. En este sentido se puede decir que se cumple el supuesto, dado que las puntuaciones se refieren al número de palabras recordadas por los niños.

## Establecer las hipótesis estadísticas

La hipótesis nula de la prueba binomial del signo establece que la probabilidad de que las diferencias positivas sea igual a la probabilidad de diferencias negativas, es decir, que la mayoría de las puntuaciones se distribuyan alrededor de la mediana.

$$H_0: P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i) = 0.5$$

Esto implica que la probabilidad de las diferencias positivas es igual a la probabilidad de las diferencias negativas entre las dos variables, esto quiere decir que la variable independiente que en nuestro caso es el tipo de tarea de

reconocimiento (visual *versus* fonológico) no hace diferencias en la variable dependiente (número de palabras recordadas).

De no comprobarse esta hipótesis, se aceptaría la hipótesis alterna ($H_1$) que señala la existencia de diferencias en el número de palabras recordadas, dependiendo del tipo de tarea de reconocimiento.

$$H_1: P(X_i < Y_i) \neq P(X_i > Y_i) \neq 0.5$$

# Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico

Como ya se explicó, la probabilidad asociada de ocurrencia para la prueba del signo está dada por la distribución binomial para $P = Q = 0.5$. El nivel de significación es igual o menor a .05, es decir, $\alpha \leq .05$.

Si la probabilidad obtenida $\leq \alpha$, se rechaza $H_0$

Si la probabilidad obtenida $> \alpha$, se acepta $H_0$

Sin embargo, con muestras grandes, cuando $N$ es mayor que 25 se emplea la aproximación normal a la distribución binomial. En este caso, la hipótesis nula supone que el valor de $z$ está distribuido aproximadamente en forma normal.

La prueba binomial del signo puede ser aplicada a muestras pequeñas y grandes. La única diferencia en el procedimiento es el método que se utiliza para determinar la probabilidad asociada con la ocurrencia, conforme a $H_0$ de un valor tan extremo como el valor observado de $x$.

En el caso del cálculo para muestras con una $N$ menor o igual a 25, la probabilidad asociada a la ocurrencia se consultará en la tabla de la distribución binomial (véase la tabla G del Apéndice). Pero si $N$ es mayor que 25, se calculará el valor de $z$, para posteriormente consultar su probabilidad asociada con la ocurrencia en la tabla de la distribución $z$ (véase tabla H del Apéndice).

A continuación se explicará, por separado, el cálculo de los estadísticos de la prueba binomial del signo para muestras pequeñas y grandes.

### *Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad*

### Cálculo de la prueba binomial del signo para muestras pequeñas ≤ 25.

Los pasos para calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad son:

- **Paso 1. Calcular el número de signos positivos y negativo:** para obtener el resultado de la prueba del signo, el primer paso consiste en calcular el número de signos positivos y negativos, así como el número de empates o ligas.

  Como se puede apreciar en la tabla 10-2, el número de puntuaciones pares es de 12 ($N = 12$). En la columna de diferencias se observa que hay 10 signos positivos, un signo negativo y un 0, dado que el niño 10 obtuvo la misma puntuación en las dos tareas de reconocimiento.

  Cuando no existen diferencias en un par de puntuaciones, se dice que hay un empate o liga y todos estos casos de empate se eliminan del análisis al restarlos a $N$. En el ejemplo descrito, de 12 niños evaluados, uno obtuvo la misma puntuación en las dos tareas, lo que representa un empate, por lo que $N = 12 - 1 = 11$.

- **Paso 2. Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$:** para determinar la

probabilidad de ocurrencia se consultará la Tabla 10-1 de la distribución binomial, la cual muestra la *p* de una cola asociada con un valor tan pequeño como el valor observado de *x*, que es el **número mayor de signos** de acuerdo con el tamaño de la muestra *N*. En caso de tener una hipótesis de dos colas, se duplica el valor de *p* que resulte en la tabla.

Así, en el ejemplo hay una *N* de 11, y este valor resultó de los 12 niños evaluados, menos el niño 10 que obtuvo un empate, lo cual indica que no tuvo diferencia entre sus puntuaciones y por lo tanto se elimina este caso.

En la primera columna de la tabla de distribución binomial se localiza el valor de *N*, que es 11; ahora, según los datos de la tabla 10-2, hay 10 puntuaciones con signo positivo y sólo una con signo negativo, lo cual indica que el **número mayor de signos** es 10; por lo tanto, es necesario calcular cuál es la probabilidad de obtener 10 signos positivos o más.

Como se puede ver en la tabla 10-1, las probabilidades de obtener un signo positivo o más, serían las sumas de las probabilidades de 10 y 11 (.0054 y .0005, respectivamente). Sin embargo, es preciso aclarar que, en el ejemplo, la prueba de hipótesis es de dos colas debido a que el investigador desea conocer si hay diferencias entre las dos condiciones (reconocimiento visual *vs*. fonológico) y no señala la dirección de las diferencias, es decir, en cuál de las dos condiciones se obtendrán las puntuaciones más altas. Cuando la prueba de hipótesis es de dos colas, para obtener la probabilidad asociada de ocurrencia de $H_0$ es necesario sumar las probabilidades de que ocurran 10 y 11, y multiplicar el resultado por 2.

$$
\begin{aligned}
&P \text{ (10 o 11 signos positivos)} \\
&= p \text{ (10 o 11 signos positivos)} \times 2 \\
&= [p(10) + p(11)] \times 2 \\
&= (.0005 + .0054) \times 2 \\
&= 0\ .0118
\end{aligned}
$$

Para rechazar la $H_0$ que se refiere a que la tarea de reconocimiento (visual *versus* fonológico) no tiene un efecto en el número de palabras recordadas, mientras que el valor de *p* debe ser igual o menor a la probabilidad asociada de ocurrencia .05, es decir, $p \leq = .05$.

En este caso, se obtuvo que $p = 0.019_{\ 2\ \text{colas}} < .05$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna que señala que el tipo de tarea de reconocimiento tiene un efecto en el número de palabras recordadas por los niños.

**Cálculo de la prueba binomial del signo para muestras grandes > 25.**

Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad, según los siguientes pasos:

- **Paso 1. Calcular el número de signos positivos y negativos:** este paso, que es igual al descrito para el cálculo de la prueba del signo con muestras pequeñas, consiste en contar el número de signos positivos y negativos que se obtuvieron de las diferencias entre las puntuaciones.
- **Paso 2. Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$:** cuando el tamaño de la muestra sea mayor que 25, se calcula el valor de *z* usando la siguiente fórmula:

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - (0.5)\,N}{(0.5)\,\sqrt{N}}$$

Donde:

$x$ = Número mayor de signos positivos o negativos.

$N$ = Número total de eventos válidos, o bien, el número total de pares de puntuaciones menos los empates.

*$x + 0.5$ se usa cuando $x < (0.5)N$*; mientras que *$x - 0.5$* se usa cuando *$x > (0.5)N$*.

Como se observa en la tabla 10-3, hay 30 casos o eventos, de los cuales dos son empates, pues tienen una diferencia de 0, por lo que se eliminan. De tal manera que $N = 28$. De estos 28 casos válidos, dos obtuvieron diferencias negativas y 26 obtuvieron diferencias positivas.

Sustituyendo la fórmula:

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - (0.5)\,N}{(0.5)\,\sqrt{N}}$$

Se tiene que el número mayor de signos es $x = 26$ y el número total de casos válidos es $N = 28$; además, se utilizará $x - .5$, ya que $x > 0.5N$.

$$z = \frac{(26 - 0.5) - (0.5)\,28}{(0.5)\,\sqrt{28}}$$

$$z = \frac{25.5 - 14}{(0.5)\;\;5.292}$$

$$z = 4.346$$

**Tabla 10-3. Puntuaciones obtenidas en dos tareas de procesamiento de memoria**

| Niño | Reconocimiento visual | Reconocimiento fonológico | Diferencia | Niño | Reconocimiento visual | Reconocimiento fonológico | Dife |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 6 | 12 | +6 | 16 | 9 | 13 | - |
| **2** | 9 | 11 | +2 | 17 | 7 | 11 | - |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 5 | 12 | +7 | 18 | 12 | 15 | - |
| **4** | 8 | 13 | +5 | 19 | 9 | 15 | - |
| **5** | 7 | 14 | +7 | 20 | 11 | 14 | - |
| **6** | 9 | 15 | +6 | 21 | 14 | 11 | - |
| **7** | 12 | 16 | +4 | 22 | 8 | 11 | - |
| **8** | 8 | 12 | +4 | 23 | 6 | 9 | - |
| **9** | 11 | 12 | +1 | 24 | 10 | 16 | - |
| **10** | 10 | 10 | 0 | 25 | 12 | 12 | |
| **11** | 9 | 14 | +5 | 26 | 14 | 12 | - |
| **12** | 8 | 12 | +4 | 27 | 7 | 13 | - |
| **13** | 9 | 14 | +5 | 28 | 6 | 10 | - |
| **14** | 13 | 16 | +3 | 29 | 9 | 12 | - |
| **15** | 10 | 14 | +4 | 30 | 8 | 14 | - |

## DECISIÓN DE ACEPTACIÓN O RECHAZO DE LA $H_0$

La hipótesis nula señala que el valor de $z_{obt}$ está distribuido de forma normal para *N*. En la Tabla I del Apéndice, la distribución *z* abarca las *p* de una cola asociadas con valores tan extremos como diferentes valores de *z*, ya que los valores tabulados son para pruebas de una cola. El valor de *p* que resulta en la Tabla H del Apéndice se duplica para una prueba de dos colas.

En este caso, al consultar la tabla de valores de *z*, la probabilidad de que la hipótesis nula de $z \geq 4.346$ es $p = (.00003)\ 2 = .00006$.

Como el valor de *p* (.00006) es menor que 0.01, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna, la cual plantea que el tipo de tarea de reconocimiento tiene un efecto en el número de palabras recordadas por los niños con TDA.

## REPRESENTACIÓN E INTERPRETACIÓN

De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba binomial del signo (tanto en la muestra pequeña como en la grande), se rechazó la hipótesis de nulidad, lo cual indica que existen diferencias en las puntuaciones obtenidas en las dos condiciones de reconocimiento a las que fueron sometidos los niños con TDA. Esto quiere decir que el tipo de tarea influye en la capacidad de memoria de los niños, de manera específica en el número de palabras recordadas por ellos.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

### Ejercicio 1

**Presentación del problema.** Un investigador tiene interés en corroborar la efectividad de una intervención cognitivo-conductual para disminuir el nivel de dependencia a la cocaína de un grupo de usuarios. Para ello, evalúa el nivel de dependencia con una escala psicométrica sobre el abuso de drogas, la cual proporciona un diagnóstico del nivel de dependencia y lo clasifica como leve, moderado, fuerte y severo. Dicha escala fue aplicada antes y después de la intervención, los resultados se muestran en la tabla 10-1.

**Tabla 10-1. Puntuaciones del nivel de dependencia de los consumidores antes y después del tratamiento**

| Sujetos | Antes Tx | Después Tx | Diferencias | Sujetos | Antes Tx | Después Tx | Diferencias |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 18 | 14 | – | **14** | 15 | 8 | – |
| **2** | 12 | 15 | + | **15** | 16 | 14 | – |
| **3** | 15 | 16 | + | **16** | 18 | 16 | – |
| **4** | 11 | 12 | + | **17** | 13 | 12 | – |
| **5** | 19 | 13 | – | **18** | 17 | 16 | – |
| **6** | 17 | 11 | – | **19** | 16 | 15 | – |
| **7** | 15 | 11 | – | **20** | 19 | 15 | – |
| **8** | 18 | 14 | – | **21** | 17 | 12 | – |
| **9** | 14 | 12 | – | **22** | 15 | 13 | – |
| **10** | 19 | 16 | – | **23** | 18 | 19 | + |
| **11** | 20 | 19 | – | **24** | 14 | 16 | + |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **12** | 17 | 16 | – | **25** | 19 | 12 | – |
| **13** | 14 | 10 | – | **26** | 20 | 11 | – |

**Lógica de la solución.** La prueba binomial del signo es pertinente para este problema, ya que los datos se pueden clasificar con un nivel nominal, como en los casos que la intervención disminuyó el nivel de dependencia (éxitos) y aquellos en los que la intervención aumentó el nivel de dependencia (fracasos). Además, el interés del investigador es comprobar si el tratamiento tiene un efecto sobre el nivel de dependencia. Y dado que la prueba no exige ningún otro supuesto, se puede aplicar.

### Ejercicio 2

**Presentación del problema.** Se realiza una campaña para prevenir el tabaquismo en una población de adolescentes, y para ello se imparte un curso de cuatro sesiones para dar a conocer a los adolescentes los efectos que tiene el consumo de tabaco en el organismo a corto, mediano y largo plazo; también se evalúan las actitudes hacia el consumo de tabaco antes y después del curso por medio de un cuestionario de actitudes. En la tabla 10-2 de los ejercicios se reportan los datos obtenidos. Los investigadores esperan que después del curso, la actitud sea más negativa hacia el consumo de tabaco, en este caso se espera que las puntuaciones disminuyan.

**Tabla 10-2. Actitud hacia el consumo de tabaco antes y después del curso**

| Sujetos | Antes | Después | Diferencias | Sujetos | Antes | Después | Diferencias |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 6 | + | **16** | 2 | 5 | + |
| **2** | 5 | 8 | + | **17** | 4 | 6 | + |
| **3** | 4 | 5 | + | **18** | 5 | 7 | + |
| **4** | 6 | 8 | + | **19** | 3 | 5 | + |
| **5** | 4 | 6 | + | **20** | 4 | 8 | + |
| **6** | 4 | 8 | + | **21** | 6 | 4 | - |
| **7** | 5 | 7 | + | **22** | 4 | 6 | + |
| **8** | 3 | 6 | + | **23** | 3 | 5 | + |
| **9** | 7 | 9 | + | **24** | 5 | 7 | + |
| **10** | 3 | 7 | + | **25** | 3 | 3 | 0 |
| **11** | 3 | 9 | + | **26** | 4 | 7 | + |
| **12** | 5 | 6 | + | **27** | 4 | 8 | + |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **13** | 2 | 7 | + | **28** | 2 | 3 | + |
| **14** | 6 | 8 | + | **29** | 1 | 3 | + |
| **15** | 2 | 2 | 0 | **30** | 4 | 4 | 0 |

**Lógica de la solución.** La prueba binomial del signo es pertinente para este problema, ya que permite clasificar los datos con un nivel nominal; por ejemplo, los casos en que el curso aumentó una actitud positiva (éxitos) y aquellos en que el curso disminuyó la actitud positiva (fracasos). Además, se tiene una hipótesis de comparación de un grupo relacionado con dos mediciones.

## Ejercicio 3

**Presentación del problema.** Un investigador considera que realizar una intervención temprana con bebés prematuros puede mejorar su desarrollo motor. Por ello, selecciona una muestra de varones que nacieron en la semana 32 del embarazo por cesárea, que obtuvieron las mismas calificaciones en Apgar, cuyas madres tienen la misma edad, pertenecen al mismo nivel socioeconómico y no tuvieron complicaciones durante el embarazo, salvo que se les adelantó el parto. Una vez seleccionada la muestra de 26 niños, son asignados al azar a una de dos condiciones: el grupo experimental que recibe estimulación temprana y el grupo control que sólo es evaluado. Después de la intervención, el desarrollo motor de ambos grupos de bebés se evalúa mediante una escala de desarrollo infantil que determina si el niño, de acuerdo con su edad, presenta o no 20 indicadores de desarrollo motor grueso y fino. Los resultados se muestran en la tabla 10-3.

**Tabla 10-3. Desarrollo motor de bebés prematuros**

| Sujetos | Grupo experimental | Grupo de control | Diferencias | Sujetos | Grupo experimental | Grupo de control | Diferencias |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 20 | 20 | 0 | **14** | 20 | 20 | 0 |
| **2** | 19 | 17 | – | **15** | 17 | 19 | + |
| **3** | 18 | 17 | – | **16** | 19 | 19 | 0 |
| **4** | 20 | 20 | 0 | **17** | 20 | 19 | – |
| **5** | 17 | 20 | + | **18** | 19 | 20 | + |
| **6** | 19 | 20 | + | **19** | 18 | 18 | 0 |
| **7** | 20 | 20 | 0 | **20** | 20 | 19 | – |
| **8** | 18 | 18 | 0 | **21** | 18 | 18 | 0 |
| **9** | 19 | 20 | + | **22** | 19 | 20 | + |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 17 | 19 | + | **23** | 20 | 19 | – |
| **11** | 20 | 18 | – | **24** | 20 | 19 | – |
| **12** | 20 | 20 | 0 | **25** | 20 | 20 | 0 |
| **13** | 17 | 20 | + | **26** | 20 | 17 | – |

**Lógica de la solución.** La prueba binomial del signo es pertinente para este problema, ya que se tiene una hipótesis de comparación de un grupo relacionado con dos condiciones y una variable de orden que se clasifica como de nivel nominal.

### Ejercicio 4

**Presentación del problema.** Se realizó una investigación para comparar diferencias entre los reportes de un grupo de niños y sus madres en relación con sus hábitos de consumo de alimentos con alto nivel de azúcar como golosinas, postres y bebidas azucaradas. Para ello, se utilizó un cuestionario de frecuencia de consumo de determinados alimentos, el cual proporciona el número de alimentos que consumió el niño durante la semana anterior a la evaluación. Esto se realizó de acuerdo con el reporte de los niños y sus madres, quienes fueron evaluados de manera separada.

**Tabla 10-4. Frecuencia de consumo de alimentos con alto nivel de azúcar reportada por madre e hijo**

| Pareja | Reporte de la madre | Reporte del hijo(a) | Diferencias |
|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 13 | +5 |
| **2** | 9 | 11 | +2 |
| **3** | 11 | 10 | –1 |
| **4** | 7 | 9 | +2 |
| **5** | 9 | 12 | +3 |
| **6** | 10 | 10 | 0 |
| **7** | 7 | 9 | +2 |
| **8** | 8 | 9 | +1 |
| **9** | 9 | 11 | +2 |
| **10** | 12 | 12 | 0 |

**Lógica de la solución.** La prueba binomial del signo es pertinente para este problema, ya que se tiene una hipótesis

de comparación de un grupo relacionado; además, aunque se trata de observaciones de diferentes individuos (madres e hijos), se pueden considerar como datos relacionados debido a que forman una díada y las frecuencias de consumo se encuentran relacionadas porque proceden de la misma familia. En este caso, la variable dependiente es la frecuencia de consumo de alimentos azucarados y el objetivo es determinar si ésta varía dependiendo de quién proporcione la información.

### Ejercicio 5

**Presentación del problema.** Un investigador supone que el nivel de estrés percibido por un grupo de personas varía de acuerdo con las redes de apoyo social que tenga, pues considera que los individuos que cuentan con más redes de apoyo social tendrán puntuaciones más bajas de estrés percibido. Para corroborar su hipótesis, el investigador aplicó, a una muestra de personas, una escala psicométrica que evalúa las redes de apoyo social, con el fin de clasificarlas en dos grupos: redes de apoyo social altas y redes de apoyo social bajas. Posteriormente les aplicó una escala que evalúa el estrés percibido. Cabe señalar que para evaluar el efecto de la variable independiente, que en este caso es la cantidad de redes de apoyo social, la muestra fue igualada en diferentes variables extrañas que son pertinentes para el estudio.

**Tabla 10-5. Estrés percibido en función de la cantidad de redes de apoyo social**

| Sujetos | Redes de apoyo social bajas | Redes de apoyosocial altas | Diferencias |
|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 8 | –7 |
| **2** | 12 | 4 | –8 |
| **3** | 14 | 6 | –8 |
| **4** | 13 | 7 | –6 |
| **5** | 14 | 9 | –5 |
| **6** | 13 | 5 | –8 |
| **7** | 15 | 6 | –9 |
| **8** | 12 | 7 | –5 |
| **9** | 14 | 5 | –9 |
| **10** | 15 | 7 | –8 |

**Lógica de la solución.** La prueba binomial del signo es pertinente para este problema, ya que se tiene una hipótesis de comparación de dos grupos igualados; en este caso, la variable dependiente sería el estrés percibido y la variable independiente la cantidad de redes de apoyo social.

## Ejercicios voluntarios

**1.** Suponga que quiere comprobar la hipótesis de que ver televisión durante la hora de la comida influye en la cantidad de alimento que ingieren los niños. Para ello, selecciona una muestra de 10 niños y los somete a dos condiciones: la primera es comer sin ver la televisión y la segunda es comer viendo televisión. En ambas ocasiones se ofrecen croquetas de atún a los niños y al final de cada sesión se cuenta el número de croquetas que consumieron. Los resultados se presentan en la tabla 10-6 de esta sección.

**Tabla 10-6. Ingesta de alimento viendo televisión y sin verla**

| Participantes | Condición 1<br>Viendo TV | Condición 2<br>Sin ver TV |
|---|---|---|
| **1** | 6 | 5 |
| **2** | 5 | 3 |
| **3** | 7 | 4 |
| **4** | 8 | 6 |
| **5** | 6 | 4 |
| **6** | 6 | 5 |
| **7** | 6 | 3 |
| **8** | 6 | 6 |
| **9** | 7 | 4 |
| **10** | 8 | 5 |

**a)** De las pruebas estadísticas presentadas en este capítulo, ¿cuál es la más pertinente para analizar los datos en este caso?

**b)** Señale el resultado y su interpretación.

**2.** Se realiza un experimento para comprobar si la relajación permite reducir el dolor en pacientes que padecen fibromialgia; para ello, se selecciona un grupo de 15 mujeres con este padecimiento, quienes son asignadas a dos condiciones: de relajación y placebo. Los resultados muestran las puntuaciones obtenidas en una escala subjetiva de la evaluación del dolor, la cual se aplicó después del tratamiento. Las puntuaciones altas indican más dolor.

**a)** ¿Cuál prueba estadística es más pertinente para analizar los datos?

**b)** Señale el resultado y su interpretación.

**Cuadro 10-7. Evaluación del dolor en condiciones de relajación y placebo**

| | Condición | |
|---|---|---|
| **Paciente** | **Relajación** | **Placebo** |

| | | |
|---|---|---|
| **1** | 4 | 7 |
| **2** | 6 | 5 |
| **3** | 3 | 8 |
| **4** | 4 | 7 |
| **5** | 4 | 6 |
| **6** | 6 | 8 |
| **7** | 5 | 7 |
| **8** | 3 | 9 |
| **9** | 5 | 8 |
| **10** | 4 | 6 |
| **11** | 6 | 6 |
| **12** | 2 | 6 |
| **13** | 4 | 7 |
| **14** | 3 | 5 |
| **15** | 3 | 6 |

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

**Ejercicio 1**

**Cálculos para la solución**

**a)** Calcular el número de signos positivos y negativos.
**b)** En la tabla 10-1 se observa que hay cinco diferencias positivas y 21 diferencias negativas.

Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$.

En este ejemplo, el tamaño de la muestra es mayor que 25, por lo que se calcula el valor de $z$ con la siguiente fórmula:

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - (0.5)N}{(0.5)\sqrt{N}}$$

$x + 0.5$ se usa cuando $x < (0.5)N$ y $x - 0.5$ se usa cuando $x > (0.5)N$

Para sustituir, el número mayor de signos es $x = 21$ y número total de casos válidos es $N = 26$; además, se utilizará $x - 5$, ya que $x > 0.5$N.

$$z = \frac{(21 - 0.5) - (0.5)\ 26}{(0.5)\ \sqrt{26}}$$

$$z = \frac{20.5 - 13}{(0.5)\ \ 5.099}$$

$$z = \frac{7.5}{2.549}$$

$$z = 2.94$$

**Resultado y su representación**

Una vez obtenido el resultado se debe consultar la tabla de valores de $z$, la cual muestra que la probabilidad de que la hipótesis nula de $z \geq 2.94$ es $p = (.0019)$, que al ser multiplicada por 2, debido a que se tiene una hipótesis bidireccional o de dos colas, se obtiene $p = .0038$.

Como el valor de $p$ (.0038) es menor que $\alpha = 0.01$, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna, la cual señala que hay diferencias en el nivel de dependencia de los usuarios.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

De acuerdo con los resultados, se puede decir que hay diferencias en las puntuaciones del nivel de dependencia de los usuarios antes y después de la intervención cognitivo conductual ($z = 2.94$; $p = .01$). Sin embargo, es importante señalar que no se conoce la magnitud de las diferencias para afirmar que éstas son realmente significativas y que la intervención es efectiva para tratar problemas de dependencia a la cocaína.

**Ejercicio 2**

**Cálculos para la solución**

**a)** Calcular el número de signos positivos y negativos. En la tabla 10-2 se observa que hay 26 diferencias positivas, una diferencia negativa y tres empates. Como ya se dijo, los empates se eliminan, por lo que el número de observaciones o eventos válidos será de 27.

**b)** Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$.

En este ejemplo el tamaño de la muestra es mayor que 25, por lo que se calculará el valor de $z$ con la siguiente fórmula:

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - (0.5)\,N}{(0.5)\,\sqrt{N}}$$

$x + 0.5$ se usa cuando $x < (0.5)N$ y $x - 0.5$ se usa cuando $x > (0.5)N$

Para sustituir, el número mayor de signos es $x = 26$ y número total de casos válidos es $N = 27$; además, se utilizará $x - 5$, ya que $x > 0.5N$.

$$z = \frac{(26 - 0.5) - (0.5)\,27}{(0.5)\,\sqrt{27}}$$

$$z = \frac{25.5 - 13.5}{(0.5)\;\; 5.196}$$

$$z = \frac{12}{2.598}$$

$$z = 4.619$$

**Resultado y su representación**

Una vez obtenido el resultado es necesario consultar la tabla de valores de $z$, la cual muestra que la probabilidad de que la hipótesis nula de $z \geq 4.619$ es $p = (.00003)$; sin embargo, esta vez no se multiplica por 2 debido a que la hipótesis es de una cola, pues los investigadores suponen la dirección de los datos, al esperar que la actitud sea más positiva después del curso.

Como el valor de $p$ (.00003) es menor que $\alpha = 0.000$, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna, la cual plantea que hay diferencias en la actitud hacia el tabaquismo antes y después del curso.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

Con base en los resultados obtenidos se puede decir que el curso sobre tabaquismo tiene un efecto en el cambio de actitud hacia el consumo de tabaco en los jóvenes, pues se encontraron diferencias estadísticamente significativas antes y después de éste ($z = 4.619$; $p = .000$). Esto concuerda con la literatura acerca de la prevención del tabaquismo, la cual señala que los conocimientos generan una actitud más favorable. Sin embargo, los resultados se deben tomar con precaución, pues esta prueba no señala la magnitud de las diferencias observadas.

**Ejercicio 3**

**Cálculos para la solución**

**a)** Calcular el número de signos positivos y negativos. En la tabla 10-3 se observa que hay ocho diferencias positivas, ocho diferencias negativas y 10 empates; como ya se mencionó, los empates se eliminan, por lo que el número de observaciones o eventos válidos será de 16.

**b)** Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$. En este ejemplo el tamaño de la muestra es mayor que 25, por lo que se calculará el valor de $z$ con la siguiente fórmula:

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - (0.5)\,N}{(0.5)\,\sqrt{N}}$$

$x + 0.5$ se usa cuando $x \geq (0.5)N$ y $x - 0.5$ se usa cuando $x > (0.5)N$

Para sustituir, el número mayor de signos es $x = 8$ y número total de casos válidos es $N = 16$; además, se utilizará $x - 5$, ya que $x > 0.5\,N$.

$$z = \frac{(8 + 0.5) - (0.5)\,16}{(0.5)\,\sqrt{16}}$$

$$z = \frac{8.5 - 8}{(0.5)\,4}$$

$$z = \frac{0.5}{2}$$

$$z = 0.25$$

**Resultado y su representación**

Una vez obtenido el resultado, se debe consultar la tabla de valores de $z$, la cual muestra que la probabilidad de que la hipótesis nula de $z = 0.25$ es $p = .3632$; sin embargo, esta vez no se multiplica por 2 debido a que la hipótesis es de una cola, pues los investigadores suponen la dirección de los datos al esperar que la actitud sea más positiva después del curso.

Como el valor de $p$ (.3632) es mayor que $\alpha = 0.05$, se acepta la hipótesis nula y se rechaza la hipótesis alterna, lo cual indica que la intervención temprana con los prematuros no provocó diferencias en el desarrollo motor de los bebés sometidos a la intervención en comparación con los bebés del grupo control.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

De acuerdo con los resultados, se puede ver que la intervención temprana con los bebés prematuros no hace una

diferencia significativa, lo cual quizá se deba a que la única condición que existía en la muestra era el hecho de haber sido producto de un embarazo pretérmino, lo cual no es una condición determinante que represente un factor de retraso en el desarrollo motor de los infantes.

## Ejercicio 4

### Cálculos para la solución

**a)** Calcular el número de signos positivos y negativos. Para obtener el resultado de la prueba del signo, el primer paso es calcular el número de signos positivos y negativos, así como el número de empates o ligas.

Como se puede apreciar en la tabla 10-4, en el ejemplo descrito, el número de puntuaciones pares es de 10 ($N$ = 10). En la columna de **Diferencias** se observa que hay siete signos positivos, uno negativo y dos empates. De las 10 parejas evaluadas se eliminan los dos empates, por lo que $N = 8$.

**b)** Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$. Para determinar la probabilidad de ocurrencia se consultará la tabla 10-8 de la distribución binomial, la cual muestra la $p$ de una cola asociada con un valor tan pequeño como el valor observado de $x$, que es el número mayor de signos, de acuerdo con el tamaño de la muestra $N$. En caso de tener una hipótesis de dos colas, se duplica el valor de $p$ que resulte en la tabla.

Así, en el ejemplo hay una $N$ de 8, cuyo valor resultó de las 10 parejas evaluadas menos dos empates.

En la primera columna de la tabla de distribución binomial se localiza el valor de $N$ que es 8; ahora, según los datos de la tabla 10-4, hay siete puntuaciones con signo positivo y sólo una con signo negativo, lo cual indica que el número mayor de signos es siete; por lo tanto, es necesario calcular cuál es la probabilidad de obtener siete signos positivos o más.

Como se puede ver en la tabla 10-9, la probabilidad de obtener 10 signos negativos o más, sería de .0010.

**Tabla 10-8. Datos de la distribución binomial**

| N | Número de eventos<br>*P* o *Q* | *P* o *Q*<br>.50 |
|---|---|---|
| **8** | 0 | .0039 |
| | 1 | .0312 |
| | 2 | .1094 |
| | 3 | .2188 |
| | 4 | .2734 |
| | 5 | .2188 |
| | 6 | .1094 |
| | 7 | .0312 |

| | | |
|---|---|---|
| | 8 | .0039 |

$P$(siete u ocho signos positivos)
$= p$(siete u ocho signos positivos) × 2
$= [p(7) + p(8)] \times 2$
$= (.0312 + .0039) \times 2$
$= 0\ .0351$

**Resultado y su representación**

Para rechazar la $H_0$, la cual señala que existen diferencias en los reportes de frecuencia de alimentación de madres e hijos, el valor de $p$ debe ser igual o menor a la probabilidad asociada de ocurrencia *.05,* es decir, $p \leq \alpha = .05$.

En este caso, se obtuvo que $p = 0.0351_{2\ colas} < \alpha = .05$, por lo que se rechaza la hipótesis de nulidad y se acepta la hipótesis alterna, la cual señala que hay diferencias en los reportes dados por las madres y sus hijos.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**

Los resultados señalan que existen diferencias estadísticamente significativas entre los reportes de las madres y de sus hijos en relación a la frecuencia en el consumo de alimentos de alto contenido de azúcar, con una probabilidad asociada de ocurrencia de .0351. Estos datos arrojan evidencia de las discrepancias entre la información proporcionada por las madres y sus hijos con respecto a la alimentación que reciben; además, muestran que las madres tienden a dar una mejor imagen, por lo que es necesario contar con datos de ambos para tener información más cercana a la realidad.

**Ejercicio 5**

**Cálculos para la solución**

**a)** Calcular el número de signos positivos y negativos. Como se puede apreciar en la tabla 10-5, el número de puntuaciones pares en el ejemplo descrito es de 10 ($N = 10$) con 10 signos negativos.

**b)** Determinar la probabilidad asociada de ocurrencia de acuerdo con $H_0$. Para determinar la probabilidad de ocurrencia se consultará la tabla H del Apéndice, la cual se refiere a la distribución binomial y muestra la $p$ de una cola (pues el investigador tiene una hipótesis unidireccional) asociada con un valor tan pequeño como el valor observado de $x$, que es el número mayor de signos.

Así, en nuestro ejemplo tenemos una $N$ de 10 con 10 diferencias negativas; es decir, que el número mayor de signos es 10.

Como se puede ver en la tabla 10-9, la probabilidad de obtener 10 signos negativos o más, sería de .0010.

**Tabla 10-9. Datos de la distribución binomial**

| N | Número de eventos<br>***P* o *Q*** | ***P* o *Q***<br>**.50** |
|---|---|---|
| **10** | 0 | .0010 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | .0098 |
| | 2 | .0439 |
| | 3 | .1172 |
| | 4 | .2051 |
| | 5 | .2461 |
| | 6 | .2051 |
| | 7 | .1172 |
| | 8 | .0439 |
| | 9 | .0098 |
| | 10 | .0010 |

$P$(10 signos negativos)
$= p$(10 signos negativos)
$= 0$ .0010

**Resultado y su representación**
Para rechazar la $H_0$, la cual señala que existen diferencias en el estrés percibido en función de la cantidad de redes de apoyo social, el valor de $p$ debe ser igual o menor a la probabilidad asociada de ocurrencia .05, es decir, $p \leq \alpha = .05$

En este caso se obtuvo que $p = 0.0010_{\ 1\ cola} < \alpha = .05$, por lo que se rechaza la hipótesis de nulidad y se acepta la hipótesis alterna, la cual señala que la cantidad de redes de apoyo social influyen en el estrés percibido.

**Interpretación de acuerdo con las normas de la *American Psychological Association* (APA, 2010)**
Los resultados muestran diferencias significativas entre en el nivel de estrés percibido en función de las redes de apoyo social con las que cuenten las personas; además, se encontró que las personas con puntuaciones más altas de redes de apoyo social tienen niveles de estrés percibido más bajos con una probabilidad asociada de ocurrencia de 0.0010.

# Solución a los ejercicios voluntarios

**Ejercicio 1**

**a)** La prueba más pertinente en este caso es la prueba binomial del signo para muestras pequeñas, pues se quiere evaluar si hay diferencias y si los datos se pueden clasificar con un nivel nominal en términos de las diferencias en el número de signos.
**b)** Se obtiene una probabilidad de .004 menor a $\alpha = .05$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la

hipótesis alternativa, la cual señala que existen diferencias en la cantidad de alimentos que ingieren los niños dependiendo de si están viendo la televisión o no. Se observa que ver televisión durante la comida provoca que los niños ingieran una mayor cantidad de alimentos.

**Ejercicio 2**

**a)** La prueba más pertinente en este caso es la prueba binomial del signo para muestras pequeñas, pues se quiere evaluar si hay diferencias y si los datos se pueden clasificar con un nivel nominal en términos de las diferencias en el número de signos.

**b)** Se obtiene una probabilidad de .002 menor que $\alpha = .05$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, la cual señala que existen diferencias en la percepción del dolor dependiendo de la condición. Asimismo, se encontró que en la condición de relajación las pacientes reportan menos dolor.

# GLOSARIO

**Prueba de signo:** permite contrastar la hipótesis de igualdad entre dos medianas poblacionales.
**Empates o ligas:** ocurre cuando los dos puntajes obtenidos por una pareja son iguales.

# BIBLIOGRAFÍA


Díaz, A. (2009). *Diseño estadístico de experimentos.* Colombia: Universidad de Antioquía.

Elorza, H. (2008). *Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud.* México: Cengage Learning.

Guardia, J., Freixa, M., Peró, M., y Turbany, J. (2008). *Análisis de datos en psicología.* Madrid: Delta.

Pagano, R. (2011). *Estadística para las ciencias del comportamiento.* México: Cengage Learning.

Pardo, A., y Ruíz, M. A. (2002). SPSS 11. *Guía para el análisis de datos.* España: México: McGraw-Hill.

Ritchey, F. J. (2008). *Estadística para las ciencias sociales.* México: McGraw-Hill.

Roman, M., y Murillo, F. J. (2011). América Latina: violencia entre estudiantes y desempeño escolar. *Revista Cepal*, 104, 37-54.

Stigler, S. M. (1986). *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900.* Cambridge: Harvard University Press.

Wackerly, D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones.* México: Cengage Learning.

# Capítulo 11

# PRUEBAS DE DIFERENCIA SOBRE UNA VARIABLE CUANTITATIVA (Prueba F de un factor con medidas repetidas)

*Felipe de Jesús Díaz Reséndiz, Karina Franco Paredes, Omar Arce Rodríguez*

## OBJETIVOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar este capítulo el lector aprenderá a contrastar más de dos grupos con respecto a una variable cuantitativa, para lo cual aplicará el análisis de varianza de un factor con medidas repetidas, así como el análisis de varianza de un factor completamente aleatorizado. En particular, el lector estimará los parámetros y contrastará la hipótesis aplicando los pasos de la inferencia. Después de seleccionar la prueba comprobará sus supuestos y establecerá la hipótesis. Por último, utilizará las pruebas *post hoc* para calcular los estadísticos y su probabilidad de ocurrencia, a fin de interpretar los resultados y rechazar o aceptar la hipótesis nula.

En los capítulos precedentes se ha evaluado la hipótesis nula utilizando la media como el estadístico básico. Otro estadístico empleado con frecuencia es la **varianza de los datos**, es decir, el análisis de varianza, que también se conoce como prueba *F* y es uno de los análisis más importantes. Este análisis emplea las varianzas en lugar de las diferencias y el error estándar (Anderson *et al*., 2012). La varianza total que se presenta en una investigación es producto de dos componentes: suma de cuadrados intergrupos, también conocida como entre grupos o condiciones y la suma de cuadrados dentro de los grupos o intrasujetos (figura 11-1).

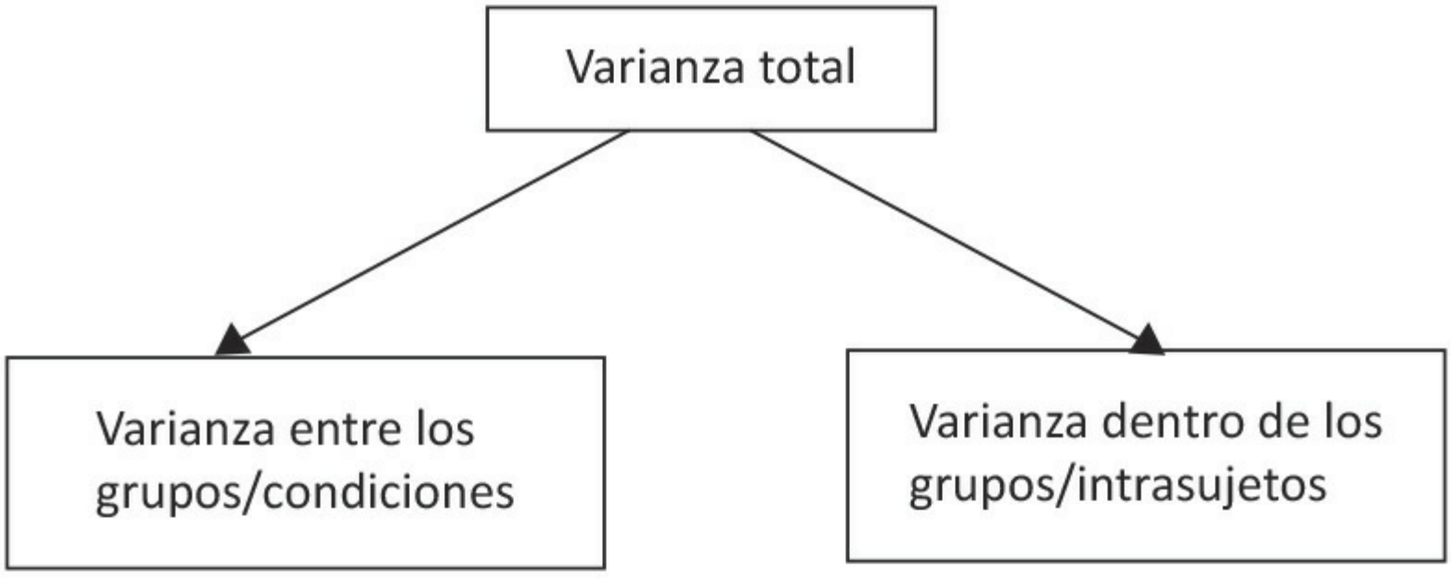



**Figura 11-1.** Fuentes de variación en una investigación.

El análisis de varianza produce una razón *F*, en la que: a) el numerador representa la variación entre las condiciones que se comparan, y el denominador contiene una estimación de la variación intrasujetos (análisis de varianza de un factor con medidas repetidas), o b) el numerador representa la variación de los grupos que se comparan y el denominador contiene una estimación de la variación dentro de los grupos (análisis de varianza de un factor completamente aleatorizado).

A continuación se presentan dos de los procedimientos de análisis de varianza que se utilizan con más frecuencia: el análisis de varianza de un factor con medidas repetidas y análisis de varianza de un factor completamente aleatorizado.

## ANÁLISIS DE VARIANZA DE UN FACTOR CON MEDIDAS REPETIDAS

La prueba *t* es útil cuando el objetivo es comparar la diferencia entre dos medias. Sin embargo, con frecuencia se enfrenta el problema de tener que comparar más de dos medias. Cuando éste es el caso la prueba *t* resulta limitada, aunque es posible ajustar los grados de libertad al número de comparaciones. Sin embargo, esta restricción aumenta la probabilidad de cometer error tipo II. La solución ante estos inconvenientes es utilizar la técnica del análisis de varianza (ANOVA, por sus siglas en inglés) o estadístico ***F* de Fisher** (en honor a su inventor Sir Ronald Fisher). La varianza de un factor se refiere a que en un estudio, investigación o problema existe una variable independiente que ha sido manipulada más de dos ocasiones utilizando los mismos participantes o sujetos, es decir, los sujetos no son independientes entre sí, sino que están correlacionados porque han sido expuestos en más de dos ocasiones a la misma variable independiente. En la literatura se encuentran argumentos a favor y en contra del uso de diseños de medidas repetidas (Field, 2009; Gardner, 2003; Pagano, 2011); pero más allá de estos detalles, en prácticamente cualquier diseño experimental destaca el hecho de que la pregunta de investigación o propósito de la misma es la guía

principal para elegir uno u otro tipo de diseño. En psicología, es frecuente encontrar casos en los que se requiere exponer a los sujetos al mismo tratamiento en más de dos ocasiones, o comparar los posibles cambios a partir de una línea base, una intervención, un intervalo de tiempo o nuevamente se requiere la medición en la condición inicial. Por ejemplo, en un diseño A-B-A, donde A = línea base y B = tratamiento, y se utilizan los mismos sujetos en todas las condiciones, la prueba apropiada para encontrar las posibles diferencias es calcular la prueba *F* o ANOVA de una entrada o factor.

# Presentación del problema

Se desea investigar el efecto de un nuevo tratamiento contra la ansiedad causada durante los periodos de abstinencia en un grupo de personas que fuman. La característica principal del grupo focal es que todos los participantes se inscribieron de manera voluntaria en el programa porque han aceptado dejar de fumar, pero no saben cómo controlar la ansiedad durante los periodos de abstinencia. El tratamiento consiste en enseñar a los participantes a manejar sus emociones y se requiere por lo menos de un par de exposiciones para disminuir considerablemente la ansiedad. El propósito de la investigación es disminuir el nivel de ansiedad que experimentan las personas durante los periodos en que no fuman. Si el tratamiento resulta efectivo, no sólo impactará de forma positiva en la condición fisiológica de los participantes, sino que les ayudará a tolerar los periodos de abstinencia que, según el programa, cada vez serán mayores, en tanto la ansiedad disminuye o se mantiene en un nivel controlable por los futuros exfumadores.

# Análisis del problema

La variable independiente es el programa de tratamiento contra la ansiedad por no fumar. Los autores del mismo señalan que se requiere de por lo menos dos exposiciones al tratamiento para disminuir la ansiedad que experimentan las personas. Por lo tanto, se tiene una variable dependiente: el nivel de ansiedad, sobre el cual se medirá la efectividad del programa. Se harán dos intervenciones (el programa antiansiedad), y dada la naturaleza del problema, en una entrevista inicial se obtendrá información relacionada con el nivel de ansiedad de los participantes, sobre el cual se medirá la efectividad de la intervención. El siguiente diseño A-B-B-A sintetiza el problema, donde A = es la línea base, B = la exposición al tratamiento que se presenta dos veces y una nueva línea base o seguimiento para comprobar los efectos positivos del tratamiento después de la última intervención. Nótese que el intervalo de tiempo entre cada tratamiento (B-B) depende de muchos factores, entre los cuales destaca el propósito de la investigación, la disponibilidad de recursos, así como las características del programa.

En este ejemplo hipotético hay cuatro mediciones con los mismos sujetos, por lo que un paso lógico es sintetizar los cálculos requeridos para saber si el programa es efectivo o no y en qué medida lo es.

# Estimación de parámetros y contraste de hipótesis

El primer paso consiste en establecer los parámetros que se contrastarán. En este caso, la comparación entre las cuatro mediciones, de acuerdo con los criterios de la prueba *F*, corresponde a la comparación de la media aritmética obtenida en cada condición: línea base, intervención (dos veces) y línea base (A-B-B-A). En términos de hipótesis se propone que la media de cada parte del diseño es igual o que no existen diferencias entre éstas. El razonamiento es que si se logra rechazar la hipótesis nula (diferencias significativas) se justifica la conclusión de que las diferencias

entre cada una de las condiciones no se deben al azar, esto es, que los posibles cambios que se observan entre las condiciones no ocurrieron por razones desconocidas (variables extrañas) y, por lo tanto, es apropiado pensar que se tiene algún grado de dominio sobre la variable que se está manipulando, así como sobre la variable que se está midiendo.

***Contraste de hipótesis***

Las hipótesis a comparar son:

**Hipótesis nula ($H_0$):** en ésta se afirma que la diferencia entre las medias aritméticas no existe.
**Hipótesis alterna ($H_1$):** en ésta se afirma que la diferencia entra las medias aritméticas sí existe.

Para realizar el cálculo del estadístico es necesario conocer los siguientes elementos.

- **Suma de cuadrados entre las condiciones.** Se calcula multiplicando el número de sujetos en cada condición por la suma de los cuadrados de la diferencia entre la media de cada grupo y la gran media. La cantidad obtenida es una medida de la variación entre condiciones y se conoce como suma de cuadrados entre las condiciones ($SC_{entre}$):

$$SC_{entre} = \boldsymbol{n} \sum_{j=1}^{b} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

Donde:

$SC_{entre}$ = suma de cuadrados entre las condiciones.
$b$ = número de condiciones.
$n$ = número de sujetos en cada condición.
$\bar{x}_j$ = media aritmética de cada condición.
$\bar{\bar{x}}$ = gran media.

- **Suma de cuadrados intra-sujetos.** Se calcula la suma de cuadrados debido a la variación intrasujetos y puede designarse como $SC_{intra}$, que es la doble sumatoria de los cuadrados de cada observación, menos la media del sujeto y condición correspondiente más la gran media.

$$SC_{intra} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{p}_i - \overline{x}_j + \overline{\overline{x}})^2$$

Donde:

$b$ = número de condiciones.

$n$ = número de sujetos en cada condición.

$x_{ij}$ = observación del sujeto $i$ en la condición $j$.

$\overline{p}_i$ = promedio de las observaciones del sujeto $i$.

$\overline{x}_j$ = promedio de las observaciones en la condición $j$.

$\overline{\overline{x}}$ = gran media.

- Cuadrado media varianza.

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{b - 1}$$

Donde:

$S^2_{entre}$ = varianza entre las condiciones.

$SC_{entre}$ = suma de cuadrados entre las condiciones.

$b - 1$ = número de condiciones menos uno.

$$S^2_{intra} = \frac{SC_{intra}}{(b - 1)(n - 1)}$$

Donde:

$S^2_{entre}$ = varianza intrasujetos.

$SC_{intra}$ = suma de cuadrados intrasujetos.

$b - 1$ = n*úmero de condiciones menos uno*.

$n - 1$ = número de sujetos en cada condición menos uno.

Como es de esperarse de una medida de variación, el valor de la suma de los cuadrados tiende a crecer de manera proporcional al aumento de la variación, y por tal motivo, la suma de los cuadrados no puede considerarse como una medida "pura" de variación. Entonces se debe calcular el cuadrado medio (o varianza) que se obtiene al dividir $SC_{entre}$ o $SC_{intra}$ mediante los grados de libertad apropiados.

- **Razón *F*.** Una vez que se ha calculado la varianza ($S^2_{entre}$ y $S^2_{intra}$) y si no existe algún factor que esté causando la variación en los datos, se procede a comparar la varianza entre condiciones con la varianza intrasujetos, para lo cual se emplea la siguiente fórmula:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{intra}}$$

Donde:
$S^2_{entre}$ = varianza entre las condiciones.
$S^2_{intra}$ = varianza intrasujetos.

# Pasos de la inferencia

Una vez que se establecieron las hipótesis de investigación, es necesario considerar que todo el procedimiento para el cálculo del estadístico se enfoca en la hipótesis nula, debido a que es el supuesto que se pretende rechazar porque pone en duda la efectividad de la intervención (variable independiente). Los siguientes pasos están enfocados en calcular el valor del estadístico *F* usando el nivel de confianza de 95%; después, este dato se compara con el valor crítico y se utiliza el razonamiento de decisión de que si el valor observado es mayor o igual al valor de tablas se considera apropiado rechazar la hipótesis nula.

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***
Dado que el problema en cuestión incluye la comparación de más de dos medias aritméticas, la prueba estadística apropiada es la ***F* de Fisher**. Los cuatro supuestos que se deben cumplir para analizar los datos son (Field, 2009):

1. **Muestras aleatorias:** los sujetos extraídos de la población se obtuvieron al azar. Para los diseños de medidas repetidas esto es una ventaja, ya que las observaciones tienen una correlación positiva.
2. **Distribución normal:** se asume que las distribuciones de las subpoblaciones son normales.
3. **Varianzas iguales:** la varianza de la diferencia entre dos subpoblaciones cualesquiera, es igual a la varianza de la diferencia entre otras dos subpoblaciones (circularidad de la matriz).
4. **Hipótesis nula**: las medias de las subpoblaciones de tratamiento son iguales y por lo tanto son iguales a su media.

$H_0$: Las medias de las subpoblaciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$.
$H_1$: Las medias de al menos dos de las subpoblaciones son distintas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

***Establecer las hipótesis estadísticas***
**Hipótesis nula ($H_0$):** en ésta se afirma que la media aritmética de cada tratamiento es igual a la media de los otros

tratamientos. Para el ejemplo del programa para reducir la ansiedad, el planteamiento de $H_0$ es así: El nivel de ansiedad es igual en todas las condiciones.

**Hipótesis alterna ($H_1$):** en ésta se afirma que la media aritmética de cada tratamiento no es igual a la media de los otros tratamientos. El nivel de ansiedad es diferente entre las condiciones.

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

Si se considera que de un conjunto de datos (población) se pueden extraer todas las muestras posibles de un mismo tamaño, la media de cada una de las distribuciones muestrales es igual a la media de la población, siempre y cuando los datos de cada muestra se obtengan al azar. Por ello, es necesario establecer un margen de error con el que se pueda demostrar que se está rechazando acertadamente la hipótesis nula, esto es, un área debajo de la curva en la que está la menor frecuencia de eventos que difieren del resultado que se pretende demostrar. Por ejemplo, si se utilizara un nivel alfa de .05 quiere decir que el experimento se repitiera 100 veces, sólo en cinco ocasiones el resultado se explicaría por medio del azar. En otras palabras, al establecer el nivel alfa se limita la probabilidad de rechazar de manera equivocada la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, o se está limitando la probabilidad de cometer el error tipo I.

Aunque el concepto de grados de libertad es complicado, conviene utilizar una analogía para explicar que las observaciones o datos pueden variar libremente dentro de un límite que es igual al número de datos menos uno cuando se estiman datos poblacionales. Imagine que tiene un equipo de futbol en el que, como todos los aficionados a este deporte saben, hay 11 jugadores. La tarea consiste en asignar la posición a cada jugador, lo cual parece no tener dificultad al principio porque al momento de designar al primer jugador hay 11 posiciones disponibles. Sin embargo, conforme se van asignando las posiciones los grados de libertad para designar a cada jugador en una posición se van reduciendo hasta llegar al último jugador, a quien sólo se podrá asignar la última que esté disponible. Dado este razonamiento, es posible deducir que el cálculo de grados de libertad es el total de condiciones o de datos menos uno.

En el caso del análisis de varianza de medidas repetidas, es necesario calcular la suma de cuadrados, ya que el modelo matemático representa el efecto de la manipulación experimental cuando los datos provienen de los mismos sujetos. Una vez que se estima el valor del estadístico *F*, es necesario compararlo con el valor crítico o dato que limita la región crítica, que es el área bajo la curva en la cual se incluyen todos los valores del estadístico que validan el rechazo de la hipótesis nula.

***Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

En la tabla 11-1 se presentan los resultados obtenidos al medir el nivel de ansiedad en los cuatro momentos.

**1.** Cálculo de la suma de cuadrados.

$$SC_{entre} = \boldsymbol{n} \sum_{j=1}^{b} (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

$$SC_{entre} = 6[(26 - 19.83)^2 + (24 - 19.83)^2 + (17.7 - 19.83)^2 + (12.17 - 19.83)^2]$$

$$SC_{entre} = 727.66$$

**2.** Cálculo de la varianza entre condiciones.

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{b - 1}$$

$$S^2_{entre} = \frac{727.66}{4 - 1}$$

$$S^2_{entre} = 181.9$$

3. Cálculo de la varianza intrasujetos

$$SC_{intra} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{p}_i - \overline{x}_j + \overline{\overline{x}})^2$$

$$SC_{intra} = (40 - 27.5 - 26 + 19.83)^2 + \cdots + (7 - 10.50 - 12.17 + 19.83)^2$$

$$SC_{intra} = 255.83$$

4. Cálculo de la varianza intrasujetos $S^2_{intra}$

$$S^2_{intra} = \frac{SC_s}{(b-1)(n-1)}$$

$$S^2_{intra} = \frac{255.83}{(4-1)(6-1)}$$

$$S^2_{intra} = 17.05$$

**5.** Cálculo del estadístico de prueba *F.*

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{intra}}$$

$$F = \frac{242.55}{17.05}$$

$$F = 14.22$$

**Tabla 11-1. Nivel de ansiedad en cuatro momentos de las personas que fuman**

| Participante | Nivel de ansiedad | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Línea base | Tratamiento | Tratamiento | Línea base | $\bar{p}$ |
| | | Primera vez | Segunda vez | | |
| 1 | 40 | 35 | 20 | 14 | 27.25 |
| 2 | 35 | 27 | 23 | 15 | 25.00 |
| 3 | 25 | 31 | 19 | 15 | 22.50 |
| 4 | 25 | 21 | 20 | 14 | 20.00 |
| 5 | 20 | 17 | 10 | 8 | 13.75 |
| 6 | 11 | 13 | 11 | 7 | 10.50 |
| $x_j$ | 26 | 24 | 17.17 | 12.17 | $\bar{x}$ = 19.83 |

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

El criterio de rechazo para la hipótesis nula es $F_{obtenida} \geq F_{crítica}$. El valor crítico se obtiene de la tabla de distribución $F$ (véasela Tabla I del Apéndice). Para localizar el valor se consideran tres cantidades, los grados de libertad en el numerador y en el denominador y el nivel de $a$. En la tabla 11-2 se muestra el valor crítico para $b - 1 = 4 - 1 = 3$ grados de libertad en el numerador y $(b - 1)(n - 1) = (4 - 1)(6 - 1) = 15$ en el denominador, con $a = 0.5$; como se observa, el valor crítico de $F$ es igual a 3.29. En la figura 11-2 se indica el valor $F_{\text{crítica}}$, y dado que $14.22 > 3.29$ se rechaza la hipótesis nula.

**Tabla 11-2. Valor de F_crítica para tres grados de libertad en el numerador, 15 en el denominador y α = .05**

| Grados de libertad en el denominador | Área de la cola superior | Grados de libertad en el numerador | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 15 | .05 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 |
| | .01 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 |

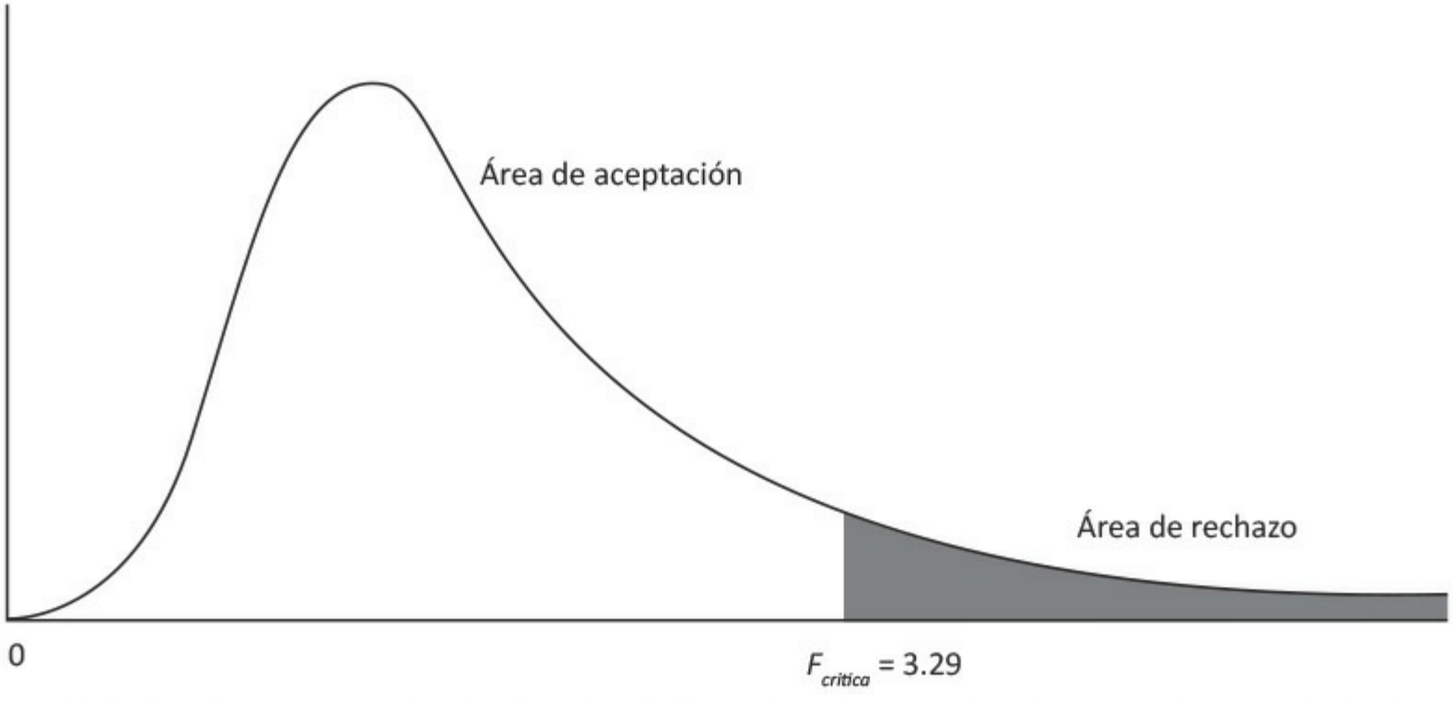



**Figura 11-2.** Distribución $F$ para $b - 1 = 3$ grados de libertad en el numerador, $(b - 1)(n - 1) = (4 - 1)(6 - 1) = 15$ grados de libertad en el denominador y $\alpha = .05$.

***Representación e interpretación, pruebas post hoc***

Después de encontrar que el estadístico es significativo, el siguiente paso es encontrar en qué par de comparaciones están las diferencias. Dependiendo del tipo de estudio, diseño de investigación, variables incluidas y de todas las

condiciones en un procedimiento controlado, se calcula un estadístico para señalar en qué par de comparaciones se encuentran las diferencias. Como el lector seguramente notó en el capítulo 8, una comparación entre pares de condiciones se puede realizar de manera apropiada con una prueba *t* para muestras relacionadas. Este paso es lógico si se considera que la diferencia entre una prueba *t* y el estadístico *F* es matemáticamente muy sencilla porque ambos estadísticos están relacionados. El valor al cuadrado de *t* es igual al estadístico F, la raíz cuadrada de F es igual al estadístico t.

En el caso ideal de un diseño planeado, con recolección de muestras al azar y un nivel de confianza de 95% y dependiendo del propósito del estudio, se espera encontrar diferencias entre todas las condiciones, es decir, que la comparación entre cada par de condiciones sea estadísticamente significativa. Si la estimación del estadístico *F* no es significativa, no tiene sentido llevar a cabo una prueba *post hoc*, ya que el objetivo es determinar si la diferencia entre las condiciones del estudio es o no significativa.

$$H_0: m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \ldots m_n$$

$$H_0: m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4 \ldots m_n$$

Existen diferentes pruebas *post hoc*; no obstante, la descripción de cada una de ellas rebasa los alcances de este capítulo. Sólo se comentarán dos de las pruebas más utilizadas para el análisis de varianza de medidas repetidas: la prueba de la **mínima diferencia significativa** (LSD, por sus siglas en inglés) desarrollada por Fisher y la **prueba de Bonferroni**.

#### PRUEBA DE LA MÍNIMA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA DE FISHER

Esta prueba, propuesta en 1935 por Fisher, permite realizar comparaciones de pares de medias muestrales y está basada en la distribución de la prueba *t*. La prueba LSD permite comparar el valor absoluto de la diferencia de las medias entre dos grupos y un valor obtenido para cada par de muestras.

1. **Cálculo de la mínima diferencia significativa.**

$$LSD = t_{\alpha/2} \sqrt{S^2_{intra}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Donde:
$t_{a/2}$ = distribución *t* con $n_t - k$ grados de libertad
$S^2_{intra}$ = estimulación de la varianza intrasujetos
$n$ = número de sujetos en cada condición

2. **Criterio de rechazo de con un nivel de significancia de** α**.** El factor $t_{a/2}$ de la fórmula proviene de la distribución *t* con $n_t - k$ grados de libertad. Se observa que es una prueba de dos colas, lo cual significa que si no se acepta la hipótesis nula, una de las medias puede ser significativamente menor o mayor que la otra. De manera gráfica, el área de la cola superior es de

$$\alpha/_2 = .025$$

y al ser una distribución simétrica, el área de la cola inferior también es de .025 para que sumen el valor de α = .05. Es importante notar que si todas las *n* son iguales únicamente se requiere calcular un solo valor de LSD. Se rechaza la $H_0$ si:

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq LSD$$

Puede suceder que a partir del resultado de la prueba LSD se acepte que todas las medias son iguales, a pesar de que el estadístico *F* del análisis de la varianza haya resultado significativo. Esto se debe a que la prueba *F* considera simultáneamente todas las posibles comparaciones entre las medias de las condiciones/grupos y no sólo las comparaciones por pares de medias.

**PRUEBA DE BONFERRONI**

Esta prueba pretende resolver el problema que tiene la aplicación de numerosas pruebas *t* de Student al reducir la probabilidad de cometer un error de tipo I en cada comparación por pares de medias. Asimismo, permite controlar la tasa de error dividiendo el nivel de significación entre el número de comparaciones realizadas. Por lo tanto, cada comparación se evalúa utilizando un nivel de significancia. En esta prueba *post hoc* se fija un nivel de significación α que se reparte entre el número de comparaciones por pares consideradas.[1] Esto da origen a *M* intervalos de confianza que contienen cada una de las posibles diferencias $m_i - m_j$ con probabilidad 1 – α.

**1. Cálculo de la prueba.**

$$BSD = t_{\frac{\alpha}{2M}} \sqrt{S^2_{intra}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Donde:
*M* = número de comparaciones posibles.
$S^2_{intra}$ = varianza intrasujetos.
*n* = número de sujetos en cada rincón

**2. Criterio de rechazo de $H_0$ con un nivel de significancia de a**

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq BSD$$

En el ejemplo con el que se está trabajando, debido a que se encontraron diferencias significativas en el nivel de

ansiedad entre las cuatro condiciones, es necesario señalar que, hasta este punto, el estadístico *F* sólo indica si existen o no diferencias, pero no se sabe entre cuáles condiciones se encuentran estas diferencias. Para conocer con precisión qué condiciones difieren entre sí, es necesario calcular una prueba *post hoc*.

#### PRUEBA DE COMPARACIÓN MÚLTIPLE LSD DE FISHER

Dado que la prueba estadística fue significativa, se realizó la prueba LSD de Fisher. El primero paso es establecer las comparaciones entre las condiciones para establecer hipótesis.

$$H_0: m_1 = m_2 = m_3 = m_4$$

$$H_0: m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4$$

**1.** Calcular la mínima diferencia significativa (LSD)

Con $(b - 1)(n - 1) = (4 - 1)(6 - 1) = 15$ grados de libertad y $\alpha/2 = 0.025$ en la tabla de la distribución *t* se observa un valor $t_{0.025} = 2.13$ En los cálculos del análisis de varianza del ejemplo se obtuvo una $S^2_{intra} = 17.05$. Sustituyendo en la fórmula:

$$LSD = t_{\alpha/2} \sqrt{S^2_{intra}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.13 \sqrt{17.05\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.61$$

**2.** El criterio para rechazar la hipótesis nula es que la diferencia para cada par de condiciones sea mayor o igual a la diferencia mínima significativa (valor del LSD).

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq LSD$$

En cada par de condiciones se utiliza el mismo procedimiento. Para el presente ejemplo se concluye que el nivel de ansiedad de la segunda línea base es diferente al resto de las condiciones.

#### INFORME DE LOS RESULTADOS

Se encontraron diferencias significativas [$F$ (3, 15) = 14.22, $p < .05$] en el nivel de ansiedad presentado en las distintas condiciones. La prueba *post hoc* LSD de Fisher mostró que el nivel de ansiedad fue más bajo después de que se implementó la primera intervención, en comparación con la línea base inicial. El nivel de ansiedad disminuye después de la segunda intervención y es aún más bajo durante el seguimiento o segunda línea base.

## ANÁLISIS DE VARIANZA DE UN FACTOR COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

El análisis de varianza de un factor puede aplicarse para analizar los datos que resultan de un diseño aleatorizado. La

técnica se denomina **análisis de varianza de una vía**, en virtud de que cada respuesta u observación se categoriza de acuerdo con un sólo criterio de clasificación: la condición a la cual pertenece (Coolican, 2004; Wayne, 2008).

# Presentación del problema

A un psicólogo que trabaja en el departamento estatal del deporte se le solicita que realice un diagnóstico del grado de insatisfacción corporal que presentan las mujeres que asisten a realizar actividades físicas a cierta unidad deportiva. El psicólogo decide realizar una investigación con el propósito de analizar el grado de insatisfacción corporal en las adolescentes que practican diferentes actividades físicas. Para ello, acudió a la unidad deportiva e identificó tres grupos: baile de salón, gimnasia y *kick boxing*. En cada grupo seleccionó de manera aleatoria a seis participantes y les solicitó que contestaran individualmente un cuestionario de insatisfacción corporal.

# Análisis del problema

En esta investigación hipotética se tienen tres grupos conformados por diferentes participantes, quienes practican actividad física. Dadas las características de la actividad física que realizan, se espera que presenten diferentes grados de insatisfacción corporal; por ejemplo, en el caso de las gimnastas la figura corporal es un criterio que influye en la valoración de la actividad que realizan. Las integrantes de cada grupo contestaron el cuestionario en una sola ocasión y de manera individual. Dicho instrumento está conformado por 10 reactivos con tres opciones de respuesta que se califican de 0 a 2, por lo tanto, la puntuación total fluctúa entre 0 y 20. Cabe destacar que las puntuaciones altas indican mayor grado de insatisfacción corporal.

# Estimación de parámetros y contraste de hipótesis

***Suma de cuadrados entre los grupos***

Para realizar este cálculo se debe obtener, para cada grupo, la diferencia del cuadrado de la media del grupo con respecto a la gran media y multiplicar el resultado por el tamaño del grupo. Por último, deben sumarse los resultados en todos los grupos. La cantidad obtenida es una medida de la variación entre grupos y se conoce como **suma de cuadrados entre grupos** ($SC_{entre}$). En un experimento, la varianza entre los grupos puede deberse a la manipulación experimental, lo cual significa que el experimentador aplicó un tratamiento a un grupo y un tratamiento diferente para cada uno de los otros grupos. Estos distintos tratamientos deberían hacer diferentes a los grupos y a sus medias, ya que esto provocaría una varianza entre grupos. En una investigación no experimental se espera que la presencia/ausencia de la variable de interés haga diferentes a los grupos y a sus medias para tener una varianza entre grupos.

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \, (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

Donde:

$SC_{entre}$ = suma de cuadrados entre grupos.

$n_j$ = tamaño de cada uno de los grupos.

$\overline{x}_j$ = media del grupo *i*.

$\overline{\overline{x}}$ = gran media.

***Suma de cuadrados dentro de los grupos***

Se requiere calcular la suma de la varianza de cada una de las muestras y **ésta** se multiplica por el tamaño de cada muestra menos uno. A este componente de la variación se llama **suma de cuadrados** y puede designarse como $SC_{\text{dentro}}$. En ocasiones, esta cantidad se conoce como varianza residual o de error. La varianza de error es la fluctuación o variación de medias que no se puede explicar. En este tipo de varianza pueden incluirse errores de medición en el instrumento empleado, errores de procedimientos llevados a cabo por el investigador, registro erróneo de las respuestas, etc. En una investigación, es necesario controlar, hasta donde sea posible, este tipo de fuentes de variación, de tal forma que la varianza de error sea la que persiste en un conjunto de medidas después de que todas las fuentes conocidas de varianza se han controlado.

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j \, (n_j - 1)$$

Donde:

$SC_{dentro}$ = suma de cuadrados dentro de los grupos.

$S^2_j$ = varianza de cada uno de los grupos.

$(n_j - 1)$ = el tamaño de cada grupo menos uno.

***Cuadrado medio (varianza)***

Como es de esperarse en una medida de variación, el valor de la suma de los cuadrados tiende a crecer a medida que la variación aumenta; por tal motivo, la suma de los cuadrados no se considera una medida "pura" de variación. Entonces se debe recurrir a calcular el cuadrado medio (o varianza), el cual se obtiene dividiendo $SC_{\text{dentro}}$ o $SC_{\text{entre}}$ entre los grados de libertad apropiados.

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{gl_{dentro}}$$

Donde:
$S^2_{dentro}$ = varianza dentro de los grupos.
$SC_{dentro}$ = suma de cuadrados dentro de los grupos.
$gl_{dentro}$ = grados de libertad dentro de los grupos.

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{gl_{entre}}$$

Donde:
$S^2_{entre}$ = varianza entre grupos.
$SC_{entre}$ = suma de cuadrados entre grupos.
$gl_{entre}$ = grados de libertad entre grupos.

***Razón F***

Una vez que se ha calculado la varianza ($S2_{dentro}$ y $S2_{entre}$), si no existe algún factor que esté causando variación en los datos, es razonable considerar la varianza dentro de los grupos como una medida de la fluctuación aleatoria. En este caso se procede a comparar la varianza entre grupos con la varianza dentro de los grupos, para lo cual se emplea la siguiente fórmula:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}}$$

Donde:
$S^2_{entre}$ = varianza entre grupos.
$S^2_{dentro}$ = varianza dentro de los grupos.

# Pasos de la inferencia

Cuando las hipótesis de investigación ya se han establecido es necesario realizar el análisis estadístico que permitirá aceptar o rechazar la hipótesis nula. El primer paso consiste en calcular el valor de *F* para el conjunto de datos; para ello, se verifica el resultado contra un valor de la tabla de la razón *F*, el cual depende de los grados de libertad

asociados. Si el valor obtenido de *F* permite rechazar la hipótesis nula, entonces se realiza un análisis los grupos entre los que se presentan las diferencias, mediante las pruebas *post hoc*.

***Selección de la prueba, comprobación de supuestos***

Para que los procedimientos inferenciales en el análisis de varianza sean válidos, es necesario que se cumplan los siguientes supuestos generales:

1. **Distribución normal:** este supuesto se refiere a que cada muestra debe provenir de una población que se distribuye normalmente.
2. **Homogeneidad de varianzas:** la varianza debida al error experimental debe ser igual (homogénea) para todas las observaciones.
3. **Observaciones independientes:** las observaciones dentro de los grupos deben ser independientes o no relacionadas. Se dice que las observaciones están relacionadas o que tienen dependencia serial cuando, por ejemplo, la conducta de una persona es observada de manera repetida.

***Establecer las hipótesis estadísticas***

**Hipótesis nula ($H_0$):** se afirma que la media aritmética de cada grupo es igual a la media de los otros grupos. Para el ejemplo que se está desarrollando, el planteamiento de $H_0$ queda así: La insatisfacción corporal de las mujeres es igual en los tres tipos de actividad física.

**Hipótesis alterna ($H_1$):** se afirma que la media aritmética de cada grupo no es igual a la media de los otros grupos. Para el ejemplo que se está desarrollando, el planteamiento de $H_1$ queda así: La insatisfacción corporal de las mujeres es diferente en los tres tipos de actividad física.

De acuerdo con la hipótesis nula, cualquier diferencia observada entre las muestras se considera un hecho casual que puede ser resultado del error de muestreo. Por lo tanto, la diferencia que existe entre las medias muestrales no representa una diferencia real entre sus medias poblacionales.

En la práctica, el investigador busca rechazar la $H_0$ debido a que con frecuencia se pretende encontrar diferencias entre las condiciones; y a menudo, esta situación constituye la razón fundamental por la que se realiza una investigación. Si se rechaza la hipótesis nula, de manera automática se acepta $H_1$, la cual plantea que sí existen diferencias entre las medias de los grupos y se afirma que la diferencia obtenida entre medias muestrales es demasiado grande como para ser explicada por medio del error de muestreo.

***Descripción de la distribución muestral, nivel de significación, grados de libertad y valor crítico***

La distribución muestral de la prueba *F*, al igual que la distribución de la prueba *t*, varía con los grados de libertad. A diferencia de la distribución de la prueba *t*, la distribución de la prueba *F* tiene dos valores para los grados de libertad, uno para el numerador y otro para el denominador (Pagano, 2011). En cada cálculo de varianza se pierde un grado de libertad, por lo tanto, los grados de libertad se calculan de la siguiente manera:

$$gl \text{ para el numerador} = gl_1 = n_1 - 1$$

$$gl \text{ para el denominador} = gl_2 = n_2 - 1$$

Existe una familia de curvas *F* que fue presentada por Sir Ronald Fisher a inicios del decenio de 1920-29, en la cual se incluye una curva diferente para cada combinación de $gl_1$ y $gl_2$. Una vez que se tiene el valor obtenido de la prueba *F* es necesario calcular los grados de libertad tanto para el numerador como para el denominador (véase la Tabla I del

Apéndice). El valor obtenido que causará el rechazo de la $H_0$ depende del nivel de significancia que se haya elegido; en este caso sólo se presentan valores críticos para dos niveles de significancia (.05 y .01). Si el valor obtenido de *F* es mayor o igual que el valor crítico, la diferencia reflejada por la varianza entre grupos es estadísticamente significativa, por lo tanto, se rechaza la $H_0$, en donde se plantea que todas las medias de las condiciones/grupos son iguales.

***Calcular los estadísticos en la muestra y su valor de probabilidad***

En la tabla 11-3 se presentan las puntuaciones obtenidas por los integrantes de cada grupo al evaluar la insatisfacción corporal de mujeres que practican actividad física.

**Tabla 11-3. Puntuación total de insatisfacción corporal obtenida por las mujeres de los tres grupos**

| Baile de salón | Gimnasia | Kick boxing |
|---|---|---|
| 9 | 10 | 8 |
| 8 | 15 | 7 |
| 10 | 12 | 7 |
| 7 | 15 | 9 |
| 8 | 13 | 8 |
| 9 | 12 | 10 |
| 10 | 14 | 8 |
| $\bar{X}_1 = 8.71$ | $\bar{X}_2 = 13.00$ | $\bar{X}_3 = 8.14$ |
| $S^2_1 = 1.23$ | $S^2_2 = 3.33$ | $S^2_3 = 1.14$ |

**1.** Cálculo de la suma de cuadrados entre grupos:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \, (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

En este caso se requiere conocer cada uno de los elementos de la fórmula:
Tamaño de cada una de los grupos $n_j$:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 7$$

Cuadrados de las diferencias entre la media de cada uno de los grupos, $\overline{x}_j$ con respecto a la gran media:

$$\overline{\overline{x}} = (8.71 + 13.00 + 8.14)/3 = 9.95$$

$$(\overline{x}_1 - \overline{\overline{x}})^2 = (8.71 - 9.95)^2 = 1.53$$

$$(\overline{x}_2 - \overline{\overline{x}})^2 = (13 - 9.95)^2 = 9.30$$

$$(\overline{x}_3 - \overline{\overline{x}})^2 = (8.14 - 9.95)^2 = 3.27$$

Ahora, se multiplica el tamaño de cada grupo por el respectivo cuadrado de las diferencias entre medias

$$n_1 (\overline{x}_1 - \overline{\overline{x}})^2 = 7(1.53) = 10.71$$

$$n_2 (\overline{x}_2 - \overline{\overline{x}})^2 = 7(9.30) = 65.10$$

$$n_3 (\overline{x}_3 - \overline{\overline{x}})^2 = 7(3.27) = 22.89$$

La fórmula indica sumar los resultados anteriores para obtener:

$$SC_{entre} = 10.71 + 65.10 + 22.89 = 98.70$$

**2.** Cálculo de la varianza entre grupos ($S^2_{entre}$).

Se divide $SC_{entre}$ entre los grados de libertad que corresponden al total de las muestras ($k$) menos uno:

$$S^2_{entre} = \frac{SCT}{k-1}$$

$$S^2_{entre} = \frac{98.70}{3-1} \quad 49.35$$

**3.** Cálculo de la suma de cuadrados dentro de grupos.

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j \ (n_j - 1)$$

Los elementos de la fórmula son:

El valor de la varianza de cada uno de los grupos:

$$S^2_j = \frac{(x_j - \overline{x})^2}{n-1}$$

$$S^2_1 = 1.23, \qquad S^2_2 = 3.33 \quad \text{y} \quad S^2_3 = 1.14$$

El tamaño de cada grupo menos uno:

$$(n_j - 1)$$

$$(n_1 - 1) = 7 - 1 = 6$$

$$(n_2 - 1) = 7 - 1 = 6$$

$$(n_3 - 1) = 7 - 1 = 6$$

Después se multiplica cada varianza por su correspondiente factor $(n_j - 1)$:

$$S^2_1 (n_1 - 1) = 1.23(6) = 7.38$$
$$S^2_2 (n_2 - 1) = 3.33(6) = 19.98$$
$$S^2_3 (n_3 - 1) = 1.14(6) = 6.84$$

La fórmula indica sumar los resultados anteriores para obtener:

**4.** Cálculo de la varianza dentro de grupos.

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{n_t - k}$$

$$S^2_{dentro} = \frac{34.20}{21 - 3} = 1.90$$

**5.** Cálculo del estadístico de prueba.

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}}$$

$$F = \frac{49.35}{1.90} = 25.97$$

***Decisión de aceptación o rechazo de la $H_0$***

En la tabla 11-4 se presentan los datos en un resumen conocido como tabla ANOVA. Como el estadístico de prueba tiene una distribución $F$ con $k - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_t - k$ grados de libertad en el denominador, lo que corresponde es utilizar la tabla de distribución $F$ para localizar el valor crítico de $F$ (véase Tabla I del Apéndice). En este caso se toman en cuenta tres valores: grados de libertad en el numerador, que corresponden al encabezado de la fila superior; grados de libertad en el denominador, que se encuentran en la primera columna; y el valor de $a$, que corresponde a la segunda columna.

**Tabla 11-4. Resumen del análisis de varianza**

| Variación | Suma de cuadrados | Grados de libertad | Cuadrado medio | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 98.70 | 2 | 49.35 | 25.97 |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dentro de los grupos | 34.20 | 18 | 1.90 | |
| Total | 132.4 | 20 | | |

Para $k - 1 = 2$ y $n_t - k = 18$ grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente, y un $a = 0.5$, también se observa un valor $F$ igual a 3.55. En la figura 11-3 se indica el valor crítica $F_{\text{crítica}}$.

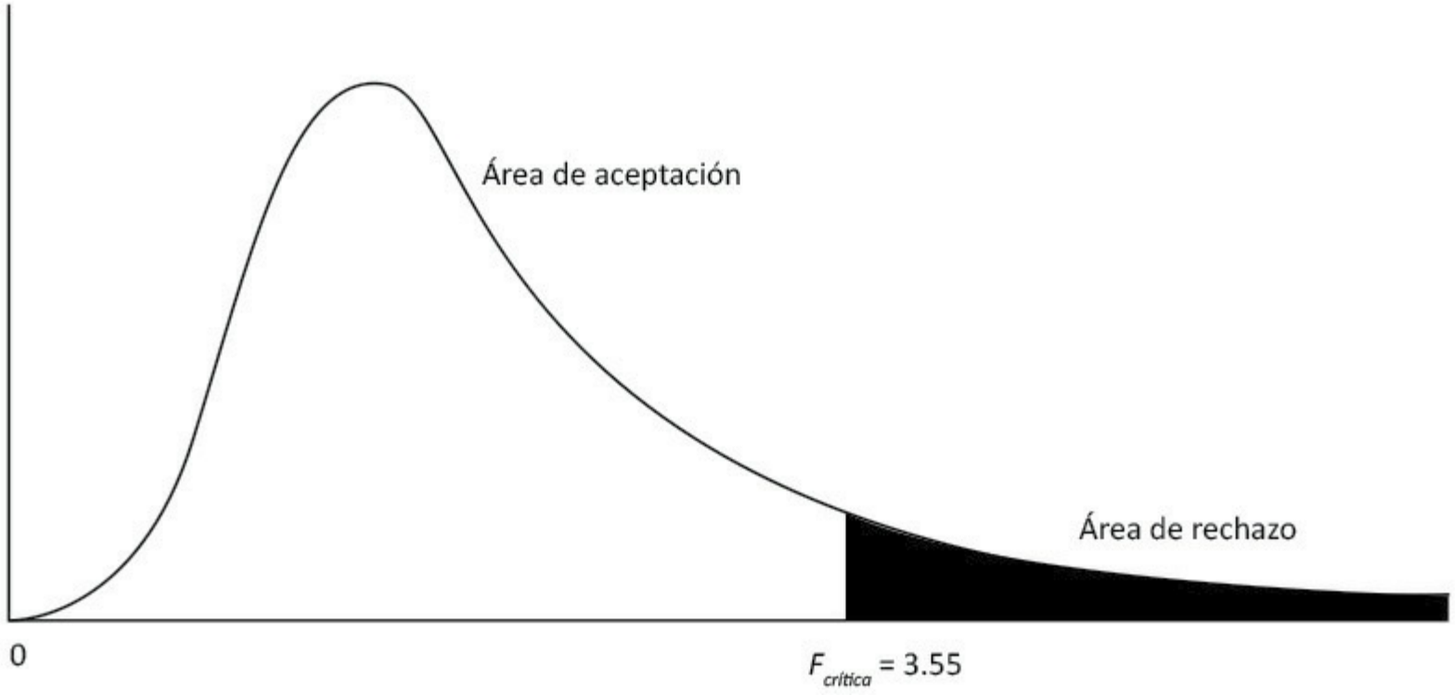



**Figura 11-3.** Distribución $F$ para $k - 1 = 2$ grados de libertad en el numerador, $n\_t - k = 18$ grados de libertad en el denominador y $a = .05$.

Para determinar si la diferencia entre las medias es estadísticamente significativa, se compara el valor $F$ obtenido (25.97) con el valor crítico de la tabla (3.55). El criterio para aceptar o no la hipótesis nula es que si el valor $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$, se concluye que no hay evidencia estadística para aceptar la hipótesis nula. De acuerdo con los resultados obtenidos $F_{obtenido} > F_{crítica}$, es decir, 25.97 > por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula.

***Representación e interpretación, pruebas post hoc***

Si el valor obtenido de la prueba $F$ resultó significativo, esto sólo significa que existen diferencias significativas en alguna parte de los datos, es decir, el investigador conoce que existen diferencias entre las medias de las distintas condiciones/grupos, pero no sabe cuáles diferencias contribuyen a la significancia. El análisis de las medias puede revelar, aunque de forma imprecisa, qué diferencias son importantes. Sin embargo, para probar hipótesis se requieren pruebas más precisas y controladas, y para ello se han desarrollado pruebas específicas denominadas *post hoc* (Pagano, 2011).

Sólo se comentarán dos de las pruebas más utilizadas: prueba de la diferencia honestamente significativa (HSD, por sus siglas en inglés) desarrollada por Tukey, y la prueba de Newman y Keuls.

**PRUEBA DE LA DIFERENCIA HONESTAMENTE SIGNIFICATIVA DE TUKEY**

Esta prueba permite comparar todos los posibles pares de medias correspondientes a las condiciones/grupos manteniendo el error tipo I en *a* (Wayne, 2008). El estadístico para esta prueba se calcula con la siguiente fórmula:

$$Q_{obtenido} = \frac{\overline{x}_i - \overline{x}_j}{\sqrt{S^2_{dentro/n}}}$$

Donde

$\overline{x}_i$ = mayor de las medias comparadas.

$\overline{x}_j$ = menor de las medias comparadas.

$S^2_{dentro}$ = estimación de la varianza dentro de grupos.

$n$ = número de sujetos en cada grupo.

Al calcular el valor de $Q$, la media más pequeña se resta de la media más grande, por lo que el resultado siempre será positivo. Se calcula este estadístico se calcula para todas las comparaciones por pares correspondientes. También existe un criterio para rechazar $H_0$ para $n_t - k$ grados de libertad (con relación a $S^2_{dentro}$), $k$ grupos y un nivel de significancia $a$ Se rechaza la $H_0$ si $Q_{obtenido} \geq Q_{crítica}$. En la tabla de valores de $Q$ debe identificarse el valor de $Q_{crítica}$, y para ello es necesario conocer tres elementos: *gl*, el nivel $a$ y $k$. Los *gl* corresponden a los obtenidos para $S^2_{dentro}$, $k$ representa la cantidad de condiciones/grupos en la investigación y $a$ es el nivel de significancia establecido.

**PRUEBA DE NEWMAN-KEULS**

La prueba de Newman-Keuls permite comparar, por pares, todas las medias muestrales de las condiciones/grupos de una investigación. Al igual que en la prueba HSD de Tukey se utiliza el valor de $Q_{obtenida}$, el cual se compara con el valor crítico de la distribución $Q$ para decidir si la hipótesis nula debe ser rechazada. Sin embargo, a diferencia de la prueba HSD, la cual mantiene el error tipo I en $a$ para toda la investigación, la prueba de Newman-Keuls mantiene el error tipo I en $a$ para cada comparación; por lo tanto, en esta prueba se obtendrá una $Q_{crítica}$ en cada comparación (Coolican, 2004).

El estadístico para esta prueba se calcula con la misma fórmula que se utiliza para la prueba HSD. Una vez que se ha obtenido la $Q_{obtenida}$ se procede a determinar los valores de $Q_{critica}$ para cada comparación de pares de medias. El valor de $Q_{crítica}$ utilizado para cada comparación está dado por $r$, es decir, la distribución de muestreo de $Q$ para la cantidad de condiciones/grupos con medias entre $X_i$ y $X_j$ una vez que todas las medias han sido ordenadas por rango (Pagano, 2011). Para buscar el valor de $Q_{crítica}$ en la tabla es necesario conocer tres elementos: *gl*, el nivel $a$ y $r$. Los *gl* corresponden a los obtenidos para $S^2_{dentro}$, $r$ representa la cantidad de condiciones/grupos comparados y $a$ es el nivel de significancia establecido. Se rechaza la $H_0$ si $Q_{obtenido} \geq Q_{crítica}$.

Para continuar con el análisis de los datos de la investigación hipotética descrita, dado que la prueba *F* mostró diferencias significativas entre las puntuaciones de los grupos, se decide realizar la prueba *post hoc* LSD para identificar entre qué pares de medias se presentan específicamente las diferencias. Se inicia el proceso de la prueba con un par de medias, en este caso con la media del grupo que participa en baile de salón $m_1$ y la media del grupo de gimnasia $m_2$.

**1.** Establecer las hipótesis:

$$H_0: m_1 = m_2$$

$$H_1: m_1 \neq m_2$$

**2.** Calcular la mínima diferencia significativa *(LSD)*. A partir de los resultados obtenidos se sabe que la varianza $S^2_{dentro}$, y debido a que en ambos grupos la *n* es igual ($n_1 = 7$ y $n_2 = 7$) se requiere calcular un solo valor de LSD. En este caso para 21 – 3 = 18 grados de libertad, el valor $t_{a/2}$ (véase la Tabla D, tabla de distribución *t*, en el Apéndice).

$$LSD = t_{\alpha/2}\sqrt{S^2_{dentro}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.10\sqrt{1.90\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right)} = 1.51$$

**3.** Criterio de rechazo de $H_0$ con un nivel de significancia *a*

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq LSD, |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |8.71 - 13.00| = 4.29 \geq 1.51$$

Se rechaza $H_0$, por lo tanto, la diferencia entre las mujeres que practican gimnasia y quienes practican baile de salón es significativa. Al realizar el cálculo para los dos pares de medias restantes se encuentra que para las medias del grupo de gimnasia y del grupo de *kick boxing*:

$$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |13.00 - 8.14| = 4.86 < 1.51$$

Se rechaza $H_0$, por lo tanto, se considera que la diferencia entre ambos grupos es significativa; para el grupo de baile de salón y de *kick boxing*:

$$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |13.00 - 8.14| = 4.86 < 1.51$$

Entonces se acepta $H_0$ y la diferencia entre los grupos no es significativa.

**INFORME DE LOS RESULTADOS**

Hubo diferencias significativas [$F(2, 18) = 25.97$, $p < .05$] en la insatisfacción corporal de mujeres que practican tres diferentes tipos de actividad física. La prueba *post hoc LSD* mostró que las mujeres que practican gimnasia presentaron mayor insatisfacción corporal en comparación con las mujeres que practican baile de salón y quienes practican kick boxing.

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**Muestras relacionadas**

**Ejercicio 1**

**Presentación del problema.** Un investigador reportó los datos de un grupo de estudiantes que participaron de manera anónima en un estudio donde se midió el efecto del consumo de alcohol sobre la cantidad de palabras retenidas. La participación de los estudiantes formó parte de un programa de prevención de riesgos en universidades públicas. La intención es sensibilizar a la población acerca de los posibles efectos iatrogénicos del consumo de sustancias. En la tabla 11-1 se presenta el número de palabras recordadas después de leer textos científicos relacionados con la formación académica de los alumnos. Analice si existen diferencias en el número de palabras recordadas en los tres momentos.

Tabla 11-1. Número de palabras recordadas por los estudiantes

| Sujeto | Primera vez | Segunda vez | Tercera vez | $\overline{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 12 | 8 | 10 |
| 2 | 15 | 15 | 12 | 14 |
| 3 | 25 | 30 | 20 | 25 |
| 4 | 35 | 30 | 28 | 31 |
| 5 | 30 | 27 | 20 | 25.67 |
| $x_j$ | 23 | 22.8 | 17.6 | $x = 21.13$ |

**Lógica de la solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias de las condiciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$

$H_1$: Las medias de las condiciones son distintas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$

**Ejercicio 2**

**Presentación del problema.** En un estudio se reportó la eficacia de un programa para reducir el estrés en personas con trastornos de ansiedad. Los participantes practicaron meditación para relajarse y disminuir el estrés. El nivel de ansiedad se midió por medio de la Escala de clasificación de la ansiedad de Hamilton en cuatro momentos diferentes: al momento del reclutamiento inicial (RI), antes del tratamiento (Pre), después del tratamiento (Post) y a los tres meses después de concluir el tratamiento (3-M). Evalúe la efectividad del tratamiento con base en las posibles diferencias (tabla 11-2).

**Tabla 11-2. Nivel de ansiedad de las personas que participaron en el programa**

| Participante | RI | Pretratamiento | Postratamiento | 3-M | $\overline{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 21 | 16 | 19 | 19.25 |
| 2 | 30 | 38 | 10 | 21 | 24.75 |
| 3 | 38 | 19 | 15 | 21 | 23.25 |
| 4 | 21 | 33 | 30 | 24 | 27 |
| 5 | 31 | 24 | 25 | 10 | 22.5 |
| 6 | 21 | 22 | 31 | 30 | 26 |
| 7 | 27 | 15 | 11 | 6 | 14.75 |
| 8 | 18 | 11 | 21 | 20 | 17.5 |
| 9 | 28 | 21 | 23 | 27 | 24.75 |
| 10 | 21 | 23 | 21 | 17 | 20.5 |
| 11 | 18 | 24 | 16 | 13 | 17.75 |
| 12 | 28 | 8 | 22 | 15 | 18.25 |
| 13 | 22 | 37 | 31 | 19 | 27.25 |
| 14 | 35 | 32 | 12 | 21 | 25 |
| $x_j$ | 25.64 | 23.43 | 20.29 | 18.79 | $x = 22.04$ |

**Lógica de la solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias de las condiciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$.

$H_1$: Las medias de las condiciones son distintas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4$.

**Ejercicio 3**

**Presentación del problema.** En un estudio sobre percepción sensorial se midió el tiempo de reacción de 10 participantes que fueron expuestos a una condición experimental para medir el umbral en diferentes secciones de la palma de la mano. A cada participante se le administró un estímulo cuya intensidad aumentaba gradualmente. Se midió en segundos el tiempo que los participantes tardaron en reportar de manera verbal la presencia del estímulo en tres ensayos (tabla 11-3). Evalúe si existen diferencias en el tiempo de reacción entre ensayos.

**Tabla 11-3. Tiempo en segundos para reportar el estímulo por cada participante en los tres ensayos**

| Participante | Ensayo 1 | Ensayo 2 | Ensayo 3 | $\overline{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.28 | 9.55 | 11.21 | 9.68 |
| 2 | 4.71 | 5.05 | 5.20 | 4.99 |
| 3 | 9.48 | 11.33 | 8.45 | 9.75 |
| 4 | 6.04 | 8.08 | 8.42 | 7.51 |
| 5 | 6.02 | 6.32 | 6.93 | 6.42 |
| 6 | 7.34 | 7.44 | 8.12 | 7.63 |
| 7 | 5.86 | 6.19 | 5.98 | 6.01 |
| 8 | 6.08 | 6.03 | 6.45 | 6.19 |
| 9 | 7.50 | 8.04 | 6.26 | 7.27 |
| 10 | 4.92 | 5.28 | 6.17 | 5.46 |
| $x_j$ | 6.62 | 7.33 | 7.32 | $x = 7.09$ |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias de las condiciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Las medias de las condiciones son distintas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

**Ejercicio 4**

**Presentación del problema.** En un estudio sobre preferencias del público que observa las campañas políticas por la televisión, se investigó el número de palabras relacionadas con algún partido político que los participantes recordaron

30, 50 y 60 minutos después de ver la difusión partidista por televisión (tabla 11-4). Analice si existen diferencias en el número de palabras en los tres momentos.

**Tabla 11-4. Número de palabras recordadas por los participantes**

| | Intervalo de tiempo en minutos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Participante | 30 | 50 | 60 | $\overline{p_i}$ |
| 1 | 16 | 26 | 22 | 21.33 |
| 2 | 16 | 20 | 23 | 19.67 |
| 3 | 17 | 21 | 22 | 20 |
| 4 | 28 | 29 | 36 | 31 |
| $x_j$ | 19.25 | 24 | 25.75 | $x = 23$ |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias de las condiciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Las medias de las condiciones son distintas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

**Ejercicio 5**

**Presentación del problema.** En una población de jóvenes que cumplen el supuesto de igualdad de condiciones (físicas, sociales, económicas y nutricias), se realizó un estudio para comparar la capacidad de memorización en tres condiciones distintas de actividad física: A, programa de tres meses en actividad física moderada; B, programa de seis meses en actividad física moderada; y C, programa controlado durante seis meses en sedentarismo. De una muestra aleatoria simple de 15 jóvenes se asignaron también aleatoriamente, cinco participantes a cada una de las condiciones. Al finalizar cada programa, a los participantes se les proyectó una serie de 30 imágenes y después de cinco días se les aplicó un reactivo en el que dentro de 100 imágenes debían identificar las que fueron proyectadas al finalizar el programa. Los resultados se presentan en la tabla 11-5. Determine si existen diferencias significativas entre los grupos de actividad física y la capacidad de memorizar imágenes en la población de jóvenes estudiada. Se desea un nivel de confianza de 95% ($\alpha = .05$).

| Tabla 11-5. Imágenes recordadas de un total de 30 dentro de un grupo de 100 | | | |
|---|---|---|---|
| Participante | Número de imágenes recordadas en cada programa de actividad física | | |
| | A | B | C |
| 1 | 19 | 13 | 13 |
| 2 | 6 | 22 | 7 |
| 3 | 15 | 14 | 2 |
| 4 | 13 | 17 | 7 |
| 5 | 8 | 19 | 9 |
| $\overline{x}_j$ | 12.2 | 17 | 7.6 |
| $S^2_j$ | 27.7 | 13.5 | 15.8 |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: La capacidad de memoria entre los jóvenes no es distinta dependiendo del programa de actividad física, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: La capacidad de memoria entre los jóvenes difieren entre los programas de actividad física, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

# Muestras independientes

**Ejercicio 6**

**Presentación del problema.** En un trabajo de investigación educativa se averiguó el tipo de juicio que un profesor emitió hacia la lectura de un ensayo sobre psicología social. El propósito era mostrar que, a pesar de tener los mismos criterios para evaluar un trabajo escrito, los evaluadores emiten juicios que difieren dependiendo del tipo de juez que se consideran. Esta escala variaba entre permisivo y muy estricto. Cada experto en redacción leyó el mismo texto y participaron cuatro profesores. Determine si las puntuaciones asignadas a cada ensayo difieren entre los cuatro lectores (tabla 11-6).

| Tabla 11-6. Puntuación asignada por los profesores en cada ensayo | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ensayo | Lector 1 | Lector 2 | Lector 3 | Lector 4 | $\overline{p}_i$ |
| 1 | 62 | 58 | 63 | 64 | 61.75 |
| 2 | 63 | 60 | 68 | 65 | 64 |
| 3 | 65 | 61 | 72 | 65 | 65.75 |
| 4 | 68 | 64 | 58 | 61 | 62.75 |
| 5 | 69 | 65 | 54 | 59 | 61.75 |
| 6 | 71 | 67 | 65 | 50 | 63.25 |
| 7 | 78 | 66 | 67 | 50 | 65.25 |
| 8 | 75 | 73 | 75 | 75 | 74.5 |
| $x_j$ | 68.88 | 64.25 | 65.25 | 61.13 | $x = 64.88$ |

**Lógica de la solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias de las condiciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Las medias de las condiciones son distintas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

**Ejercicio 7**

**Presentación del problema.** Se realizó un estudio estadístico observacional en tres empresas: una pequeña, otra mediana y una grande, de acuerdo con el número de trabajadores, en las cuales se obtuvieron muestras aleatorias simples de seis trabajadores con el hábito de fumar para conocer cuántos cigarrillos consumen al día. Se registraron las observaciones mostradas en la tabla 11-7. Evalúe si existen diferencias en el número de cigarrillos consumidos por día entre los trabajadores de las tres empresas.

| Tabla 11-6. Puntuación asignada por los profesores en cada ensayo | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ensayo | Lector 1 | Lector 2 | Lector 3 | Lector 4 | $\overline{p}_i$ |
| 1 | 62 | 58 | 63 | 64 | 61.75 |
| 2 | 63 | 60 | 68 | 65 | 64 |
| 3 | 65 | 61 | 72 | 65 | 65.75 |
| 4 | 68 | 64 | 58 | 61 | 62.75 |
| 5 | 69 | 65 | 54 | 59 | 61.75 |
| 6 | 71 | 67 | 65 | 50 | 63.25 |
| 7 | 78 | 66 | 67 | 50 | 65.25 |
| 8 | 75 | 73 | 75 | 75 | 74.5 |
| $\overline{x}_j$ | 68.88 | 64.25 | 65.25 | 61.13 | $\overline{x} = 64.88$ |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias del consumo de cigarrillos en las poblaciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Existe diferencia significativa al menos entre dos de las medias poblacionales, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

**Ejercicio 8**

**Presentación del problema.** En una población se desean probar dos métodos nuevos: A y B, para que los niños de educación preescolar empiecen a escribir a temprana edad. Se seleccionan muestras aleatorias de ocho infantes en dos escuelas para aplicar los novedosos métodos. También se selecciona, como grupo control, una muestra aleatoria en una escuela, en la cual se continúa con el método actual. Al finalizar el periodo escolar, en las tres escuelas se aplica el mismo instrumento para medir la efectividad de los métodos (véase Tabla 11-8). La dependencia de educación desea saber, con un nivel de confianza de 95% ($\alpha = .05$), si existen diferencias significativas entre los métodos de enseñanza para la escritura.

| Tabla 11-8. Calificación de aprendizaje de escritura a edad temprana | | | |
|---|---|---|---|
| Niño | Calificación por método de enseñanza | | |
| | Método A | Método B | Método actual |
| 1 | 10 | 5 | 10 |
| 2 | 7 | 10 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 6 | 6 |
| 4 | 8 | 4 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 10 |
| 6 | 4 | 8 | 8 |
| 7 | 6 | 7 | 10 |
| 8 | 6 | 6 | 7 |
| $X_j$ | 6.5 | 6.63 | 8.38 |
| $S_j^2$ | 3.43 | 3.41 | 2.55 |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: La efectividad de los programas no es distinta, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Existen diferencias significativas al menos entre dos de los programas, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

**Ejercicio 9**

**Presentación del problema.** En un centro educativo se compara el coeficiente intelectual (CI) de jóvenes con una nutrición infantil distinta entre ellos (deficiente, regular y apropiada). Después de estratificar a los estudiantes se toma una muestra aleatoria simple de 10 elementos de cada categoría y se les aplica una prueba que determina el CI (véase tabla 11-9). Se requiere saber con un $\alpha = .05$ si existen diferencias estadísticamente significativas de las medias de CI entre las tres categorías de alimentación.

**Tabla 11-9. Valores del CI de tres poblaciones juveniles según su nutrición infantil**

| | Nivel de CI | | |
|---|---|---|---|
| **Estudiante** | **Nutrición deficiente** | **Nutrición regular** | **Nutrición apropiada** |
| 1 | 95 | 99 | 88 |
| 2 | 90 | 103 | 101 |
| 3 | 86 | 97 | 94 |
| 4 | 92 | 103 | 101 |
| 5 | 109 | 85 | 107 |
| 6 | 93 | 115 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 91 | 108 | 85 |
| 8 | 86 | 103 | 106 |
| 9 | 103 | 104 | 115 |
| 10 | 91 | 115 | 114 |
| $X_j$ | 93.6 | 103.2 | 101.5 |
| $S^2_j$ | 52.49 | 76.62 | 100.72 |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Las medias del CI entre las poblaciones no son distintas, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Existen diferencias significativas del CI al menos entre dos de las medias poblacionales, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

**Ejercicio 10**

**Presentación del problema.** Un grupo de investigadores desea comprobar la efectividad de dos métodos nuevos de enseñanza-aprendizaje (E-A) que se implementaron al inicio del periodo escolar. El contenido del primer método, llamado 50AP, comprende 50% de actividades prácticas; y el segundo método, denominado 80AP, contiene 80% de actividades. De la comunidad estudiantil en donde se realizó el experimento se seleccionó una muestra probabilística de 24 estudiantes, de los cuales ocho se asignaron aleatoriamente al método 50AP, ocho al método 80AP y con el resto se conformó el grupo control, cuyos participantes continuaron con el método actual. Al final del periodo se realizó una evaluación con escala de 40 a 100 puntos, los resultados se presentan en la tabla 11-10. Con un determine si existen diferencias en la efectividad entre los métodos de E-A.

**Tabla 11-10. Puntuaciones de la evaluación de distintos métodos de enseñanza-aprendizaje**

| Elemento | Puntuación según método | | |
|---|---|---|---|
| | Actual | 50AP | 80AP |
| 1 | 100 | 66 | 98 |
| 2 | 83 | 69 | 78 |
| 3 | 96 | 53 | 68 |
| 4 | 90 | 44 | 89 |
| 5 | 53 | 45 | 94 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 89 | 72 | 100 |
| 7 | 97 | 78 | 98 |
| 8 | 74 | 50 | 54 |
| $X_j$ | 85.25 | 59.63 | 84.88 |
| $S^2_j$ | 239.93 | 173.41 | 279.84 |

**Lógica de solución**

**Planteamiento de hipótesis:**

$H_0$: Los resultados de los métodos de E–A no son distintos, $m_1 = m_2 = m_3$.

$H_1$: Los resultados de los métodos de E–A difieren entre ellos , $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.

# EJERCICIOS VOLUNTARIOS

**Ejercicio 1**

**Presentación del problema.** Se requiere conocer la interacción verbal en la díada madre-hijo durante un periodo de alimentación de 15 minutos en cuatro zonas marginales en la Ciudad de México. Para ello, se realizó un registro conductual considerando el número de frases emitidas por los integrantes de la díada (véase tabla 11-11). Evalúe si existen diferencias significativas en el número de frases emitidas por las díadas de las cuatro zonas. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-11. Número de frases emitidas por las díadas**

| Zona A | Zona B | Zona C | Zona D |
|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 9 | 8 |
| 8 | 8 | 9 | 8 |
| 8 | 7 | 8 | 10 |
| 9 | 5 | 10 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 9 |
| 9 | 9 | 7 | 8 |
| 8 | 8 | 9 | 10 |

## Ejercicio 2

**Presentación del problema.** Se realiza una investigación cuyo propósito es evaluar la efectividad de un tratamiento en un grupo de jóvenes que han presentado ideación suicida en los últimos seis meses. El programa incluye un tratamiento cognitivo-conductual, así como acciones coordinadas de trabajo autogestivo en el contexto familiar y comunitario. Se trabajó con un diseño pretest-postest-seguimiento. Además, un día antes de que iniciara el tratamiento se aplicó una escala de ideación suicida, en la cual, las puntuaciones altas indican mayor presencia de ideas suicidas. Al término del tratamiento y tres meses después se aplicó de nuevo la prueba psicológica. Las puntuaciones obtenidas en los tres momentos se presentan en la tabla 11-12. Evalúe si el tratamiento fue efectivo para reducir la ideación suicida en los jóvenes. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-12. Puntuaciones de la escala de ideación suicida en mujeres**

| Antes | Después | Seguimiento |
|---|---|---|
| 75 | 50 | 65 |
| 80 | 52 | 68 |
| 88 | 45 | 60 |
| 72 | 35 | 53 |
| 90 | 48 | 63 |
| 86 | 40 | 62 |
| 81 | 43 | 50 |

## Ejercicio 3

**Presentación del problema.** En una investigación se reportó el tiempo de reacción ante la presencia de un estímulo visual de 50 ms de duración que se presentó en el monitor de una computadora. Los participantes reportaron la presencia o no del estímulo después de tres ensayos. La respuesta se midió en segundos después de que los sujetos detectaron o no la presencia del estímulo (tabla 11-13). Averigüe si hay diferencias en el tiempo de reacción entre cada ensayo.

**Tabla 11-13. Tiempo de reacción en segundos ante la presencia del estímulo visual**

| Primer ensayo | Segundo ensayo | Tercer ensayo |
|---|---|---|
| 1.5 | 1.3 | 0.6 |
| 2.1 | 1.7 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 3.7 | 3.2 | 0.6 |
| 2.3 | 2.3 | 0.8 |
| 4.2 | 3.9 | 1.2 |

## Ejercicio 4

**Presentación del problema.** En el Instituto Nacional de Cancerología se trabaja con un protocolo de evaluación e intervención integral para el tratamiento del cáncer de mama; y como parte de éste, se solicita al equipo de trabajo la presentación de un informe de la evaluación psicológica realizada en los últimos tres meses a las mujeres con cáncer de mama, cáncer de ovario y cáncer de piel. El psicólogo encargado de trabajar con el grupo de mujeres aplicó una batería de pruebas que incluye un cuestionario para medir el apoyo social que perciben las mujeres. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 11-14. Evalúe si el apoyo social percibido por las mujeres es diferente de acuerdo con el tipo de cáncer. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-14. Puntuaciones del cuestionario de apoyo social en las mujeres**

| Mama | Ovario | Piel |
|---|---|---|
| 80 | 75 | 90 |
| 110 | 60 | 88 |
| 90 | 68 | 102 |
| 97 | 71 | 94 |
| 102 | 64 | 99 |

## Ejercicio 5

**Presentación del problema.** En un estudio experimental se investigó el efecto de una droga supresora que actúa a través del sistema nervioso. Se utilizaron 10 ratas que fueron expuestas a tres condiciones experimentales: antes de administrar la droga, inmediatamente después de su administración y 30 minutos después de ésta (véase tabla 11-15). Determine si la droga tuvo efectos significativos con los datos promedio de la latencia de una respuesta operante en una caja de condicionamiento.

**Tabla 11-15. Latencia de respuesta en segundos**

| Antes de la droga | Inmediatamente después de la droga | Treinta minutos después de la droga |
|---|---|---|
| 0.6 | 1.5 | 0.5 |
| 0.5 | 2.1 | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 0.6 | 3.7 | 0.8 |
| 0.8 | 2.3 | 0.7 |
| 1.2 | 4.2 | 1.6 |

## Ejercicio 6

**Presentación del problema.** Se realiza una investigación con el propósito de analizar el nivel de Bornout en un hospital de especialidades. Para ello, se selecciona aleatoriamente una muestra que incluye personal de enfermeras de tres departamentos: terapia intensiva, pediatría y urgencias, quienes contestan la Escala de Burnout de Maslow. Los datos obtenidos se presentan en la tabla 11-16. Evalúe si existen diferencias significativas entre los tres grupos de enfermeras en cuanto al nivel de Bornuot. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-16. Puntuaciones de la Escala de Bornout en las enfermeras**

| Terapia intensiva | Pediatría | Urgencias |
|---|---|---|
| 20 | 25 | 23 |
| 18 | 23 | 24 |
| 25 | 25 | 20 |
| 17 | 19 | 19 |
| 22 | 21 | 25 |
| 25 | 22 | 24 |

## Ejercicio 7

**Presentación del problema.** En un estudio longitudinal se investigó si la actitud hacia la ciencia cambia después de terminar una carrera universitaria. A los estudiantes se les preguntó al inicio, a la mitad y al final de su carrera las ideas que tenían acerca de la ciencia para saber si ésta se modifica a través de su paso por la universidad. El cuestionario que se utilizó indica que las puntuaciones más altas significan una actitud más favorable hacia el conocimiento basado en evidencia científica. La escala variaba entre 10 y 50 puntos (véase tabla 11-17). Evalúe si existen diferencias significativas en las actitudes de los estudiantes hacia la ciencia. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-17. Actitud de los estudiantes hacia la ciencia**

| Al inicio de los estudios universitarios | A la mitad de los estudios universitarios | Al finalizar los estudios universitarios |
|---|---|---|
| 12 | 14 | 13 |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 15 | 14 |
| 14 | 18 | 16 |
| 23 | 19 | 21 |
| 21 | 21 | 23 |
| 17 | 15 | 16 |
| 22 | 30 | 25 |
| 31 | 29 | 20 |
| 27 | 21 | 23 |
| 11 | 17 | 14 |

## Ejercicio 8

**Presentación del problema.** El gerente de una empresa panificadora solicita al jefe del departamento de recursos humanos que identifique la causa por la que el último mes disminuyó la producción del departamento de empaque. Debido a que se han recibido reportes de discusiones entre los trabajadores de este departamento, el jefe de recursos humanos decide aplicar un instrumento para medir el clima laboral en las tres estaciones (empaque, etiquetado y revisión) que conforman el departamento. Las puntuaciones obtenidas por los trabajadores de cada estación se presentan en la tabla 11-18. Evalúe si existen diferencias en la percepción del clima laboral entre los trabajadores de las tres estaciones. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-18. Puntuaciones en la percepción del clima laboral**

| Empaque | Etiquetado | Revisión |
|---|---|---|
| 29 | 40 | 45 |
| 33 | 35 | 50 |
| 30 | 38 | 42 |
| 28 | 42 | 38 |
| 35 | 32 | 40 |
| 25 | 40 | 50 |
| 29 | 36 | 48 |
| 30 | 38 | 44 |

## Ejercicio 9

**Presentación del problema.** En una investigación con un diseño longitudinal se reportó la eficacia de una intervención grupal en niños de educación básica que recibieron un curso sobre mejoramiento de habilidades de comprensión de lectura. Antes de implementar el programa se registró la habilidad de comprensión; esto también se hizo tres semanas después de implementar el programa y al final del ciclo escolar. Dicho registró se refiere a la calificación que los niños obtuvieron en una prueba de lectura de textos narrativos (tabla 11-19). Evalúe si existen diferencias significativas en cuanto a la comprensión lectora de los niños. Trabaje con un nivel de significancia de .05.

**Tabla 11-19. Habilidad de comprensión lectora en los niños**

| Antes de la intervención | Tres semanas después de la intervención | Al final del ciclo escolar |
|---|---|---|
| 6 | 8 | 8 |
| 5 | 7 | 8 |
| 6 | 8 | 7 |
| 6 | 9 | 9 |
| 7 | 9 | 10 |
| 5 | 7 | 8 |
| 6 | 8 | 9 |
| 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 |
| 8 | 8 | 9 |

## Ejercicio 10

**Presentación del problema.** En un estudio organizacional sobre satisfacción del consumidor se reportó que el departamento de atención al cliente de una tienda de autoservicio presentaba fallas muy serias en sus procedimientos. Por lo tanto, se implementó una estrategia de intervención motivacional para mejorar la calidad del servicio y se evaluó la permanencia del cambio a los tres y seis meses posteriores a la intervención. En los tres momentos, los clientes evaluaron el servicio de atención al cliente usando una escala Likert (tabla 11-20). Determine si el cambio tuvo un efecto positivo en el funcionamiento de dicho departamento y si este cambio se mantuvo.

**Tabla 11-20. Puntuaciones de la escala de satisfacción del cliente**

| Antes de la intervención | Tres meses después de la intervención | Seis meses después de la intervención |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 50 | 80 | 90 |
| 40 | 75 | 85 |
| 30 | 88 | 90 |
| 25 | 85 | 92 |
| 35 | 89 | 95 |

# Solución a los ejercicios de autocomprobación

***Muestras relacionadas***

**Ejercicio 1**

**Cálculos para la solución**

**Estimación de la variación dentro de condiciones**

**a)** Cálculo de la suma de cuadrados.

$$SC_{dentro} = n \sum_{j=1}^{b} (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

$$SC_{dentro} = 5[(23 - 21.13)^2 + (22.8 - 21.13)^2 + (17.6 - 21.13)^2]$$

$$SC_{dentro} = 93.75$$

**b)** Cálculo de la varianza dentro de condiciones $S^2_{dentro}$ dividiendo $SC_{dentro}$:

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{b-1}$$

$$S^2_{dentro} = \frac{93.75}{3-1}$$

$$S^2_{dentro} = 46.88$$

**c)** Cálculo de la suma de cuadrados debido a la variación intrasujetos:

$$SC_{intra} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{p}_i - \overline{x}_j + \overline{\overline{x}})^2$$

$$SC_{intra} = (10 - 10 - 23 + 21.13)^2 + \cdots + (20 - 25.67 - 17.6 + 21.13)^2$$

$$SC_{intra} = 48.93$$

**d)** Cálculo de la varianza intrasujetos:

$$S^2_{intra} = \frac{SC_s}{(b-1)(n-1)}$$

$$S^2_{intra} = \frac{48.93}{(3-1)(5-1)}$$

$$S^2_{intra} = 6.12$$

**e)** Cálculo del estadístico de prueba *F*.

$$F = \frac{S^2_{dentro}}{S^2_{intra}}$$

$$F = \frac{46.88}{6.12}$$

$$F = 7.66$$

**Determinación de la significancia de las diferencias**

El criterio de rechazo para la hipótesis nula es $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$. Para localizar el valor se consideran tres cantidades, los grados de libertad en el numerador y en el denominador, así como el nivel de $a$. En la tabla 11-21 se muestra que el valor crítico de $F$ para $b - 1 = 3 - 1 = 2$ grados de libertad en el numerador y $(b - 1)(n - 1) = (3 - 1)(5 - 1) = 8$ en el denominador, con $\alpha = .05$, es $F_{crítica} = 4.46$. Dado que $7.66 > 4.46$ la hipótesis nula se rechaza.

**Tabla 11-21. Valor de $F_{crítica}$ para 2 grados de libertad en el numerador, 8 en el denominador y $\alpha = .05$.**

| Grados de libertad en el denominador | Área de la cola superior ($a$) | Grados de libertad en el numerador | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 8 | 0.05 | 5.32 | **4.46** | 4.07 | 3.84 |
| | 0.01 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 |

**Prueba de comparación múltiple LSD de Fisher**

Se observa que entre las condiciones de consumo por primera y tercera vez existe la mayor diferencia, pero no se tiene certeza de la significancia de las demás diferencias. Para esto se aplicará la prueba LSD de Fisher, en primer lugar para las condiciones de primera y tercera vez; enseguida para comparar las condiciones segunda y tercera vez; y finalmente, para la pareja de primera y segunda vez.

Se establecen las hipótesis:

$$H_0: m_1 = m_3.$$
$$H_0: m_1 \neq m_3.$$

**Calcular la mínima diferencia significativa (LSD)**

Con $(b - 1)(n - 1) = (3 - 1)(5 - 1) = 8$ grados de libertad y $\alpha/2 = .025$, en la tabla de la distribución $t$ se observa un valor $t_{0.25} = 2.30$. En los cálculos del análisis de varianza del ejemplo se obtuvo una $S^2_{intra} = 6.12$. Al sustituir en la fórmula:

$$LSD = t_{\alpha/2} \sqrt{S^2_{intra}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.30 \sqrt{6.12 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 3.61$$

**Resultado y su representación**
Criterio de rechazo de con un nivel de confianza de

$$| \bar{x}_i - x_j | > LSD, | \bar{x}_1 - \bar{x}_3 | = | 23 - 17.6 | = 5.4 \geq 3.61$$

Por lo tanto, se rechaza $H_0$ y se concluye que la diferencia entre las condiciones 1 y 3 es significativa.

**Interpretación**
Aplicando el criterio en los siguientes pares de medias:

$$| \bar{x}_2 - \bar{x}_3 | = | 22.8 - 17.6 | = 5.2 > 3.61$$

por lo tanto, se determina que la diferencia de las condiciones 2 y 3 también es significativa. Por último,

$$| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 | = | 23 - 22.8 | = 0.2 < 3.61$$

y se concluye que estas condiciones no son distintas entre sí.

**Ejercicio 2**

**Cálculos para la solución**

Estimación de la suma de cuadrados y de la variación dentro de condiciones:

$$SC_{dentro} = 14[(25.64 - 22.04)^2 + (23.43 - 22.04)^2 + (20.29 - 22.04)^2 + (18.79 - 22.04)^2] = 399.14$$

$$S^2_{dentro} = \frac{399.14}{4 - 1} = 133.05$$

Cálculo de la suma de cuadrados y la variación intrasujetos:

$$SC_{intra} = (21 - 19.25 - 25.64 + 22.04)^2 + \cdots + (21 - 25 - 18.79 + 22.04)^2 = 1950.87$$

$$S^2_{intra} = \frac{1950.87}{(4-1)(14-1)} = 50.02$$

Cálculo del estadístico de prueba $F$:

$$F = \frac{133.05}{50.02} = 2.66$$

**Resultado y su representación**

Determinación de la significancia de las diferencias. Se rechaza la hipótesis nula si $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$. En la tabla de distribución $F$, los grados de libertad en el denominador después de 30 aumentan de 10 en 10; además, se puede observar un valor crítico $2.84 \leq F_{crítica} \leq 2.92$ relacionado con 40 y 30 grados de libertad.

**Interpretación**

Esta evidencia no permite rechazar la hipótesis nula, pues indica que las diferencias entre las condiciones no son significativas.

**Ejercicio 3**

**Cálculos para la solución**

Estimación de la suma de cuadrados y de la variación dentro de condiciones:

$$SC_{dentro} = 10[(6.62 - 7.09)^2 + (7.33 - 7.09)^2 + (7.32 - 7.09)^2] = 3.3$$

$$S^2_{dentro} = \frac{3.3}{3-1} = 1.65$$

Cálculo de la suma de cuadrados y la variación intrasujetos:

$$SC_{intra} = (8.28 - 9.68 - 6.62 + 7.09)^2 + \cdots + (6.17 - 5.46 - 7.32 + 7.09)^2 = 12.17$$

$$S^2_{intra} = \frac{12.17}{(3-1)(10-1)} = 0.68$$

Cálculo del estadístico de prueba *F*:

$$F = \frac{1.65}{0.68} = 2.43$$

**Resultado y su representación**

Determinación de la significancia de las diferencias. Se rechaza la hipótesis nula si $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$. En la tabla de distribución *F*, para 2 y 18 grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente, corresponde un valor crítico $F_{obtenido}$ = 3.55. Dado que 2.43 < 3.55 no se rechaza la hipótesis nula, ya que las diferencias entre las condiciones no son significativas.

**Ejercicio 4**

**Cálculos para la solución**

Estimación de la suma de cuadrados y de la variación dentro de condiciones:

$$SC_{dentro} = 4[(19.25 - 23)^2 + (24 - 23)^2 + (25.75 - 23)^2] = 90.48$$

$$S^2_{dentro} = \frac{90.48}{3-1} = 45.24$$

Cálculo de la suma de cuadrados y la variación intrasujetos:

$$SC_{intra} = (16 - 21.33 - 19.25 + 23)^2 + \cdots + (36 - 31 - 25.75 + 23)^2 = 45\text{-}24$$

$$S^2_{intra} = \frac{45.24}{(3-1)(4-1)} = 6.14$$

Cálculo del estadístico de prueba *F*:

$$F = \frac{45.24}{6.14} = 7.37$$

**Determinación de la significancia de las diferencias**
Rechazar la hipótesis nula si $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$. En la tabla de distribución *F* se observa un valor $F_{obtenido} = 5.14$ para 2 y 6 grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente. Dado que se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las diferencias entre las condiciones son estadísticamente significativas.

**Prueba de comparación múltiple de Bonferroni**
Primero se analiza la diferencia entre

$$\bar{x}_3 \text{ y } \bar{x}_1,$$

seguida de la pareja

$$\bar{x}_2 \text{ y } \bar{x}_1$$

y por último las más cercanas,

$$\bar{x}_3 \text{ y } \bar{x}_2$$

**Planteamiento de hipótesis**

$H_0$: Las medias de las condiciones no son distintas $m_1 = m_3$.

$H_0$: Las medias de las condiciones son distintas, $m_1 \neq m_3$.

**Cálculo del estadístico de prueba**
Se tienen tres posibles comparaciones, por lo que $M = 3$; mientras que la varianza intrasujetos $S^2_{intra}$ 6.14. = A esta varianza se asocian $(b - 1)(n - 1) = (3 - 1)(4 - 1) = 6$ grados de libertad; y los tamaños del grupo en cada condición, debido a la naturaleza de las medidas repetidas, no cambian $n_1 = n_2 = 4$. Para $a = .05$ se tiene que $t_{a/2M} = 3.28$, entonces:

$$BSD = t_{\alpha/2M}\sqrt{S^2_{intra}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 3.28\sqrt{6.14\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} = 5.75$$

**Resultado y su representación**

Criterio de rechazo de $H_0$ con un nivel de confianza de $a$. Se rechaza $H_0$ si

$$| \bar{x}_i - x_j | \geq BSD,$$
$$| \bar{x}_1 - \bar{x}_3 | = | 19.25 - 25.75 | = 6.5 \geq 5.75$$

Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se establece que la diferencia entre estas medias es significativa.

Al aplicar el criterio a las dos comparaciones restantes

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |19.25 - 24| = 4.75 < 5.75 \text{ y } |\bar{x}_3 - \bar{x}_2| = |25.75 - 24| = 1.75 < 5.75,$$

se concluye que ambas diferencias no son significativas.

**Ejercicio 5**

**Cálculos para la solución**

Estimación de la suma de cuadrados y de la varianza entre grupos:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \ (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

$$SC_{entre} = 5(12.2 - 12.27)^2 + 5(17 - 12.27)^2 + 5(7.6 - 12.27)^2 = 220.92$$

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{k-1} = \frac{220.92}{3-1} = 110.46$$

Estimación de la suma de cuadrados y de la varianza dentro de grupos:

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j\,(n_j - 1) = 27.7(5-1) + 13.5(5-1) + 15.8(5-1) = 228$$

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{n_t - k} = \frac{228}{15-1} = 19$$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}} = \frac{110.46}{19} = 5.81$$

**Resultado y su representación**

**Determinación de la significancia de la diferencia**

Para 3 – 1 = 2 grados de libertad en el numerador, 15 – 3 = 12 grados de libertad en el denominador y $a$ = .05, corresponde un valor $F_{crítica}$ = 3.88 (véase la tabla de distribución $F$, Tabla I del Apéndice). Al aplicar el criterio de rechazo para la hipótesis nula, si $F_{obtenido} > F_{crítica}$ se observa que 5.81 ≥ 3.88. Esta evidencia estadística indica que la hipótesis nula no es aceptada. Por lo tanto, se infiere que la capacidad de memoria entre los jóvenes no es la misma en los distintos programas de actividad física.

**Prueba de comparación múltiple Newman-Keuls**

**a)** Ordenar las medias de menor a mayor:

$$\bar{x}_1 = 7.6,\ \bar{x}_2 = 12.2 \text{ y } \bar{x}_3 = 17$$

**b)** Con respecto a las medias ordenadas en el paso anterior, es necesario obtener $Q_{obtenido}$ para cada comparación. Es importante notar que al ordenar las medias, $\bar{x}_1$ corresponde al grupo C, $\bar{x}_2$ al grupo A y $\bar{x}_3$ al grupo B. Entre $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_3$, grupos B y C:

$$Q_{obtenido} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{S^2_{dentro}/n}} = \frac{17 - 7.6}{\sqrt{19/5}}$$

donde $\bar{x}_i$ es la mayor de las medias que se comparan.
Entre $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$, grupos B y A:

$$Q_{obtenido} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{S^2_{dentro}/n}} = \frac{17 - 12.2}{\sqrt{19/5}}$$

Entre $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, grupos A y C:

$$Q_{obtenido} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{S^2_{dentro}/n}} = \frac{12.2 - 7.6}{\sqrt{19/5}} = 2.36$$

**c)** El valor de $Q_{crítica}$ en cada comparación depende de *r*, que es el número de medias entre cada par, incluyendo las que se comparan. De esta manera, tanto en la comparación de los grupos A y C como en la de los grupos B y A, $r = 2$ mientras que para B y C corresponde una $r = 3$.

**Interpretación**

De acuerdo con lo anterior, para $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_3$, grupos B y C se tiene $S^2_{dentro} = 19$, $\alpha = .05$ y $r = 3$, a lo que corresponde un valor $Q_{crítica} = 3.59$. Para $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$, grupos B y A, se tiene una $S^2_{dentro} = 19$, $\alpha = .05$ y $r = 2$, a lo cual le corresponde un valor $Q_{crítica} = 2.96$. Entre $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, grupos A y C, se tienen los mismos datos que en la comparación de B y A; por lo tanto, también $Q_{crítica} = 2.96$.

El último paso consiste en el contraste del estadístico y el valor crítico para determinar la significancia de la diferencia entre grupos.

Entre $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_3$, grupos B y C, $4.82 \geq 3.59$ en este caso se rechaza la hipótesis nula, ya que la diferencia es significativa. Entre $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$, grupos B y A, $2.46 < 2.96$; en este caso no se rechaza la hipótesis nula, ya que no hay diferencia significativa. Para los grupos A y C ( $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$), $2.36 < 2.96$; no se rechaza la hipótesis nula porque la diferencia no es significativa.

***Muestras independientes***

**Ejercicio 6**

**Cálculos para la solución**

Estimación de la suma de cuadrados y de la variación dentro de condiciones:

$$SC_{dentro} = 8[(68.88 - 64.88)^2 + (64.25 - 64.88)^2 + (65.25 - 64.88)^2 + (61.13 - 64.88)^2 = 244.80$$

$$S^2_{dentro} = \frac{244.80}{4 - 1} = 81.60$$

Cálculo de la suma de cuadrados y de la variación intrasujetos:

$$SC_{intra} = (62 - 61.75 - 68.88 + 64.88)^2 + \cdots + (75 - 74.5 - 61.13 + 64.88)^2 = 712.76$$

$$S^2_{intra} = \frac{712.76}{(4 - 1)(8 - 1)} = 33.94$$

Cálculo del estadístico de prueba *F*:

$$F = \frac{81.60}{33.94} = 2.40$$

**Resultado y su representación**

**Determinación de la significancia de las diferencias**
Rechazar la hipótesis nula si $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$. De la tabla de distribución se obtiene una $F_{crítica}$= 2.40.

**Interpretación**
Con base en esta evidencia se acepta la hipótesis nula, ya que no hay diferencias significativas entre las condiciones.

**Ejercicio 7**

**Cálculos para la solución**
Estimación de la varianza entre grupos:

**a)** Cálculo de la suma de cuadrados entre grupos:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \, (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

Se requiere conocer cada uno de los elementos de la fórmula:

Tamaño de cada una de los grupos $n_j$:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 6$$

Cuadrados de las diferencias entre la media de cada uno de los grupos, $x_j$, con respecto a la media de medias, $\bar{x} = (11 + 9.5 + 7)/3 = 9.17$:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 = (11 - 9.17)^2 = 3.35$$
$$(\bar{x}_2 - \bar{x}) = (9.5 - 9.17)^2 = 0.11$$
$$(\bar{x}_3 - \bar{x}) = (7 - 9.17)^2 = 4.71$$

Ahora se multiplica el tamaño de cada grupo por el respectivo cuadrado de las diferencias entre medias, $n_j (x_j - \bar{x})$:

$$n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 = 6(3.35) = 20.1$$
$$n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 = 6(0.11) = 0.66$$
$$n_3 (\bar{x}_3 - \bar{x})^2 = 6(4.71) = 28.26$$

La fórmula indica sumar los resultados anteriores para obtener:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

$$SC_{entre} = 20.1 + 0.66 + 28.26 = 49.02$$

**b)** Cálculo de la varianza entre grupos ($S^2_{entre}$).

Se divide ($S^2_{entre}$) entre los grados de libertad que corresponden al total de las muestras ($k$) menos uno:

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{k - 1}$$

$$S^2_{entre} = \frac{49}{3 - 1} = 24.51$$

**Estimación de la varianza dentro de grupos**

**a)** Cálculo de la suma de cuadrados dentro de grupos:

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j\,(n_j - 1)$$

Los elementos de la fórmula son:
El valor de la varianza de cada uno de los grupos:

$$S^2_j = \frac{(x_j - \overline{x})^2}{n - 1}$$

$$S^2_1 = 4.8, \qquad S^2_2 = 5.1 \qquad \text{y} \qquad S^2_3 = 12$$

El tamaño de cada grupo menos uno:

$$(n_j - 1)$$
$$(n_1 - 1) = 6 - 1 = 5$$
$$(n_2 - 1) = 6 - 1 = 5$$
$$(n_3 - 1) = 6 - 1 = 5$$

Al multiplicar cada varianza por su correspondiente factor $(n_j - 1)$:

$$s^2_1(n_1 - 1) = 4.8(5) = 24$$
$$s^2_2(n_2 - 1) = 5.1(5) = 25.5$$
$$s^2_3(n_3 - 1) = 12(5) = 60$$

La fórmula indica sumar los resultados anteriores para obtener:

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j\,(n_j - 1)$$

$$SC_{dentro} = 24 + 25.5 + 60 = 109.5$$

**b)** Cálculo de la varianza dentro de grupos.

Se divide la suma de cuadrados dentro de grupos entre los grados de libertad, que corresponden a la diferencia entre total de observaciones $(n_t)$ y el total de muestras $(k)$:

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{n_t - k}$$

$$S^2_{entre} = \frac{109.5}{18 - 3} = 7.3$$

**c)** Cálculo del estadístico de prueba.

El estadístico es el cociente de la varianza entre grupos y la varianza dentro de grupos:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}}$$

$$F = \frac{24.5}{7.3} = 3.36$$

**Resultado y su representación**

**Determinación de la significancia de la diferencia**

Como el estadístico de prueba tiene una distribución $F$ con $k - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_t - k$ grados de libertad en el denominador, corresponde utilizar la tabla de distribución $F$ para localizar el valor crítico de $F$. Para $k - 1 = 2$ y $n_t - k = 5$ grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente, y un $\alpha = .05$, se observa un valor $F = 3.68$. En la tabla 11-22, este valor se muestra en la sección correspondiente de la distribución.

**Tabla 11-22. Sección de la tabla de distribución *F* para 2 y 15 grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente, y α=.05.**

| Grados de libertad en el denominador | Área de la cola superior (*a*) | Grados de libertad en el numerador | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 15 | .05 | 4.54 | **3.68** | 3.29 | 3.06 |
| | .01 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 |

Para determinar si la diferencia entre las medias es estadísticamente significativa, se compara el valor $F$ obtenido,

3.36, con el valor crítico de la tabla I (véase Tabla I en el Apéndice), 3.68. Para rechazar la hipótesis nula se aplica la siguiente regla de decisión:

$$F_{obtenido} \geq F_{crítica}$$

**Interpretación**

De acuerdo con los resultados obtenidos, $F_{obtenido} < F_{crítica}$, es decir, 3.36 < 3.68; por lo tanto, la hipótesis nula no se rechaza y se concluye que la diferencia en el número de cigarros consumidos por los trabajadores en las empresas que se estudiaron no es significativamente diferente según el tamaño de éstas.

**Ejercicio 8**

**Cálculos para la solución**

**Estimación de la varianza entre grupos**

Cálculo de la suma de cuadrados y la varianza entre grupos:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \ (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

$$= 8(6.5 - 7.17)^2 + 8(6.63 - 7.17)^2 + 8(8.38 - 7.17)^2 = 17.6$$

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{k-1} = \frac{17.6}{3-1} = 8.8$$

Estimación de la suma de cuadrados y la varianza dentro de grupos:

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j \ (n_j - 1) = 3.43(8-1) + 3.41(8-1) + 2.55(8-1) = 65.73$$

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{n_t - k} = \frac{65.73}{24-3} = 3.13$$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}} = \frac{8.8}{3.13} = 2.81$$

**Resultado y su representación**

**Determinación de la significancia de la diferencia.** El valor crítico que corresponde a 3 – 1 = 2 grados de libertad en el numerador, 24 – 3 = 21 grados de libertad y $a = .05$ es $F_{crítica} = 3.47$. Como $F_{obtenido} < F_{crítica}$, esto es $2.81 < 3.47$ la hipótesis nula no se rechaza.

**Interpretación**

Con base en la evidencia estadística se concluye que la diferencia en la efectividad de los métodos para el aprendizaje temprano de la escritura no es significativa.

**Ejercicio 9**

**Cálculos para la solución**

Estimación de la suma de cuadrados y la varianza entre grupos:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \ (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

$$= 10(93.6 - 99.43)^2 + 10(103.2 - 99.43)^2 + 10(101.5 - 99.43)^2 = 524.80$$

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{k-1} = \frac{524.87}{3-1} = 262.64$$

Estimación de la suma de cuadrados y la varianza dentro de grupos:

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j \ (n_j - 1)$$

$$= 52.49(10 - 1) + 76.62(10 - 1) + 100.72(10 - 1) = 2\,068.47$$

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{n_t - k} = \frac{2\,068.50}{30 - 3} = 76.61$$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}} = \frac{262.4}{76.61} = 3.43$$

**Resultado y su representación**

**Determinación de la significancia de la diferencia.** Para 3 – 1 = 2 grados de libertad en el numerador, 30 – 3 = 27 grados de libertad en el denominador y $a = .05$, corresponde un valor *F*crítica = 2.51 (véase tabla de la distribución *F*, Tabla I del Apéndice). De los resultados anteriores se observa que $F_{obtenida} \geq F_{crítica}$ o $3.43 \geq 2.51$. Estos resultados indican que no hay evidencia estadística para aceptar la hipótesis nula $H_0$.

**Prueba de comparación múltiple LSD de Fisher.** Se inicia el proceso de la prueba con un par de medias, en este caso con la media de la categoría de nutrición deficiente, $m_1$, y la categoría de nutrición regular, $m_2$.

Se establecen las hipótesis:

$$H_0: m_1 = m_2$$

$$H_1: m_1 \neq m_2$$

**Calcular la mínima diferencia significativa**

El factor $t_{a/2}$ de la fórmula proviene de la distribución *t* con $n_t - k$ grados de libertad. Se observa que es una prueba de dos colas, lo cual significa que si no se acepta la hipótesis nula, una de las medias puede ser significativamente menor o mayor que la otra. De manera gráfica, el área de la cola superior es de

$$^{\alpha}/_{2} = .025$$

y al ser una distribución simétrica, el área de la cola inferior también es de .025 para que sumen el valor de $a = .05$. En este caso, para 30 – 3 = 27 grados de libertad, el valor $t_{a/2} = 2.05$ (véase la tabla de distribución *t,* Tabla G del Apéndice). A partir de los resultados obtenidos en este ejercicio del CI de los estudiantes, se sabe que la varianza $S^2_{dentro} = 76.61$ y al comparar las categorías de nutrición deficiente y regular, $n_1 = 10$ y $n_2 = 10$. Es importante notar que si todas las son iguales únicamente se requiere calcular un solo valor de *LSD*.

$$LSD = t_{\alpha/2} \sqrt{S^2_{dentro}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.05 \sqrt{76.61\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)} = 8.03$$

**Interpretación**
**Criterio de rechazo de con un nivel de significancia .** Se rechaza $H_0$ si

$$|\bar{x}_i - x_j| \geq LSD$$
$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |93.6 - 103.2| = 9.6 \geq 8.03$$

Por lo tanto, se rechaza $H_0$ y se concluye que la diferencia entre las categorías de nutrición deficiente y nutrición regular es significativa. Al aplicar el criterio en los demás pares de grupos

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |93.6 - 101.5| = 7.9 < 8.03$$

no se rechaza $H_0$, por lo tanto, la diferencia entre el grupo de nutrición deficiente y buena no es significativa;

$$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |103.2 - 101.5| = 1.7 < 8.03$$

entonces no se rechaza $H_0$ y la diferencia entre las categorías de nutrición regular y buena tampoco se considera significativa. De acuerdo con lo anterior se infiere que la media del CI en los estudiantes de los grupos analizados difiere entre las categorías de nutrición infantil deficiente y regular.

**Ejercicio 10**

**Cálculos para la solución**
Estimación de la suma de cuadrados y la varianza entre grupos:

$$SC_{entre} = \sum_{j=1}^{k} n_j \ (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

$$= 8(85.25 - 76.59)^2 + 8(59.63 - 76.59)^2 + 8(84.88 - 76.59)^2 = 3\,450.88$$

$$S^2_{entre} = \frac{SC_{entre}}{k-1} = \frac{3\,450.88}{3-1} = 1\,725.44$$

Estimación de la suma de cuadrados y la varianza dentro de grupos:

$$SC_{dentro} = \sum_{j=1}^{k} S^2_j \ (n_j - 1)$$

$$= 239.93(8-1) + 173.41(8-1) + 279.84(8-1) = 4\,852.26$$

$$S^2_{dentro} = \frac{SC_{dentro}}{n_t - k} = \frac{4\,852.26}{24-3} = 231.06$$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$F = \frac{S^2_{entre}}{S^2_{dentro}} = \frac{1\,725.44}{231.06} = 7.47$$

**Determinación de la significancia de la diferencia**

Para 3 – 1 = 2 grados de libertad en el numerador, 24 – 3 = 21 grados de libertad en el denominador y $a$ = .05, corresponde un valor $F_{crítica}$ = 3.47 (véase la tabla de la distribución $F$, Tabla I del Apéndice). Entonces, se observa que $F_{obtenido} \geq F_{crítica}$, es decir, 7.47 ≥ 3.47. Por lo tanto, no se tiene evidencia estadística para aceptar la hipótesis nula $H_0$. Se concluye que la efectividad de los distintos métodos de E-A no es la misma.

**Prueba de comparación múltiple HSD de Tukey**

Se sospecha que entre el método actual y el 50AP:

$$(\bar{x}_1 = 85.25 \text{ y } \bar{x}_1 = 59.63, \text{ respectivamente})$$

existe una diferencia estadísticamente significativa, por lo que se iniciará con esta pareja de medias, posteriormente se verificará la significancia entre los métodos nuevos y, por último, entre el método actual y el 80AP.

Se establecen las hipótesis:

$H_0$: La efectividad del método actual y el 50AP no es distinta entre ellos, $m_1 = m_2$

$H_1$: La efectividad de estos métodos es distinta, $m_1 \neq m_2$

**Cálculo del estadístico de prueba**

$$Q_{obtenido} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{S^2_{dentro}/n}}$$

Donde:

$\bar{x}_i$ = la mayor de las medias comparadas.

$x_j$ = la menor de las medias comparadas.

$S^2_{error}$ =estimación de la varianza dentro de grupos.

$n$ = número de sujetos en cada grupo.

$$Q_{obtenido} = \frac{85.25 - 59.63}{\sqrt{231.06/8}} = 4.77$$

**Resultado y su representación**

El criterio de rechazo de $H_0$ para $n_t - k$ grados de libertad (con relación a $S^2_{dentro}$), $k$ grupos y un nivel de significancia $a$, es rechazar $H_0$ si $Q_{obtenido} \geq Q_{crítica}$.

En este ejemplo, el valor $Q_{crítica}$ para 24 – 3 = 21 grados de libertad, $k = 3$ y $a = .05$ se encuentra entre 3.53 y 3.58 (asociados con 24 y 20 grados de libertad, respectivamente) $Q_{crítica} \approx 3.55$. De acuerdo con lo anterior, $4.77 \geq Q_{crítica}$ indica que no hay evidencia estadística para aceptar la hipótesis nula y se establece que el método actual es

estadísticamente más efectivo que el método 50AP.

La siguiente comparación es entre los métodos nuevos:

($\bar{x}_3 = 84.88$ y $\bar{x}_2 = 59.63$, correspondientes al método 80AP y el 50AP, respectivamente).

$$Q_{obtenido} = \frac{84.88 - 59.63}{\sqrt{231.06/8}} = 4.70$$

Al aplicar el criterio se tiene que $4.70 \geq Q_{crítica}$, se rechaza $H_0$ y se concluye que el método 80AP es significativamente más efectivo que el método 50AP.

Por último, para los grupos cuyas medias son semejantes en el método actual y el método 80AP se tiene que:

$$Q_{obtenido} = \frac{85.25 - 84.88}{\sqrt{231.06/8}} = 0.07$$

Como $0.07 < Q_{crítica}$ se declara que no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula y se establece que no hay diferencia entre el método actual y el 80AP.

# Solución a los ejercicios voluntarios

**1.** No hubo diferencias significativas en cuanto al número de frases emitidas por las díadas de las cuatro zonas marginales [$F$ (3, 24) = .75, $p > .05$].

**2.** Se encontraron diferencias significativas entre los tres momentos [$F$ (2, 18) = 57.47, $p < .05$]; mientras que la prueba *post hoc* LSD mostró que la puntuación obtenida por los participantes antes del tratamiento fue mayor que la registrada después de éste y en el seguimiento. Asimismo, la puntuación después del tratamiento fue significativamente menor con respecto al seguimiento. Se concluye que el tratamiento fue efectivo para reducir la ideación suicida; sin embargo, en el seguimiento aumentaron las puntuaciones de los participantes.

**3.** El tiempo de reacción entre ensayos fue significativamente diferente $F$ (2, 8) = 20.33, $p < .01$. La prueba *post hoc* Bonferroni confirmó que no hay diferencias en los tiempos de reacción entre el primero y segundo ensayo; no obstante, esta diferencia fue significativa entre el primero y tercer ensayo.

**4.** Se encontraron diferencias significativas entre los tres grupos [$F$ (2, 12) = 19.04, $p < .05$]. Además, la prueba *post hoc* HSD de Tukey mostró que las mujeres con cáncer de mama o con cáncer de piel perciben un mayor apoyo social en comparación con las mujeres que padecen cáncer de ovario.

**5.** Hubo diferencias significativas en la latencia entre las tres condiciones experimentales: $F$ (2, 8) = 24.56, $p < .01$. La prueba *post hoc* de Bonferroni mostró diferencias entre las latencias antes de la droga e inmediatamente después de administrarla. El efecto inmediatamente después de la droga fue diferente al ocurrido antes de la administración de la droga y de 30 minutos después de ésta. No se encontraron diferencias entre antes de la droga y 30 minutos después.

**6.** El nivel de Bornuot fue similar en las enfermeras de los tres grupos [$F$ (2, 15) = .04, $p > .05$].

**7.** No se encontraron diferencias significativas en la actitud hacia la ciencia en estudiantes universitarios [$F$ (2, 18) = .58, n/s] en diferentes momentos de su formación académica.

**8.** Se encontraron diferencias significativas entre los tres grupos [$F$ (2, 21) = 32.82, $p < .05$]. Además, la prueba *post hoc* HSD de Tukey mostró que los tres grupos percibieron el clima laboral de manera diferente.

**9.** La calificación en la comprensión lectora fue diferente $F$ (2, 18) = 46.30, $p < .01$. La prueba *post hoc* de Bonferroni mostró diferencias entre antes de la intervención y tres semanas después de ésta. Asimismo, se encontraron diferencias entre antes de la intervención y al final del ciclo escolar. No se encontraron diferencias entre tres semanas después de la intervención y al final del ciclo escolar.

**10.** Se encontraron diferencias en la satisfacción del cliente $F$ (2, 8) = 78.82, $p < .01$. La prueba *post hoc* Bonferroni mostró que la satisfacción del cliente fue diferente antes de la intervención y tres meses después de la misma. Asimismo, la satisfacción fue diferente tres y seis meses después de la intervención. Esta diferencia se mantuvo entre antes de la intervención y seis meses después de ésta.

# GLOSARIO

**Distribución normal:** este supuesto se refiere a que cada muestra debe provenir de una población que se distribuye normalmente.

**Homogeneidad de varianzas:** la varianza debida al error experimental debe de ser igual (homogénea) para todas las observaciones.

**Observaciones independientes:** se refiere a que las observaciones dentro de los grupos deben ser independientes o no relacionadas.

**Muestras aleatorias:** los sujetos que se extrajeron de la población se obtuvieron al azar. Para los diseños de medidas repetidas es una ventaja, ya que las observaciones tienen una correlación positiva.

**Varianzas iguales:** la varianza de la diferencia entre dos subpoblaciones cualquiera, es igual a la varianza de la diferencia entre otras dos subpoblaciones (circularidad de la matriz).

# BIBLIOGRAFÍA


Anderson, D., Sweeney, D. y Williams, T. (2012). *Estadística para negocios y economía*, 11a ed.) México: Cengage Learning.

Coolican, H. (2004). *Métodos de investigación y estadística en psicología*, 3a ed. México: El Manual Moderno.

Field, A. (2009). *Discovering Statistics Using SPSS*, 3ª ed. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Gardner, R. (2003). *Estadística para psicología usando SPSS para Windows.* México: Pearson Educación.

Pagano, R. (2011). *Estadística para las ciencias del comportamiento*, 9a ed. México: Cengage Learning.

Wayne, W.D. (2008). *Bioestadística: Base para el análisis de las ciencias de la salud*, 4a ed. México: Limusa Wiley.


1 Es común que al utilizar la prueba de bonferroni se obtengan valores de $t_{a/2M}$ que no se encuentran en la tabla de distribución $t$. Se recomienda utilizar excel para conocerlos, la función que se ofrece es distr.t.inv (probabilidad, grados de libertad). Por ejemplo, para una probabilidad de .01 Y 15 grados de libertad la función se escribe =distr.t.inv(2*0.01, 15), Que arroja un valor $t_{a/2}$=2.602. Observe que, en la fórmula, la probabilidad se multiplica por 2 para que Excel devuelva un valor $t$ de una cola. Este procedimiento se puede comprobar con valores de probabilidad conocidos en la tabla de distribución t (véase distribución $t$ para pruebas de una cola).

# Capítulo 12

# ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL (Regresión lineal simple)

*Arturo Silva Rodríguez, Esperanza Guarneros Reyes, Jorge Regalado Meza*

## ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

## Objetivos y resultados del aprendizaje

Dentro del ámbito de investigación que se estudió en capítulos anteriores, existe otro nivel de análisis en la evaluación de la correlación entre variables, ya que en ocasiones es posible utilizar los resultados de la evaluación como base para realizar explicaciones o pronósticos. En el proceso de investigación, este nivel incorpora la concepción de que en la aparición de un fenómeno se conjuga la influencia de muchas variables, por lo tanto, para explicar y predecir la ocurrencia de éste es necesario tener un conocimiento amplio de las posibles variables que lo producen. En este nivel de análisis, las preguntas que se generan se refieren a la posibilidad de explicar y predecir la ocurrencia de determinado fenómeno, y para ello se toma como base el conocimiento que se tiene de cómo se correlaciona éste con otros fenómenos.

La manera cuantitativa de hacer predicciones sobre la ocurrencia de un fenómeno es a través de los modelos de regresión lineal múltiple. Estos modelos permiten explicar y predecir una puntuación sobre una variable a partir de las puntuaciones de dos o más variables predictoras, así como describir el grado relativo en que una serie de variables contribuyen a explicar un fenómeno.

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de este capítulo es presentar los modelos estadísticos que informan sobre el grado de certeza en la predicción de un fenómeno. Por consiguiente, el alumno aprenderá qué es un modelo lineal, sus componentes, clasificación, cómo ajustar un modelo lineal y valorar su ajuste. El procedimiento estadístico que permite analizar cuantitativamente la información empírica que se obtiene en la explicación y predicción de un fenómeno es la regresión lineal.

Aunque este procedimiento también se utiliza para evaluar investigaciones en donde sólo se tenga una variable predictora (modelo de regresión lineal simple), este capítulo se enfoca en los modelos de regresión lineal múltiple, puesto que la regresión simple es un caso especial de la múltiple.

## QUÉ ES UN MODELO LINEAL

Los modelos de regresión se utilizan principalmente cuando existe interés por estudiar la naturaleza e intensidad de la relación entre variables independientes sobre una dependiente. Es decir, los modelos de regresión lineal múltiple se aplican en situaciones en las que se desea predecir una variable , sobre la base de los valores de un conjunto de variables predictoras o explicativas ($X_1$, $X_2$, … $X_k$). Una de las ventajas de estos modelos es que pueden aplicarse en investigaciones en las que *k* variables hayan sido controladas, así como en aquellas donde se haya tenido un mínimo de control de las mismas.

# Presentación del problema

El uso de modelos de regresión en la investigación presupone la existencia de una concepción multicausal en las explicaciones de los fenómenos. Por ejemplo, un investigador social y de la salud infiere que el índice de delincuencia en las distintas ciudades de la república está relacionado con las condiciones de vida de sus habitantes, tales como ingreso anual por familia, tasa de desempleo, número de habitantes y tipo de vida que ofrece la ciudad (cara o barata). Si bien, no todos estos indicadores de las condiciones de vida están relacionados potencialmente con el índice de delincuencia en una ciudad, el investigador debe estar consciente de que entre más variables considere en la explicación del fenómeno, más difícil será realizar la interpretación de los hallazgos. Por esta razón, no es conveniente incluir dentro del modelo explicativo todo lo que influye en el fenómeno; por el contrario, sólo se deben contemplar aquellas variables que, a partir de conocimientos teóricos o prácticos, se supone que poseen una influencia determinante en la aparición del fenómeno.

La manera de evaluar el grado de la certeza de la suposición multicausal anterior es recolectar medidas de las condiciones de vida de los habitantes y correlacionarlas con alguna medida de delincuencia; por ejemplo, la tasa de homicidios. De esta forma, un primer paso es medir la contribución relativa de cada uno de los indicadores en la explicación y predicción de la tasa de homicidios y, posteriormente, se evalúa la manera en que los indicadores de las condiciones de vida se combinan para producir un efecto en la tasa de homicidios. Se tendrían evidencias que apoyan la suposición de que la tasa de homicidios está determinada de cierta forma por las condiciones de vida de la población, cuando se encontrara, por ejemplo, una correlación muy grande entre los indicadores y la tasa de homicidios, pero al mismo tiempo la correlación entre los indicadores de las condiciones de vida fuera cercana a cero. Esto se debe a que conforme aumenta la correlación entre las variables explicativas o predictoras, es menor la magnitud en que éstas ayudan a explicar o predecir el fenómeno.

El ejemplo anterior se ilustra por medio de la figura 12-1, la cual muestra por medio de círculos la relación entre los indicadores de las condiciones de vida y la tasa de homicidios.

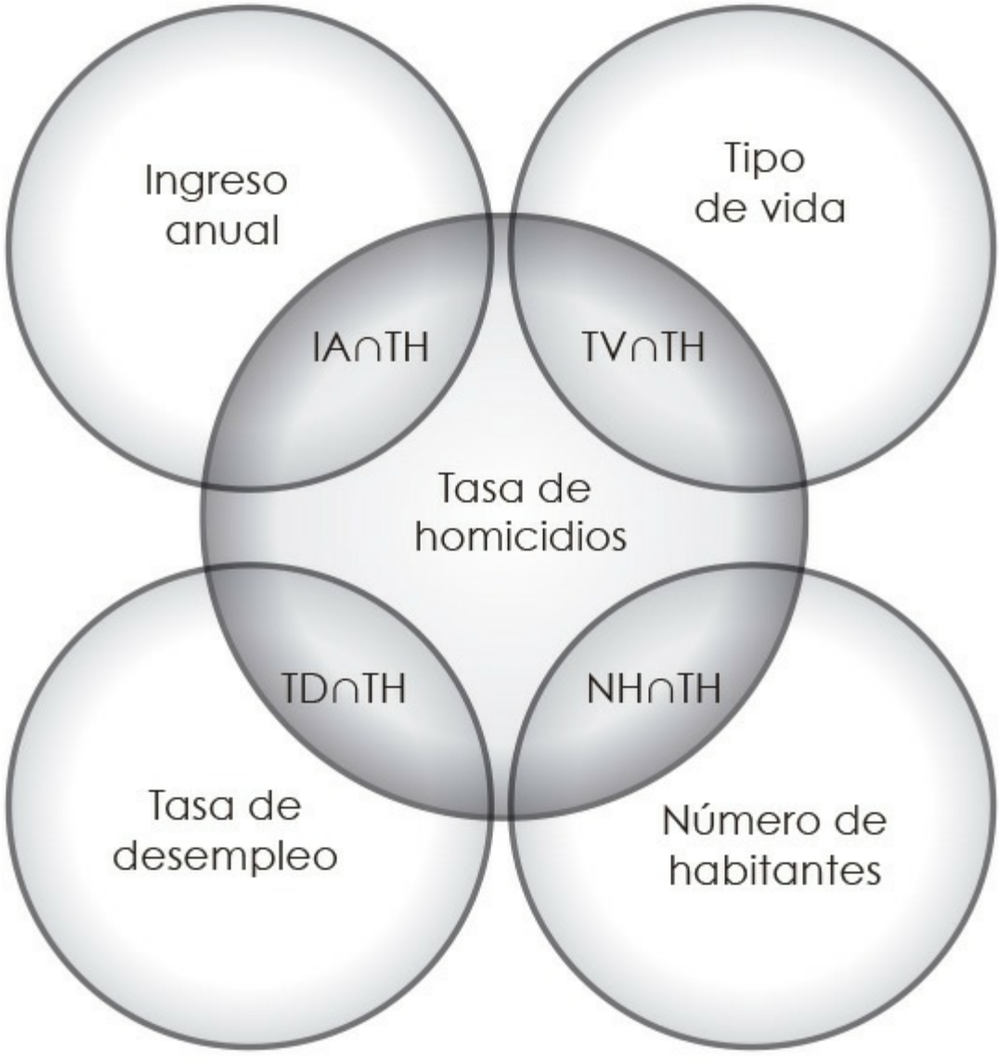



**Figura 12-1.** Representación de la relación entre los indicadores de las condiciones de vida y la tasa de homicidios.

El círculo central de la figura representa la tasa de homicidios; mientras que los indicadores de las condiciones de vida se indican por medio de los círculos restantes. El grado en que las condiciones de vida explican la tasa de homicidios está en función de la porción de área que esta variable comparte con las otras. Por ejemplo, en la figura 12-1 se observa que existe cierta cantidad de varianza de la tasa de homicidios que es compartida con la varianza del ingreso anual por familia, la tasa de desempleo, el número de habitantes y el tipo de vida, es decir, las áreas: *IA*∩*TH*; *TD*∩*TH*; *NH*∩*TH*; y *TV*∩*TH*. La porción que más se traslapa se encuentra en la intersección de la variable ingreso anual con la tasa de homicidios (área *IA*∩*TH*); en tanto que la porción que menos se traslapa está en el área *TV*∩*TH*. De esta manera, es posible decir que de acuerdo con esta figura, la variable que explica en mayor grado la tasa de homicidios es el ingreso anual por familia, y la que menos la explica es la variable tipo de vida. Esta interpretación es muy sencilla, puesto que no existen áreas donde se traslapen las variables explicativas o predictoras. Sin embargo, cuando se encuentran áreas donde se traslapan las variables explicativas o predictoras, como se muestra en la figura 12-2, la interpretación de los hallazgos se complica.

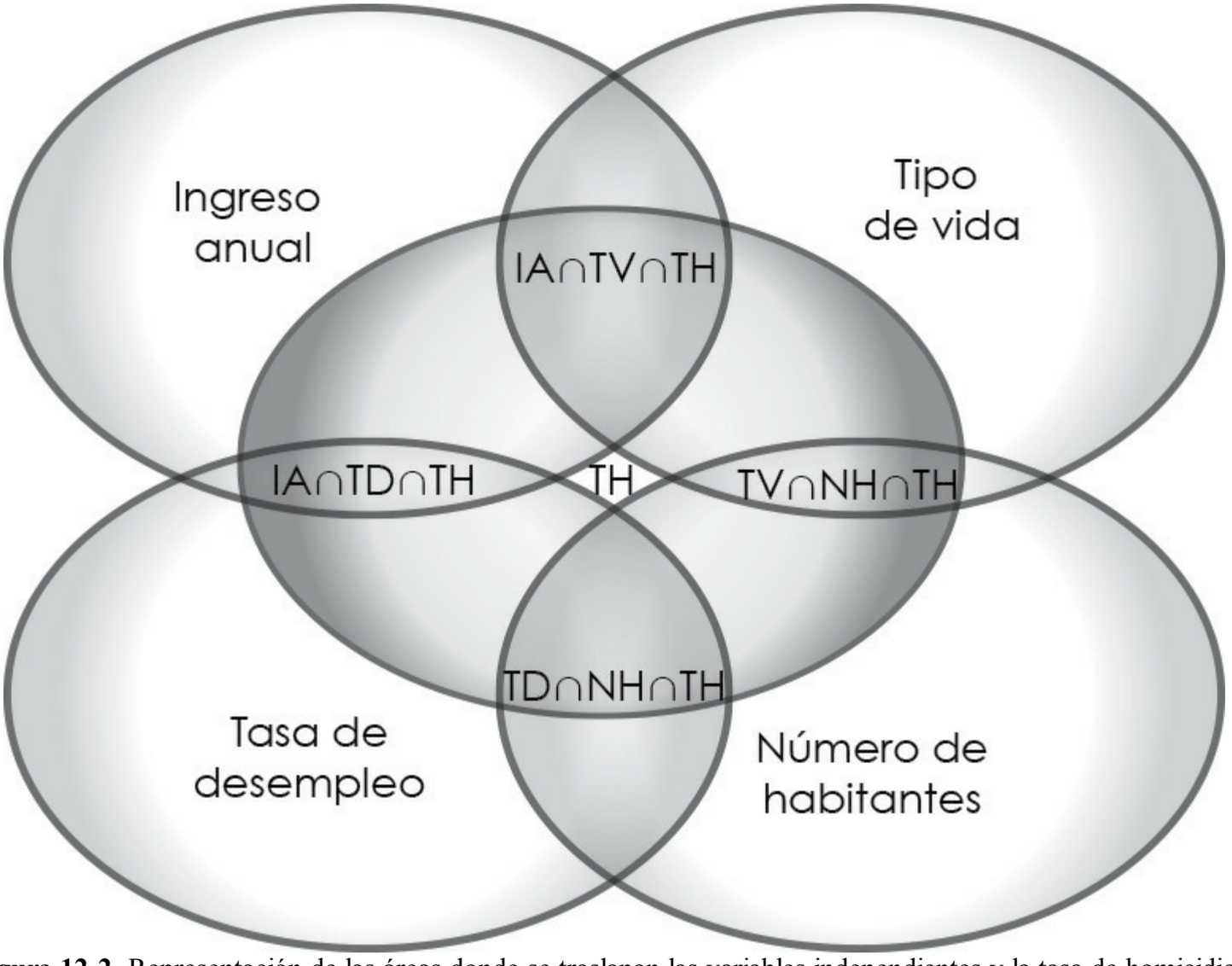



**Figura 12-2.** Representación de las áreas donde se traslapan las variables independientes y la tasa de homicidios.

En la figura 12-2 se observa que además de las porciones compartidas por los indicadores de las condiciones de vida con la tasa de homicidios, existen otras áreas: *IA∩TV∩TH*; *TV∩NH∩TH*; *NH∩TD∩TH* y *TD∩IA∩TH*, las cuales representan la proporción de varianza de la tasa de homicidios que es explicada por medio de la interacción de primer orden entre los indicadores de las condiciones de vida.

La existencia de esta interacción dificulta la interpretación de los hallazgos debido a que en este caso no sólo es necesario determinar la magnitud con la que los indicadores explican la tasa de homicidios, sino que también es preciso delimitar la manera en que la interacción entre los indicadores influye en la explicación de dicha variable. La situación predictora ideal es aquella donde las correlaciones entre las variables independientes o indicadores y la variable dependiente son grandes, mientras que la correlación entre las variables independientes es cercana a cero.

Así, por medio de los modelos de regresión lineal múltiple es posible dar respuesta a las preguntas: ¿cuál es la porción de la varianza de la tasa de homicidios que explica los indicadores? ¿cuál es la porción de la varianza de la

variable dependiente que es explicada por medio de la interacción de los indicadores?

Los procedimientos involucrados en todos los análisis de regresión pueden agruparse dentro de los siguientes rubros: a) identificación del modelo de regresión, b) estimación de los parámetros del modelo, c) evaluación del modelo elegido y d) aplicaciones del modelo en la predicción de valores de la variable criterio. De esta manera, la explicación del procedimiento regresión lineal múltiple se hará bajo esta estructura.

# COMPONENTES DE UN MODELO LINEAL

Como ya se mencionó, los modelos de regresión lineal múltiple tienen como finalidad, determinar la proporción de la varianza de una variable que es explicada por dos o más variables predictivas, así como hacer predicciones acerca de la aparición de un fenómeno a partir del conocimiento que se tiene de algunas variables correlacionadas con el fenómeno. Así, el propósito fundamental de los modelos de regresión lineal múltiple es inferir, a partir de un conjunto de variables independientes o predictoras, el comportamiento de un fenómeno. La representación simbólica del modelo general de regresión lineal múltiple para *k* variables adquiere la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Donde:

$\beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ = coeficientes de regresión.

$X_1, X_2, \ldots X_k$ = variables independientes.

$\varepsilon$ = componente de error del modelo de regresión.

La identificación de un modelo de regresión particular se realiza a partir del establecimiento de la supuesta relación funcional que guarda cada una de las variables independientes con la variable dependiente. Es decir, se toma la decisión con base en la relación que la variable dependiente guarda con la variable independiente particular. Además del establecimiento del tipo de relación funcional es necesario determinar si existen bases suficientes para suponer que dos o más variables se combinan para producir un efecto sobre la variable dependiente. Esto es, si existen efectos de interacción.

## Revisión de los supuestos del modelo

En la mayoría de los casos, cuando se hace un análisis de regresión lineal se busca generalizar los hallazgos a la población, más que sólo describir las relaciones observadas. Con el propósito de derivar inferencias válidas de una muestra a la población, es necesario que los datos analizados cumplan con los supuestos subyacentes a los modelos de regresión lineal múltiple.

Para ejemplificar estos supuestos se retomará el estudio de la tasa de homicidios, en el cual se estableció la hipótesis de que dicha variable está determinada en cierta manera por el ingreso anual de las familias, la tasa de desempleo, el número de habitantes y el tipo de vida. Además, se supone que estas cinco variables se miden en una muestra de 20 ciudades de la República mexicana y se obtiene los resultados hipotéticos que se muestran en la tabla 12-1. La primera columna representa el número secuencial de la ciudad estudiada, la segunda columna de valores representa la tasa de homicidios por cada 100 000 habitantes, la tercera columna corresponde al número de habitantes en miles, en la cuarta columna se presenta el porcentaje de familias cuyos ingresos anuales son menores al salario

mínimo, la quinta columna muestra los valores de la tasa de desempleo y la última representa el tipo de vida en la ciudad (1 = vida cara; 0 = vida barata).

**Tabla 12-1. Datos hipotéticos del estudio de la tasa de homicidios**

| Ciudad | Tasa de homicidios Y | Número de habitantes $X_1$ | Ingreso anual $X_2$ | Tasa de desempleo $X_3$ | Tipo de vida $X_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.7 | 1 255 | 24.9 | 24.9 | 0 |
| 2 | 7.2 | 3 243 | 21.3 | 21.3 | 0 |
| 3 | 40.7 | 7 895 | 14.3 | 14.3 | 1 |
| 4 | 5.3 | 587 | 26.3 | 26.3 | 0 |
| 5 | 15.8 | 6 720 | 18.1 | 18.1 | 1 |
| 6 | 6.7 | 2 804 | 22.4 | 22.4 | 0 |
| 7 | 9.6 | 5 201 | 19.1 | 19.1 | 0 |
| 8 | 33.7 | 7 462 | 16.5 | 16.5 | 1 |
| 9 | 6.1 | 1 943 | 24.7 | 24.7 | 0 |
| 10 | 6.5 | 2 386 | 23.1 | 23.1 | 0 |
| 11 | 7.5 | 3 568 | 20.5 | 20.5 | 0 |
| 12 | 23.9 | 7 293 | 16.9 | 16.9 | 1 |
| 13 | 8.2 | 4 295 | 20.2 | 20.2 | 0 |
| 14 | 36.2 | 7 639 | 16.5 | 16.5 | 1 |
| 15 | 9.1 | 4 764 | 19.2 | 19.2 | 0 |
| 16 | 28.9 | 7 365 | 16.5 | 16.5 | 1 |
| 17 | 7.9 | 3 931 | 20.2 | 20.2 | 0 |
| 18 | 21.8 | 7 206 | 17.2 | 17.2 | 1 |
| 19 | 11.1 | 5 939 | 18.6 | 18.6 | 0 |
| 20 | 18.7 | 7 126 | 17.9 | 17.9 | 1 |
| Totales | 310.6 | 98 622 | 394.4 | 394.4 | 8 |

En la tabla 12-1 se observa que a cada ciudad le corresponden cinco valores que se denotan como:

$$(X_{1,1}; X_{1,2}; X_{1,3}; X_{1,4}; Y_1)$$
$$(X_{2,1}; X_{2,2}; X_{2,3}; X_{2,4}; Y_2)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(X_{19,1}; X_{19,2}; X_{19,3}; X_{19,4}; Y_{19})$$
$$(X_{20,1}; X_{20,2}; X_{20,3}; X_{20,4}; Y_{20})$$

Cuando el análisis consiste en una variable dependiente y cuatro independientes, el modelo de regresión lineal

múltiple adquiere la siguiente forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$$

Para que los hallazgos encontrados en la muestra puedan generalizarse a la población de donde ésta proviene, es necesario que los datos analizados cumplan con los supuestos de la regresión lineal múltiple. Un primer supuesto es que las variables explicativas o predictoras se miden sin error, lo cual quiere decir que se desprecian los errores de medida que se hayan cometido al recolectar los datos. Por lo tanto, aunque todos los instrumentos que miden variables continuas presentan algún tipo de error, en el estudio se consideran los datos obtenidos como si no se hubiera cometido ningún error en su recolección.

Una segunda suposición establece que los valores de la variable *Y* o dependiente son estadísticamente independientes. Esto es, la tasa de homicidios para una combinación particular de $X_1$, $X_2$, … $X_k$, de ninguna manera depende de los valores de elegidos en otra combinación particular. En términos probabilísticos, dada la tasa de homicidios 1 para una combinación particular de las variables predictoras, la probabilidad de ocurrencia de la tasa de homicidios en la ciudad 2 para otra combinación particular es igual a la tasa de homicidios en esa misma ciudad. Es decir:

$$p(Y_2/Y_1) = p(Y_2)$$

El supuesto de independencia se rompe principalmente cuando se toman medidas repetidas de una misma unidad experimental; por ejemplo, cuando se toman medidas en diferentes momentos de las variables en una sola ciudad.

Otra suposición establece que para cada combinación particular de $X_1$, $X_2$, … $X_k$, la distribución de es normal con:

$$\text{Mediana; } \mu_{y/x}$$
$$\text{Varianza; } \sigma^2_{y/x}$$

Esto significa que no todas las ciudades con el mismo número de habitantes, el mismo ingreso anual, la misma tasa de desempleo y el mismo nivel de vida tendrán la misma tasa de homicidios. En lugar de esto existe una distribución normal que contiene la tasa real de ocurrencia de homicidios para cada combinación particular.

Como parte de la suposición anterior existe otra llamada de homocedasticidad, la cual establece que todas las varianzas de las diferentes distribuciones de *Y* deben ser iguales. Esto es, que las varianzas de las distribuciones para cada combinación particular de $X_1$, $X_2$, …$X_k$ tienen que ser iguales, lo cual implica que:

$$\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \ldots \sigma^2_k$$

Aunque esta suposición parece muy restrictiva, su violación tiene efectos nocivos en la interpretación de los resultados sólo cuando existe una desviación muy marcada de la homocedasticidad.

La última y más importante de la suposiciones establece que las medias de las distribuciones normales de *Y* están en función lineal con cada combinación de $X_1$, $X_2$, …$X_k$. Es decir, que todos los valores de $\mu_{y/x}$ caen sobre una línea recta de regresión poblacional, lo cual se representa simbólicamente como:

$$\mu_{x/y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

en donde: $b_0$, $b_1$, $b_2$,…$b_k$ son los parámetros de la población y el término $X_k$ es una variable aleatoria con media igual a cero y varianza $\sigma^2$. Por lo común, el término e se le conoce como componente de error del modelo y matemáticamente se representa como:

$$\varepsilon = Y - (\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k)$$

o bien, como la diferencia entre el valor observado de $Y$, y la media de distribución para esa combinación de $X_1$, $X_2$, …$X_k$. Esto es:

$$\varepsilon = Y - \mu_{x/y}$$

En ambas fórmulas se ve claramente que el término e evalúa la cantidad en que $Y$ se desvía de la media de la distribución de $Y$ de la cual se extrae.

Existen un gran número de técnicas estadísticas encaminadas a probar si un conjunto de datos cumple con esta serie de supuestos. La forma en que se puede usar esta técnica estadística no se aborda en este capítulo.

# Clasificación de los modelos lineales

Una vez que se ha seleccionado el conjunto de variables que se suponen están relacionadas de cierta manera con la variable dependiente o el fenómeno de interés, el siguiente paso es determinar cuál es el mejor subconjunto de esas $k$ variables independientes que explican en mayor grado la varianza de la variable dependiente; también se requiere encontrar el modelo de regresión que mejor describe la relación entre la variable dependiente y las $k$ variables independientes. Con el propósito de explicar todos los pasos involucrados en el procedimiento de regresión lineal múltiple se tomarán los datos hipotéticos de la tabla 12-2.

Como se observa en la tabla 12-2, fueron seleccionadas cuatro variables para explicar la tarea de homicidios de 20 ciudades. La selección de las variables se hizo arbitrariamente; sin embargo, en situaciones reales el criterio de elección de variables debe basarse tanto en consideraciones teóricas como empíricas, así como en aspectos prácticos. No obstante, seguir cualquiera de los criterios anteriores no garantiza que en una investigación se hayan incluido todas las variables importantes para explicar el fenómeno. De la misma manera, es posible que no todas las variables seleccionadas tengan un papel relevante en la explicación de dicho fenómeno. Por lo tanto, se debe construir un modelo de regresión lineal múltiple lo más adecuadamente posible con los datos disponibles.

Es posible construir una gran variedad de modelos de regresión con el mismo conjunto de variables. Por ejemplo, con las cuatro variables del estudio de la tasa de homicidios se pueden construir 15 modelos diferentes, como se muestra en la tabla 12-2.

**Tabla 12-2. Cantidad de modelos de regresión posibles cuando se tienen cuatro variables independientes**

| Modelos de regresión | | Representación simbólica | Enunciado lógico |
|---|---|---|---|
| Una sola variable independiente (cuatro modelos) | 1 | $X_1 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1)$ | La tasa de homicidios está en función del número de habitantes |
| | 2 | $X_2 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_2)$ | La tasa de homicidios está en función del ingreso anual |
| | 3 | $X_3 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_3)$ | La tasa de homicidios está en función de la tasa de desempleo |
| | 4 | $X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del tipo de vida |
| Dos variables independientes (seis modelos) | 1 | $X_1, X_2 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1 + x_2)$ | La tasa de homicidios está en función de número de habitantes y el ingreso anual |
| | 2 | $X_1, X_3 \rightarrow Y$ | La tasa de homicidios está en función de número de habitantes y la tasa de desempleo |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $y = f(x_1 + x_3)$ | |
| | 3 | $X_1, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del número de habitantes y el tipo de vida |
| | 4 | $X_2, X_3 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_2 + x_3)$ | La tasa de homicidios está en función del ingreso anual y la tasa de desempleo |
| | 5 | $X_2, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_2 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del ingreso anual y el tipo de vida |
| | 6 | $X_3, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_3 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función de la tasa de desempleo y el tipo de vida |
| Tres variables independientes (cuatro modelos) | 1 | $X_1, X_2, X_3 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1 + x_2 + x_3)$ | La tasa de homicidios está en función del número de habitantes, del ingreso anual y de la tasa de desempleo |
| | 2 | $X_1, X_2, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1 + x_2 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del número de habitantes, del ingreso anual y del tipo de vida |
| | 3 | $X_1, X_3, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1 + x_3 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del número de habitantes, de la tasa de desempleo y del tipo de vida |
| | 4 | $X_2, X_3, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_2 + x_3 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del ingreso anual, de la tasa de desempleo y del tipo de vida |
| Cuatro variables independientes (un solo modelo) | 1 | $X_1, X_2, X_3, X_4 \rightarrow Y$<br>$y = f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ | La tasa de homicidios está en función del número de habitantes, del ingreso mensual, de la tasa de desempleo y del tipo de vida |

Aunque existen procedimientos que permiten calcular todos los posibles modelos de regresión de un conjunto de variables independientes, no es conveniente hacer esto, ya que la gran cantidad de resultados que se generan hace muy difícil la tarea de interpretar los hallazgos. Los procedimientos que se utilizan con más frecuencia, aunque no permiten calcular todos los posibles modelos, son el método de avance, conocido por su nombre en inglés (*forward*), el método de retroceso (*backward*) y el método escalonado o de pasos sucesivos (*stepwise*). Más adelante se explicará la forma en que funciona cada uno de estos tres métodos.

# CÓMO AJUSTAR UN MODELO LINEAL

Con la finalidad de mostrar el procedimiento para ajustar un modelo de regresión lineal a los datos de un investigación se tomará como ejemplo uno de los cuatro modelo de regresión de una variable; en particular, el número uno establece que la tasa de homicidios está en función del número de habitantes.

Para elegir el modelo lineal es necesario considerar cuál es el que mejor representa la relación entre las variables, y aún falta determinar cuál es la recta que mejor se ajusta a los datos. Existen varios procedimientos para ajustar el modelo lineal; no obstante, el modelo más común para obtener la recta de regresión de la muestra es el de mínimos cuadrados. En términos matemáticos, una línea recta se puede describir mediante una ecuación de la forma:

$$Y = \beta_0 - \beta_1 X_1$$

donde los símbolos $\beta_0$ y $\beta_1$ son los valores constantes para una línea recta dada, $\beta_0$ recibe el nombre de ordenada al

origen y toma el valor del punto en que la recta cruza el eje de las ordenadas; y $\beta_1$, que se denomina pendiente de la recta, toma el valor de la inclinación de ésta respecto al eje de las abscisas. Mientras que $Y$ y $X_1$ son las variables de la ecuación que representan la variable predictora y la predicha, respectivamente; en este caso, el número de habitantes ($X_1$) y la tasa de homicidios ($Y$).

Para obtener los valores de las constantes $\beta_0$ y $\beta_1$ es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones, las cuales se conocen como ecuaciones normales:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \beta_1 X_i^2$$

En el último reglón de la tabla 12-3 se muestran los valores requeridos para sustituirlos en las ecuaciones normales.

**Tabla 12-3. Suma de cuadrados y productos cruzados**

| Ciudad | Tasa de homicidios | Número de habitantes | $X^2_1$ | $Y * X_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.7 | 1 255 | 1 575 025 | 7 153.5 |
| 2 | 7.2 | 3 243 | 10 517 049 | 23 349.6 |
| 3 | 40.7 | 7 895 | 62 331 025 | 321 326.5 |
| 4 | 5.3 | 587 | 344 569 | 3 111.1 |
| 5 | 15.8 | 6 720 | 45 158 400 | 106 176 |
| 6 | 6.7 | 2 804 | 7 862 416 | 18 786.8 |
| 7 | 9.6 | 5 201 | 27 050 401 | 49 929.6 |
| 8 | 33.7 | 7 462 | 55 681 444 | 251 469.4 |
| 9 | 6.1 | 1 943 | 3 775 249 | 11 852.3 |
| 10 | 6.5 | 2 386 | 5 692 996 | 15 509 |
| 11 | 7.5 | 3 568 | 12 730 624 | 26 760 |
| 12 | 23.9 | 7 293 | 53 187 849 | 174 302.7 |
| 13 | 8.2 | 4 295 | 18 447 025 | 35 219 |
| 14 | 36.2 | 7 639 | 58 354 321 | 276 531.8 |
| 15 | 9.1 | 4 764 | 22 695 696 | 43 352.4 |
| 16 | 28.9 | 7 365 | 54 243 225 | 212 848.5 |
| 17 | 7.9 | 3 931 | 15 452 761 | 31 054.9 |
| 18 | 21.8 | 7 206 | 51 926 436 | 157 090.8 |
| 19 | 11.1 | 5 939 | 35 271 721 | 65 922.9 |
| 20 | 18.7 | 7 126 | 50 779 876 | 133 256.2 |
| Total | 310.6 | 98 622 | 593 078 108 | 1 965 003 |

Al sustituir los valores se obtienen las siguientes ecuaciones normales:

$$310.6 = 20\beta_0 + 98622\beta_1$$

$$1965003 = 98622\beta_0 + 593078108\beta_1$$

Estas ecuaciones pueden resolverse utilizando cualquier método para obtener los valores y parámetros $\beta_0$ y $\beta_1$. Aquí se utilizará la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. La regla consiste en representar, por medio de dos matrices, el sistema de ecuaciones llamadas normales: una para los coeficientes de las constantes y otra para los términos independientes. Esto es:

Matriz de coeficientes

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

Matriz de términos independientes

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Para obtener los parámetros del modelo lineal a partir de estas reglas es necesario calcular tres determinantes: el determinante general , el y el El determinante de un ordenamiento matricial 2 × 2 se define mediante el siguiente procedimiento:

$$|W| = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = w_{11} \cdot w_{22} - w_{21} \cdot w_{12}$$

En el ejemplo, el determinante se obtiene por:

$$|D_{\beta}| = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 98622 \\ 98622 & 593078108 \end{vmatrix} = (20)(593078108) - (98622)(98622)$$

$$= 2135263276$$

El determinante es igual a:

$$|D_{\beta_0}| = \begin{vmatrix} z_1 & w_{12} \\ z_2 & w_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 310.6 & 98622 \\ 1965003 & 593078108 \end{vmatrix} = (310.6)(593078108) - (1965003)(98622)$$

$$= -9582465521$$

Por último, el determinante para es igual a:

$$|D_{\beta_1}| = \begin{vmatrix} w_{11} & z_1 \\ w_{21} & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 310.6 \\ 98622 & 1965003 \end{vmatrix} = (20)(1965033) - (98622)(310.6)$$

$$= 8668066.8$$

Por lo tanto:

$$\beta_0 = \frac{|D_{\beta_0}|}{|D_g|} = \frac{-9582465521}{2135263276} = -4.488$$

$$\beta_1 = \frac{|D_{\beta_1}|}{|D_g|} = \frac{8668066.8}{2135263276} = 0.004$$

Así, el valor de las constantes es:

$$\beta_0 = -4.488 \text{ y } \beta_1 = 0.004$$

por lo que la ecuación lineal que describe la relación entre la tasa de homicidios y el número de habitantes adquiere la forma:

$$\hat{Y} = -4.488 + 0.004X$$

Entonces se puede decir que la tasa de homicidios está en función de una constante de –4.488 más un efecto multiplicativo de *X* en 0.004.

Nótese que se agrega una test a *Y* con la finalidad de indicar un valor calculado a partir de la recta de mínimos cuadrados. El hecho de que el valor de $\beta_0$ sea positivo informa que la línea recta cruza el eje de las ordenadas (*Y*) por debajo del origen exactamente en –4.488. Por otro lado, como el valor de $\beta_1$ es positivo, la recta se extiende de la parte inferior izquierda de la gráfica a la parte superior derecha; además, para cada incremento unitario en el número de habitantes (*X*), la tasa de homicidios (*Y*) crece una cantidad igual a 0.004.

Para dibujar la recta en un plano cartesiano, en Excel y SPSS existe un comando que con sólo seleccionar un botón de radio traza automáticamente la línea recta. En caso que se desee trazar la recta sin usar algún software, sólo es necesario calcular dos coordenadas, de preferencia tomando el número más pequeño de la variable X, así como el número más grande y se sustituyen en la ecuación lineal para calcular los correspondientes valores de *Y*. En el ejemplo que se está desarrollando:

$$X_{menor} = 587 \text{ y } X_{mayor} = 7895$$

y al hacer la sustitución se tiene:

$$\hat{Y} = 4.488 + 0.004(587) = -2.14$$

para $X_{mayor} = 7895$:

$$\hat{Y} = 4.488 + 0.004(7895) = 27.092$$

En la figura 12-3 se muestran la recta y los valores observados.

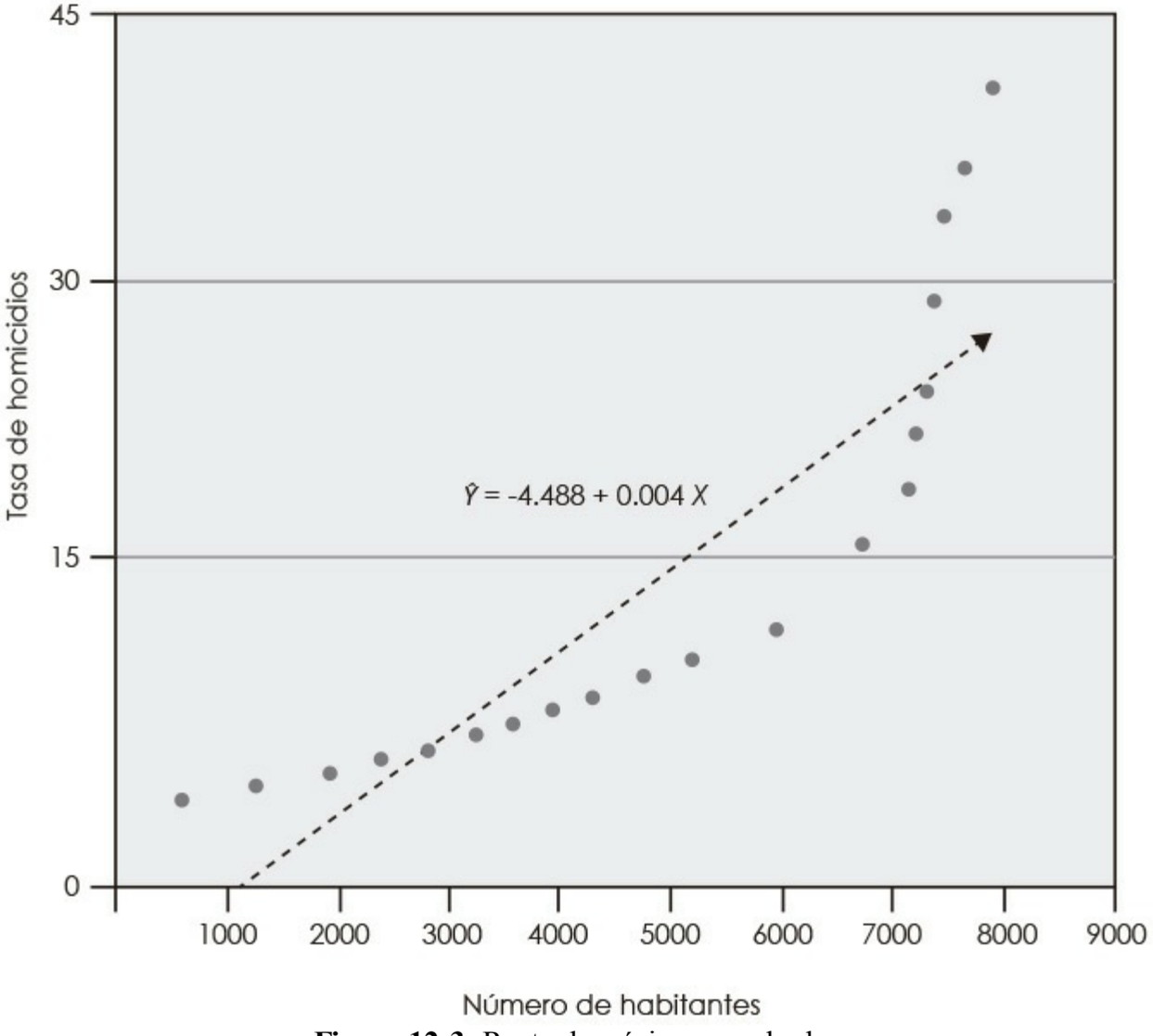



**Figura 12-3.** Recta de mínimos cuadrados.

La línea obtenida se conoce como recta de mínimos cuadrados, en el sentido de que la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales corresponde a los datos observados respecto a esa línea recta, es menor que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos correspondientes a los datos, respecto de cualquier otra línea recta.

# Selección del modelo

En la sección anterior sólo se calculó un modelo de regresión con una sola variable independiente que corresponde a la expresión $X_1 \rightarrow Y$; $y = f(x_1)$, y cuyo enunciado lógico corresponde a la expresión de una sola variable: "la tasa de homicidios está en función del número de habitantes". En el cálculo de cada modelo de regresión existen varios métodos, y como ya se había mencionado, los más frecuentes son el de avance o hacia adelante, de retroceso o hacia atrás y el de paso a paso o de pasos sucesivos y de forzar la entrada.

En general, el método de avance o hacia adelante consiste en ir seleccionando una variable en los diferentes

momentos de evaluación. Por otro lado, el método de retroceso o hacia atrás comienza con la integración de todas las variables dentro del modelo y, después, en cada momento de la evaluación se van eliminando las variables menos significativas. Con respecto al método paso a paso o de pasos sucesivos, éste es una combinación de los dos anteriores. Con la finalidad de explicar de manera detallada estos métodos se construyó la tabla 12-4, la cual fue elaborada después de realizar un análisis de regresión con los datos del estudio de la tasa de homicidios. Esta aclaración es pertinente, puesto que el formato de presentación de esta tabla no corresponde a la forma en que aparecen los resultados en pantalla al ejecutar un análisis de regresión lineal por medio de un paquete estadístico.

**Tabla 12-4. Matriz de correlación y métodos de construcción del modelo de regresión lineal múltiple**

**Matriz de correlación**

| | **Tasa de homicidios Y** | **Número de habitantes $X_1$** | **Ingreso anual $X_2$** | **Tasa de desempleo $X_3$** | **Tipo de vida $X_4$** |
|---|---|---|---|---|---|
| Tasa de homicidios | 1 | 0.842 | –0.830 | 0.953 | 0.875 |
| Número de habitantes | 0.842 | 1 | –0.976 | 0.942 | 0.851 |
| Ingreso anual | –0.830 | -0.976 | 1 | –0.944 | –0.771 |
| Tasa de desempleo | 0.953 | 0.942 | –0.944 | 1 | 0.869 |
| Tipo de vida | 0.875 | 0.851 | –0.771 | 0.869 | 1 |

**Método de avance (forward)**

| **Variables en el modelo** | **Razones F parciales** | | | | **Razón F global** | **Valor de $R^2$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | | |
| $X_3$ | | | 178.744 | | 178.744 | 0.909 |
| $X_2$, $X_3$ | | 16.325 | 96.407 | | 173.628 | 0.953 |
| $X_2$, $X_3$, $X_4$ | | 12.932 | 45.215 | 0.323 | 111.247 | 0.954 |

**Criterio de significación de inclusión F = 3.84**

**Método de retroceso (backward)**

| **Variables en el modelo** | **Razones F parciales** | | | | **Razón F global** | **Valor de $R^2$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | | |
| $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ | 0.248 | 1.044 | 34.122 | 0.550 | 79.578 | 0.955 |
| $X_2$, $X_3$, $X_4$ | | 12.932 | 45.215 | 0.323 | 111.247 | 0.954 |
| $X_2$, $X_3$ | | 16.325 | 96.407 | | 173.628 | 0.953 |

**Criterio de significación de exclusión F = 2.71**

En la sección superior de la tabla 12-4 se muestra la matriz de correlación de las cinco variables del estudio. En la parte intermedia se presentan los resultados de la construcción del modelo de regresión por medio del método de avance. Por último, en la parte inferior se encuentran los resultados obtenidos con el método de retroceso.

***Método de avance (forward)***

Este procedimiento consiste básicamente en evaluar la importancia relativa de cada variable dentro del modelo de regresión lineal múltiple. La primera variable que se incluye en la evaluación para ver si puede formar parte del modelo es la que tiene una correlación positiva o negativa más estrecha con la variable dependiente. En la tabla 12-4 se observa que la variable que tiene una correlaciona más alta con la tasa de homicidios ($Y$) es el desempleo, la correlación es de 0.953. Así, la primer variable que entra al modelo de regresión es $X_3$= Tasa de desempleo. Dado que sólo se considera una variable en el modelo, éste adquiere la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

la estimación de los parámetros del modelo proporcionan los siguientes resultados:

$$\text{Tasa de homicidios} = -47.043 + 9.023X_3 + \varepsilon$$

con una $F$ global de 178.744. Para determinar la importancia relativa de la variable incluida en la explicación de la variable dependiente, se compara el valor de la razón $F$ global con un criterio. En los datos de la tabla 14-4 se tomó como criterio de inclusión el valor de 3.84 de la distribución $F$. En caso de que el valor de la razón $F$ global sea significativo, la variable evaluada se incluye en la ecuación de regresión y el procedimiento continúa. En el ejemplo descrito, el valor de la razón $F$ global es mayor que el valor del criterio de inclusión (178.744 y 3.84), lo cual indica que la tasa de desempleo tiene una importancia relativa; sin embargo, es significativa en la explicación de la tasa de homicidios.

Una vez que la variable ya forma parte del modelo de regresión, se examinan las razones $F$ parciales de las variables que no se han incluido en el modelo, en el ejemplo $X_1$, $X_2$ y $X_4$, . La variable con la razón $F$ parcial más grande se selecciona como candidata para ingresar al modelo, y en este ejemplo se trata de la variable ingreso anual. Con el valor de $F$ parcial para esta variable es 16.325, y a su vez este valor es mayor que el valor de $F$ criterio (3.84), mientras que la variable ingreso anual se integra al modelo de regresión lineal múltiple dando como resultado un modelo con dos variables independientes que tiene los siguientes parámetros estimados:

$$\text{Tasa de homicidios} = -131.362 + 2.260X_2 + 14.754X_3 + \varepsilon$$

Debido a que la última variable considerada para su inclusión cumplió con el criterio de selección, ésta se integra al modelo y el procedimiento de evaluación continúa. La siguiente variable que se elige es el tipo de vida, ya que ésta tiene la razón $F$ parcial más grande de las variables que no han sido consideradas. Sin embargo, como se observa en la tabla 12-4, el valor de la $F$ parcial es menor que el valor de $F$ criterio ($0.323 < 3.84$), por lo tanto, la magnitud de explicación de esta variable de la tasa de homicidios no es estadísticamente significativa. Por tal razón, el tipo de vida no se incluye en el modelo de regresión y como consecuencia de ello, el procedimiento de selección de variables se detiene y en el modelo de regresión lineal múltiple sólo quedan dos variables independientes, que son la tasa de desempleo y el ingreso anual familiar.

***Método de retroceso o eliminación (backward)***

En el método de avance (*forward*), la evaluación inicia considerando una variable independiente en la ecuación y, después, en cada paso se evalúa la pertinencia de incluir una nueva variable; por el contrario, el método de retroceso inicia considerando todas las variables en la ecuación de regresión y de manera secuencial se va evaluando la pertinencia de eliminar del modelo cada una de las variables. En otras palabras, en el método de avance se van incluyendo variables en cada momento, mientras que el método de retroceso se orienta a la eliminación de variables

que son innecesarias en la explicación de la variable dependiente.

Así, el método de retroceso comienza con la construcción de un modelo de regresión que contiene todas las variables independientes y posteriormente se van suprimiendo del modelo las variables que cumplen con el criterio de eliminación. El criterio consiste en eliminar aquella variable cuya razón *F* parcial sea mayor a un valor determinado de la distribución *F*. El criterio utilizado con los datos de la tabla 12-4 fue $F = 2.71$. Para el ejemplo que se está desarrollando, al considerarlas cuatro variables manejadas se genera el siguiente modelo de regresión lineal múltiple:

$$\text{Tasa de homicidios} = -104.104 - 0.001X_1 + 1.495X_2 + 13.506X_3 + 2.928X_4 + \varepsilon$$

El procedimiento de eliminación inicia evaluando si la razón *F* parcial de la variable que tiene el valor más pequeño es estadísticamente significativa. En caso de que la razón *F* parcial de dicha variable sea mayor o igual que el valor de la *F* criterio, el procedimiento de eliminación se detiene y se concluye que todas las variables consideradas por el modelo de regresión lineal múltiple tienen una importancia relativamente significativa en la explicación de la variable dependiente. Por el contario, si la razón *F* parcial de esta variable es menor al valor de la *F* criterio, dicha variable se elimina del análisis y se vuelve a construir un nuevo modelo de regresión. Para el ejemplo en estudio, en la tabla 12-4 se observa que la razón *F* parcial más pequeña en un modelo con todas las variables es 0.248, que corresponde al número de habitantes ($X_1$). Esta razón *F* parcial es menor que la *F* criterio, por lo tanto, la variable que representa dicho valor se elimina del modelo. Es decir, la variable tipo número de habitantes no contribuye de manera significativa a la explicación de la tasa de homicidios, por lo que se elimina del modelo de regresión.

De acuerdo con lo anterior se vuelve a construir un modelo de regresión sin considerar la variable número de habitantes, lo que da como resultado la siguiente ecuación de regresión:

$$\text{Tasa de homicidios} = -124.384 + 2.156X_2 + 13.959X_3 + 1.467X_4$$

Las razones *F* parciales que se generan para este modelo se muestran en la tabla 12-4, como se puede observar, el valor más pequeño es *F* parcial = 0.323, que corresponde a la variable tipo de vida ($X_4$), y puesto que este valor es menor que la *F* criterio, esta variable también se elimina del modelo. Así, el nuevo modelo que se genera es el siguiente:

$$\text{Tasa de homicidios} = -131.362 + 2.260X_2 + 14.754\ X_3 + \varepsilon$$

La razón *F* parcial más pequeña de las dos variables que permanecen en el modelo es 16.325, que pertenece a la variable ingreso anual. Este valor de *F* parcial es mayor que el valor de *F* criterio ($16.325 > 2.71$), por lo que es posible concluir que existen bases cuantitativas para suponer que dicha variable contribuye significativamente a la explicación de la tasa de homicidios. En consecuencia, la variable no se elimina del modelo y el procedimiento de evaluación finaliza.

Es importante hacer notar que en este caso se obtuvieron modelos de regresión idénticos a través del modelo de avance y retroceso. Sin embargo, en ocasiones esto no ocurre, ya que el modelo final puede depender del método utilizado para construir el modelo de regresión lineal múltiple. En tales situaciones, la decisión más acertada es elegir el modelo que mejor se ajuste a las expectativas teóricas y empíricas que subyacen a la investigación, una vez que se haya hecho un análisis minucioso de las posibles violaciones a los supuestos de la regresión lineal múltiple. Otra acción por la que se podría optar es aplicar el método escalonado o paso a paso (*stepwise*) en la construcción del modelo de regresión, ya que en ésta se usan procedimientos tanto de avance como de retroceso.

***Método secuencial o paso a paso (stepwise)***

El método secuencial o paso a paso es una versión perfeccionada de los dos métodos anteriores, puesto que permite evaluar en cada paso las variables que han sido incorporadas al modelo en momentos previos. Es posible que una variable que se integra al modelo al principio de la evaluación, en etapas posteriores sea superflua debido a su relación con las variables que se han integrado posteriormente al modelo.

Este método de selección de variables independientes es una combinación del método de avance y con el método de retroceso. El procedimiento consiste en seleccionar la primera variable de la misma manera que en el método de avance. Si la variable no cumple con el requisito de inclusión, el análisis de resultados termina sin ninguna variable en la ecuación de regresión. En cambio, si la variable cumple con el requisito de inclusión, la segunda variable se selecciona tomando como base aquella que tenga la razón *F* parcial más grande. En caso de que esta segunda variable cumpla con el criterio de inclusión se construye un modelo que contemple las dos variables aceptadas. Es en este punto donde el método paso a paso difiere del método de avance, pues una vez que se han incluido por lo menos dos variables en el modelo se aplica simultáneamente un criterio de eliminación. Es decir, se evalúa si la primera variable incluida dentro del modelo pasa el criterio de eliminación. En caso de que así sea, se selecciona una tercera variable y se aplica el criterio de avance. En caso de que dicha variable cumpla con el requisito, en automático opera un procedimiento de eliminación y así sucesivamente. El procedimiento finaliza cuando una variable no cumple con el criterio de inclusión, o bien, con el criterio de exclusión. Cuando una variable cumple con el criterio de inclusión pero no con el de exclusión, el procedimiento de construcción del modelo también finaliza. Esto decir, el procedimiento termina en el momento en que una variable no cumple con el criterio de inclusión, o bien, con el criterio de exclusión.

De acuerdo con el método secuencial, la secuencia de evaluación de las variables del ejemplo de la tasa de homicidios consiste en la selección de la primera variable que se incluirá en el modelo siguiendo la lógica del método de avance. Así, la primera variable evaluada sería el desempleo, puesto que posee el índice de correlación más alto con la variable dependiente (tasa de homicidios). Como ya se mencionó, el grado en que la tasa de homicidios explica el desempleo es estadísticamente significativo, por lo que la variable ingresa al modelo. Enseguida, la variable ingreso anual se añade al modelo, ya que su razón *F* parcial es significativa. Es precisamente en este punto cuando el procedimiento de construcción del modelo sufre una variación, ya que en lugar de seguir evaluando la posibilidad de incluir más variables, se aplica un criterio de eliminación como el del modelo de retroceso. Esta variación consiste en que antes de determinar la inclusión de una tercera variable, es necesario examinar si la razón *F* parcial de la primera variable (desempleo) no ha sufrido cambios drásticos como consecuencia de la inclusión de la segunda variable (ingreso) que hacen necesario eliminarla del modelo. Dado que la variable desempleo ya está en el modelo, la razón *F* parcial para la variable ingreso anual es 16.325 (tabla 12-4), lo cual excede el criterio de eliminación que es de 2.71, por lo que la variable ingreso anual no se elimina del modelo de regresión lineal múltiple. Una vez hecho esto, el siguiente paso consiste en evaluar la posibilidad de que la siguiente variable con la razón *F* parcial más grande sea integrada al modelo. En el ejemplo, la siguiente variable es tipo de vida; sin embargo, como el valor de 0.323 es menor que 3.84 (criterio de inclusión), ésta no cumple con el criterio de selección, y por lo tanto, dicha variable no se añade. Como consecuencia de lo anterior, el proceso de construcción del modelo finaliza.

# EVALUACIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN

Aunque los diferentes métodos disponibles construyen el modelo de regresión lineal múltiple con la mínima intervención del investigador, para la toma de decisiones es necesario considerar, de acuerdo con el mejor modelo de regresión, información adicional sobre la forma en que la inclusión o eliminación de alguna variable afecta tanto a los

parámetros del modelo como a sus índices estadísticos asociados.

Existe una serie de análisis cuantitativos complementarios que le permiten al investigador conocer el comportamiento del modelo de regresión lineal de una manera más fina. Además, hay por lo menos tres conjuntos de índices estadísticos: uno de ellos enriquece el análisis de los coeficientes de regresión, otro permite hacer una análisis más minucioso de los residuos y el tercero comprende una serie de alternativas con las que se tiene la posibilidad de aumentar el conocimiento de las variables involucradas en la construcción del modelo de regresión deseado.

El primer conjunto de alternativas, llamado coeficientes de regresión, permite visualizar los coeficiente de regresión $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2 \ldots \beta_k$, el error típico de las $\beta_k$, los coeficientes beta tipificados, los valores *t* de Student para las $\beta_k$ y el valor de significación bilateral de *t*. Los intervalos de confianza son de 95% para cada coeficiente de regresión o de una matriz de covarianzas. La última opción de esta serie de análisis es la matriz de varianza-covarianza de los coeficientes de regresión con covarianzas dentro y fuera de la diagonal. Esta alternativa también muestra una matriz de correlaciones.

El segundo conjunto de índices estadísticos comprende los análisis del ajuste del modelo que incluyen los siguientes estadísticos de bondad de ajuste: *R* múltiple, *R* cuadrado y *R* cuadrado corregida, error típico de la estimación y la tabla de análisis de varianza. La siguiente opción, cambio en *R* cuadrado, permite visualizar el cambio en *R* cuadrado, el cambio de *F* y la significación del cambio de *F*.

En el tercer conjunto de índices estadísticos se encuentra el conjunto de residuos que tienen sólo dos alternativas: la primera es la opción que permite visualizar la prueba de Durbin-Watson para la correlación serial de los residuos; y la segunda, es una opción que permite construir los diagramas para los casos que cumplan con el criterio de selección (los valores atípicos por encima de desviaciones estándar).

El conjunto de estadísticos utilizados para evaluar el modelo de regresión lineal pueden agruparse o clasificarse dentro de dos rubros: en el primero están los estadísticos que evalúan el modelo en forma general; y en el segundo rubro se encuentran los que evalúan las características particulares del modelo. A partir de esta agrupación, los dos apartados siguientes se abocan a presentar la forma en que se interpretan dichos índices estadísticos.

# Evaluación general del modelo de regresión

Una parte importante de cualquier procedimiento estadístico que construye un modelo a partir de los datos observados, es determinar a qué grado el modelo explica las características cuantitativas que poseen los datos. Dos factores influyen en la manera que un modelo se ajusta a los datos. El primer factor es la presencia de una gran variabilidad en los datos; el segundo factor es la existencia de violaciones por parte de los datos de algunas suposiciones que subyacen a dicho modelo. Por lo tanto, es importante determinar el efecto por separado de cada uno de estos factores, ya que cada uno afecta de diferente manera el grado en que un modelo sirve para describir un evento. En este apartado y el siguiente se presenta la forma en que la variabilidad afecta el grado de ajuste del modelo a los datos. En otro apartado se explica la forma en que la violación de algunas suposiciones del modelo de regresión afecta el proceso de construcción de dicho modelo.

### *Coeficiente de determinación*

Una medida usada comúnmente para evaluar la bondad de ajuste a un modelo lineal es el coeficiente de determinación ($R^2$), el cual se presenta en los resultados de salida del procedimiento de regresión lineal como *R* cuadrado (*R square*) (tabla 12-4). Existen varios modos de interpreta este coeficiente; sin embargo, es común considerarlo como el grado en que los datos observados se ajustan a un modelo lineal. De esta forma, si todas las

observaciones caen sobre el modelo construido, $R^2$ es igual a 1; pero en caso de que no exista una relación lineal sobre las variables independientes y la dependiente, el valor de $R^2$ es igual a 0. Nótese que el coeficiente de determinación es una medida de la bondad de ajuste con un modelo particular de regresión y por lo tanto una $R^2$ con valor cerca de cero o cero, no necesariamente indica que no hay una relación entre las variables, lo único que quiere decir es que no hay una relación lineal entre ellas.

De esta manera, de acuerdo con los resultados de la tabla 12-4, es posible mencionar que cuando la tasa de desempleo es incorporada al modelo de regresión explica aproximadamente 90.9% de la tasa de homicidios. Recordar que en la tabla 12-4 se encuentran los resultados obtenidos en el primer paso de la aplicación del método hacia adelante o de avance (*forward*), en el cual se incluyó la tasa de desempleo en el modelo de regresión lineal múltiple. La raíz cuadrada positiva del coeficiente de determinación es llamada coeficiente *R* múltiple, que no es otra cosa que la correlación existente entre todas las variables contempladas en un paso particular del proceso. En los datos de la tabla 12-4 el valor de la *R* múltiple es 0.909.

Como se sabe, la $R^2$ de la muestra es un estimador óptimo de qué tan bien el modelo se ajusta a la población. Sin embargo, el modelo no siempre se ajusta a la población tan bien como lo hace con la muestra de la cual se derivó. Por tal motivo, hoy es una práctica común hacer una corrección al valor de $R^2$, la cual se conoce como $R^2$ ajustada. Este coeficiente de determinación ajusta el número de observaciones y el número de variables independientes incluidas en el modelo de regresión mediante la siguiente ecuación:

$$R_a^2 = \frac{(n-1)R^2 - k}{n-1-k}$$

En el procedimiento de regresión lineal, la etiqueta que se usa generalmente para representar este ajuste es la *R* cuadrada corregida (*Adjusted R Square*). En los datos de la tabla 12-4 el valor de $R^2$ corregida es 0.903. Otro índice estadístico es el error estándar que refleja la magnitud en que el modelo de regresión se aleja de los datos observados. De esta forma, conforme el modelo se aleja de los datos reales el error estándar tenderá a incrementarse; en el ejemplo, el error estándar adquirió una magnitud de 3.551.

***Análisis de varianza con el modelo de regresión lineal***

El análisis de varianza del modelo de regresión permite evaluar, por medio de criterios probabilísticos, la hipótesis de que no existe una relación lineal entre las variables independientes y dependientes, lo cual implicaría que la pendiente del plano de regresión es igual a cero. Las hipótesis estadísticas resumen de la siguiente manera:

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_0 \neq \beta_1 \neq \beta_2 \neq \ldots \beta_k \neq 0$$

El análisis de varianza supone que la variación total observada en los datos de una investigación es producto de un componente sistemático, así como de un componente de error. En este sentido, el análisis de varianza aplicado a la regresión lineal múltiple retoma esta misma suposición, sólo que ahora se parte de que la varianza observada en los datos del estudio puede representarse por la cantidad de varianza que explica el modelo de regresión lineal múltiple y una magnitud de varianza que no es explicada por el modelo. Esto es:

$$V_{total} = V_{(explicada\ por\ el\ modelo)} + V_{inexplicada}$$

Al primer componente del segundo miembro también se le conoce como varianza debida a la regresión y el segundo se denomina varianza residual.

Los grados de libertad asociados a la suma de cuadrados debida a la regresión son iguales al número de parámetros menos 1, y los grados de libertad para la suma de cuadrados residual son el número de casos en el estudio con valores válidos en todas las variables menos el número de parámetros. La media cuadrática corresponde a la división de la suma de cuadrados con sus correspondientes grados de libertad. Por último, la razón *F* es la proporción que existe entre la media de cuadrados debida a la regresión sobre la media de cuadrados residual. Para tomar una decisión acerca de la existencia de una relación lineal entre las variables, se compara el valor de probabilidad asociado a la razón *F* con el nivel de significación elegido por el investigador. En tal caso, si el valor de probabilidad es menor o igual al nivel de significación elegido es posible concluir que las evidencias empíricas fortalecen la suposición de que las variables se relacionan linealmente.

El coeficiente de determinación ($R^2$), *R* múltiple, $R^2$ corregida, el error estándar y el análisis de varianza se realizan en cada paso de la construcción del modelo. Por lo tanto, siempre se debe tener presente qué método se utilizó en la construcción del modelo de regresión lineal múltiple para interpretar los resultados de una tabla de análisis de varianza, puesto que el método hacia adelante se integra en cada paso una nueva variable, mientras que el método hacia atrás se va eliminando una variable en cada paso.

# Evaluación particular del modelo de regresión

La evaluación general del modelo es un aspecto importante del proceso de análisis de regresión lineal múltiple, ya que permite conocer la forma en que el modelo de regresión, en conjunto, sirve para representar las relaciones que existen entre las diferentes variables de una investigación. No obstante, es conveniente llevar el análisis más allá de la simple evaluación general del modelo y conocer el comportamiento específico de los componentes que conforman el modelo de regresión lineal múltiple. En conclusión, la evaluación del modelo de regresión también debe arrojar información acerca de la importancia relativa que tiene cada variable en la conformación final de dicho modelo. A continuación se presentan algunos de los índices estadísticos que proporciona este tipo de información.

### *Coeficiente de determinación $R^2$ de cambio*

Una manera de evaluar la importancia relativa de una variable independiente es considerar la magnitud del incremento de $R^2$ cuando esta variable se incluye en el modelo. Este incremento se estima a partir de la siguiente fórmula:

$$R^2_{\text{cambio}} = R^2 + R^2_{(1)}$$

donde $R^2_{(1)}$ es el coeficiente de determinación cuando todas las variables independientes, excepto la considerada, están incluidas en el modelo. La magnitud de cambio en $R^2$ es un reflejo de la importancia relativa de la variable que se incluye en determinado paso de la construcción del modelo. De esta forma, una variable que posea una importancia relativa muy grande en la explicación de la variable dependiente se verá reflejada en un cambio de $R^2$ muy pronunciado.

En este mismo contexto, donde se evalúa la importancia relativa que tienen las variables independientes en la explicación de la variable dependiente, existe otro problema al que se le debe dar respuesta. Este problema consiste en determinar el número óptimo de variables independientes que se deben incluir en el modelo. Al examinar la tabla 12-4 se observa que el valor de la $R^2$ nunca presenta decrementos; al contrario, cada vez que se agrega una variable al modelo el valor incrementa. En el método de avance la $R^2$ fue de 0.909 y en el segundo paso fue de 0.953; este

hecho sucede en todo análisis de regresión. Sin embargo, esto no significa necesariamente que un modelo con más variables independientes describe con mayor exactitud la forma en que ocurre el fenómeno en la población.

Si bien es cierto que en la medida que se van incrementando las variables en el modelo el valor de $R^2$ también aumenta, este hecho no necesariamente hace que el error estándar de estimación se decremente. Además, cada vez que se añade una nueva variable al modelo, en la suma de cuadrados residual se pierde un grado de libertad que es ganado por la suma de cuadrados debida a la regresión. En este sentido, incluir un gran número de variables independientes en el modelo de regresión lineal múltiple no es buena estrategia, a menos que existan razones teóricas y prácticas muy poderosas que justifiquen dicha inclusión. Esto se debe básicamente a que la inclusión de variables relevantes en un modelo ocasiona que incremente el error estándar de todos los estimadores, sin que en ningún momento se logre mejorar la explicación de la variación de la variable dependiente.

***Evaluación de los parámetros estimados por el modelo***

El hecho de rechazar la hipótesis nula $H_0$: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_k = 0$ en la evaluación general del modelo, implica que la pendiente del plano de regresión es diferente de 0 y no permite conoce cuál es el peso con el que contribuye cada una de las variables incluidas en el modelo. Para conocerlo se debe contrastar cada parámetro en particular por medio de las siguientes hipótesis:

$$H_0: \beta_0 = 0 \text{ para } k = 1 \ldots p$$

$$H_0: \beta_0 \neq 0 \text{ para } k = 1 \ldots p$$

Esta forma de evaluar la importancia relativa de una variable en la explicación de un fenómeno se basa en la determinación de la relevancia de los parámetros estimados por el modelo. En este caso, la hipótesis nula significa que la variable $X_k$ no mejora la predicción de $Y$ sobre la regresión obtenida con los $k - 1$ variables restantes. Por ejemplo: se desea conocer si la tasa de desempleo es más importante que el ingreso anual por familia, cuando estas variables se usan por separado en la explicación de la tasa de homicidios.

La razón $F$ obtenida por cada variable es un indicador de la importancia relativa, de hecho como se vio anteriormente, la magnitud que adquiere esta razón determina si una variable se incluye o se elimina del modelo de regresión lineal múltiple. El índice por omisión que presenta el procedimiento de regresión lineal que informa la importancia relativa de la variable es el estadístico $t$ de Student y la razón $F$. Estas dos pruebas son equivalente, dado que: $t^2 = F$. La ecuación que se utiliza para evaluar la importancia relativa de cada variable en el modelo es el estadístico de contraste $t$ de Student, el cual adquiere la siguiente forma:

$$t = \frac{\beta_k}{S_{\beta_k}}$$

donde el denominador es $S_{\beta\ k}$, que corresponde al error típico del coeficiente $\beta_k$. La regla de decisión que se utiliza para determinar el peso relativo que tiene cada una de las variables en la determinación del modelo de regresión consiste en rechazar la hipótesis nula, en caso de que el valor de probabilidad asociado al estadístico de contraste $t$ de Student sea menor que el nivel de significación $\alpha$ elegido.

# USOS DEL MODELO DE REGRESIÓN

Como se ha visto a lo largo de este capítulo, el análisis de regresión permite conocer la forma en que un conjunto de variables se agrupa para explicar determinado fenómeno. No obstante, el análisis de regresión lineal múltiple no se limita exclusivamente a este campo, ya que a partir del modelo de regresión construido es posible predecir el valor que tomará $Y$, dada una combinación particular de $X_1, X_2 \ldots, X_k$, o bien, se puede estimar la media de la subpoblación del conjunto de valores de $Y$ que se supone existen en cualquier combinación particular. Por ejemplo, si determinada ciudad tiene una tasa de desempleo de 6.9 y el nivel de ingreso anual por familia es de 15.3; entonces, de acuerdo con el modelo de regresión lineal múltiple, el valor predicho de la tasa de homicidios será:

$$\hat{Y} = -131.362 + 2.260(15.3) + 14.754(6.9) = 5.019$$

lo cual significa que para una tasa de desempleo de 6.9 y un nivel de ingresos por familia de 15.3 se esperaría una tasa de homicidios de 5.019. Sin embargo, a veces es más conveniente establecer un intervalo de predicción y se espera obtener la calificación verdadera. El intervalo de predicción del 100(1 - a) % para el valor predicho de $X_j$ esta dado por:

$$X_j \pm t_{(1-a/2)} S_{\text{predicción}}$$

Para obtener mayor información acerca de las predicciones y estimaciones de intervalo, tanto de valores particulares como de las medias de las subpoblaciones de $Y$, se recomienda revisar las siguientes obras: Bowerman y O'Connell (1979); Daniels (1979); Hair *et al*. (2007); Johnson y Wichern (1988); Kleinbaum *et al*. (1998) y Silva (2002).

# EJERCICIOS

## Ejercicios de autocomprobación

**1.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿la inteligencia social es un buen predictor del mejor desempeño laboral? Realice una predicción cuando $X = 16$.

| X<br>Inteligencia social | Y<br>Desempeño laboral |
|---|---|
| 25 | 5 |
| 15 | 4 |
| 10 | 3 |
| 25 | 5 |
| 20 | 4 |
| 23 | 4 |
| 2 | 1 |
| | |

| | |
|---|---|
| 5 | 2 |
| 7 | 3 |
| 9 | 3 |
| 10 | 3 |
| 15 | 4 |

**Solución:**

Correlación = 0.934, $m_y$ = 0.14, $b_y$ = 1.52.

Predicción cuando $X$ = 16, $Y'$ = 3.71.

**2.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas que más se preocupan tienen menor tolerancia a la incertidumbre? Realice una predicción cuando $X$ = 6.

| Preocupación | Tolerancia a la incertidumbre |
|---|---|
| 10 | 2 |
| 10 | 1 |
| 2 | 9 |
| 3 | 8 |
| 5 | 7 |
| 9 | 1 |
| 8 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 5 |
| 10 | 1 |
| 2 | 9 |
| 3 | 8 |
| 5 | 7 |
| 9 | 1 |
| 1 | 8 |
| 2 | 9 |

**Solución:**

Correlación = -0.96, $m_y$ = -0.945, $b_y$ = 10.45.

Predicción cuando X = 6, Y' = 4.777.

**3.** Encuentre la correlación entre las dos variables X y Y para contestar la siguiente pregunta: ¿a mayor aprensión menor capacidad de resolución de problemas? Realice una predicción cuando $X$ = 2.

| Aprensión | Resolución de problemas |
|---|---|
| 1 | 10 |

| | |
|---|---|
| 5 | 2 |
| 4 | 3 |
| 3 | 6 |
| 1 | 9 |
| 5 | 4 |
| 4 | 4 |
| 1 | 8 |
| 3 | 7 |

**Solución:**

Correlación = –0.94, $m_y$ = –1.59, $by$ = 10.66.

Predicción cuando $X = 2$, $Y' = 7.48$.

**4.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿la mayor cantidad de acetilcolina en sangre es un buen predictor de la velocidad de aprendizaje? Realice una predicción cuando $X = 0.4$.

| Concentración de acetilcolina | Velocidad de aprendizaje |
|---|---|
| 0.2 | 7 |
| 0.3 | 8 |
| 0.45 | 8 |
| 0.41 | 9 |
| 0.43 | 6 |
| 0.51 | 7 |
| 0.7 | 1 |
| 0.6 | 1 |
| 0.63 | 2 |
| 0.89 | 0.5 |
| 0.54 | 5 |
| 0.2 | 9.5 |

**Solución:**

Correlación = -0.86, $\mathbf{m_y}$ = –14.09, $b_y$ = 12.22

Predicción cuando $X = 0.4$, $Y' = 6.58$.

**5.** Encuentre la correlación entre las dos variables X y Y para contestar la siguiente pregunta: ¿una persona asertiva tiene mejor autoimagen? Realice una predicción cuando $X = 50$.

| Asertividad | Autoimagen |
|---|---|
| 20 | 60 |
| 10 | 50 |

| | |
|---|---|
| 32 | 65 |
| 33 | 66 |
| 34 | 65 |
| 35 | 61 |
| 36 | 69 |
| 38 | 66 |
| 40 | 68 |
| 41 | 65 |
| 41 | 73 |
| 43 | 68 |
| 45 | 71 |
| 45 | 74 |
| 47 | 71 |
| 48 | 75 |

**Solución:**

Correlación = 0.91, $m_y = 0.56$, $b_y = 45.93$.

Predicción cuando $X = 50$, $Y' = 74.17$.

**6.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿a mayor autoestima mejor autoconcepto? Realice una predicción cuando $X = 15$.

| Autoestima | Autoconcepto |
|---|---|
| 50 | 5 |
| 10 | 1 |
| 32 | 3 |
| 33 | 2 |
| 34 | 3 |
| 35 | 4 |
| 36 | 3 |
| 10 | 1 |
| 5 | 1 |
| 41 | 5 |
| 20 | 3 |

**Solución:**

Correlación = 0.89, $m_y = 0.09$, $b_y = 0.29$.

Predicción cuando $X = 15$, $Y' = 1.65$.

**7.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta:¿las personas con un buen índice de emprendimiento tienen un mejor sentimiento de autorrealización? Realice una predicción cuando $X = 25$.

| Emprendimiento | Autorrealización |
|---|---|
| 10 | 5 |
| 5 | 3 |
| 20 | 40 |
| 30 | 63 |
| 32 | 62 |
| 33 | 67 |
| 34 | 65 |
| 37 | 60 |
| 46 | 69 |
| 48 | 70 |
| 40 | 68 |
| 41 | 65 |
| 41 | 73 |
| 43 | 68 |
| 45 | 71 |
| 45 | 74 |
| 47 | 71 |
| 48 | 75 |
| 50 | 75 |

**Solución:**

Correlación = 0.94, $m_y = 1.56$, $b_y = 3.1$.

Predicción cuando $X = 25$, $Y' = 42.13$.

**8.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas con un mejor índice de empleabilidad se perciben como más competentes? Realice una predicción cuando $X = 2$.

| Empleabilidad | Competente |
|---|---|
| 5 | 10 |
| 5 | 9 |
| 4 | 7 |
| 5 | 8 |
| 3 | 5 |
| 1 | 2 |

| | |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 7 |

**Solución:**

Correlación = 0.84, $m_y$ = 1.63, $b_y$ = 0.17.

Predicción cuando $X = 2$, $Y' = 3.42$.

**9.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿los más resilientes son también los más proactivos? Realice una predicción cuando $X = 60$.

| Resiliencia | Proactividad |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 100 | 90 |
| 10 | 6 |
| 25 | 20 |
| 15 | 20 |
| 50 | 40 |
| 45 | 30 |
| 30 | 20 |
| 75 | 90 |
| 80 | 70 |
| 90 | 87 |
| 7 | 2 |

**Solución:**

Correlación = 0.97, $m_y$ = 0.98, $by$ = –3.51.

Predicción cuando $X = 60$, $Y' = 55.38$.

**10.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas con mayores ingresos se sienten más autorrealizadas? Realice una predicción cuando $X = 40\ 000$.

| Ingreso mensual | Autorrealización |
|---|---|
| 30 000 | 8 |
| 60 000 | 8 |
| 20 000 | 3 |
| 10 000 | 3 |
| 6 000 | 7 |
| 70 000 | 9 |

| | |
|---|---|
| 5 000 | 5 |
| 15 000 | 10 |
| 3 000 | 2 |
| 80 000 | 10 |

**Solución:**

Correlación = 0.65, $m_y$ = 6.7865E-05, $b_y$ = 4.47.

Predicción cuando $X$ = 40 000, $Y'$ = 7.18.

# EJERCICIOS VOLUNTARIOS

**1.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿el desempeño laboral es un buen predictor de la inteligencia social? Realice una predicción cuando $Y$ = 2.

| X<br>Inteligencia social | Y<br>Desempeño laboral |
|---|---|
| 25 | 5 |
| 15 | 4 |
| 10 | 3 |
| 25 | 5 |
| 20 | 4 |
| 23 | 4 |
| 2 | 1 |
| 5 | 2 |
| 7 | 3 |
| 9 | 3 |
| 10 | 3 |
| 15 | 4 |

**Solución:**

Correlación = 0.934, $m_x$ = 6.36, $b_x$ = –7.89.

Predicción cuando $Y$ = 2, $X'$ = 4.83.

**2.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas que más se preocupan tienen menor tolerancia a la incertidumbre? Realice una predicción cuando $Y$ = 4.

| Preocupación | Tolerancia a la incertidumbre |
|---|---|
| 10 | 2 |
| 10 | 1 |
| | |

| | |
|---|---|
| 2 | 9 |
| 3 | 8 |
| 5 | 7 |
| 9 | 1 |
| 8 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 5 |
| 10 | 1 |
| 2 | 9 |
| 3 | 8 |
| 5 | 7 |
| 9 | 1 |
| 1 | 8 |
| 2 | 9 |

**Solución:**

Correlación = -0.96, $m_x$ = -0.975, $b_x$ = 10.62.

Predicción cuando $Y = 4$, $X' = 6.72$.

**3.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta:¿a mayor aprensión menor capacidad de resolución de problemas? Realice una predicción cuando $Y = 5$.

| Aprensión | Resolución de problemas |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 5 | 2 |
| 4 | 3 |
| 3 | 6 |
| 1 | 9 |
| 5 | 4 |
| 4 | 4 |
| 1 | 8 |
| 3 | 7 |

**Solución:**

Correlación = - 0.94, $m_x$ = -0.56, $b_x$ = 6.28.

Predicción cuando $Y = 5$, $X' = 3.49$.

**4.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la pregunta: ¿la velocidad de aprendizaje es un buen predictor de la cantidad de acetilcolina en sangre? Realice una predicción cuando $Y = 3$.

| | |
|---|---|

| Concentración de acetilcolina | Velocidad de aprendizaje |
|---|---|
| 0.2 | 7 |
| 0.3 | 8 |
| 0.45 | 8 |
| 0.41 | 9 |
| 0.43 | 6 |
| 0.51 | 7 |
| 0.7 | 1 |
| 0.6 | 1 |
| 0.63 | 2 |
| 0.89 | 0.5 |
| 0.54 | 5 |
| 0.2 | 9.5 |

**Solución:**

Correlación = -0.86, $m_x$ = -0.05, $b_x$ = 0.77.

Predicción cuando $Y = 3$, $X' = 0.61$.

**5.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿una persona con buena autoimagen es más asertiva? Realice una predicción cuando $Y = 73$.

| Asertividad | Autoimagen |
|---|---|
| 20 | 60 |
| 10 | 50 |
| 32 | 65 |
| 33 | 66 |
| 34 | 65 |
| 35 | 61 |
| 36 | 69 |
| 38 | 66 |
| 40 | 68 |
| 41 | 65 |
| 41 | 73 |
| 43 | 68 |
| 45 | 71 |
| 45 | 74 |
| 47 | 71 |
| 48 | 75 |

**Solución:**

Correlación = 0.91, $m_x$ = 1.48, $b_x$ = -61.72.

Predicción cuando $Y$ = 73, $X'$ = 46.07.

**6.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿a mejor autoconcepto, mayor autoestima? Realice una predicción cuando $Y$ = 4.

| Autoestima | Autoconcepto |
|---|---|
| 50 | 5 |
| 10 | 1 |
| 32 | 3 |
| 33 | 2 |
| 34 | 3 |
| 35 | 4 |
| 36 | 3 |
| 10 | 1 |
| 5 | 1 |
| 41 | 5 |
| 20 | 3 |

**Solución:**

Correlación = 0.89, $m_x$ = 8.76, $b_x$ = 3.11.

Predicción cuando $Y$ = 4, $X'$ = 38.18.

**7.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y Y para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas con un mejor sentimiento de autorrealización tienen un buen índice de emprendimiento? Realice una predicción cuando $Y$ = 45.

| Emprendimiento | Autorrealización |
|---|---|
| 10 | 5 |
| 5 | 3 |
| 20 | 40 |
| 30 | 63 |
| 32 | 62 |
| 33 | 67 |
| 34 | 65 |
| 37 | 60 |
| 46 | 69 |
| 48 | 70 |

| | |
|---|---|
| 40 | 68 |
| 41 | 65 |
| 41 | 73 |
| 43 | 68 |
| 45 | 71 |
| 45 | 74 |
| 47 | 71 |
| 48 | 75 |
| 50 | 75 |

**Solución:**

Correlación = 0.94, $m_x = 0.56$, $b_x = 2.73$.

Predicción cuando $Y = 45$, $X' = 28.03$.

**8.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas que se perciben como más competentes tienen un mejor índice de empleabilidad? Realice una predicción cuando $Y = 6$.

| Empleabilidad | Competente |
|---|---|
| 5 | 10 |
| 5 | 9 |
| 4 | 7 |
| 5 | 8 |
| 3 | 5 |
| 1 | 2 |
| 1 | 4 |
| 3 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 7 |

**Solución:**

Correlación = 0.84, $m_x = 0.44$, $b_x = 0.913$.

Predicción cuando $Y = 6$, $X' = 3.53$.

**9.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿los más proactivos son también los más resilientes? Realice una predicción cuando $Y = 7$.

| Resiliencia | Proactividad |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 100 | 90 |
| 10 | 6 |

| | |
|---|---|
| 25 | 20 |
| 15 | 20 |
| 50 | 40 |
| 45 | 30 |
| 30 | 20 |
| 75 | 90 |
| 80 | 70 |
| 90 | 87 |
| 7 | 2 |

**Solución:**

Correlación = 0.97, $m_x = 0.96$, $b_x = 5.8$.

Predicción cuando $Y = 7$, $X' = 12.54$.

**10.** Encuentre la correlación entre las dos variables $X$ y $Y$ para contestar la siguiente pregunta: ¿las personas que se sienten más autorrealizadas son también las que obtienen mayores ingresos? Realice una predicción cuando $Y = 6$.

| Ingreso mensual en miles | Autorrealización |
|---|---|
| 30 | 8 |
| 60 | 8 |
| 20 | 3 |
| 10 | 3 |
| 6 | 7 |
| 70 | 9 |
| 5 | 5 |
| 15 | 10 |
| 3 | 2 |
| 80 | 10 |

**Solución:**

Correlación = 0.65, $m_x = 6.3$, $bx = -11.03$.

Predicción cuando $Y = 6$, $X' = 26.75$.

# BIBLIOGRAFÍA


Bowerman, L.B. y O'Connell, T.R. (1979). *Forecasting & Time Series*. Massachusetts: Duxbury Press.

Coolican, H. (2005). *Métodos de investigación y estadística en psicología*. México: El Manual Moderno.

Daniel, W. (2002). *Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud*. México: Limusa Wiley.

Daniels, W. (1979). *Bioestadística*. México: Limusa.
Elorza, H. (2008). *Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud*.México: Cengage Learning.
Hair, J., Anderson, R. Tatham, R. y Black, W. (2007). *Análisis multivariante*. México: Pearson-Prentice Hall.
Johnson, R. y Wichern, D. (1988). *Applied Multivariante Statistical Analysis*. Nueva Jersey: Prentice Hall.
Kerlinger, F.N. y Lee, H.B. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales*. México: McGraw-Hill.
Kleinbaum, D., Kupper, L., Muller, K. y Nizam, A. (1998). *Applied Regression Analysis and other Multivariable Methods*. Massachusetts: Duxbury Press.
Pagano, R. (2006). *Estadística para las ciencias del comportamiento*. México: Thomson Learning.
Silva, R.A. (2004). *Métodos cuantitativos en psicología. Un enfoque metodológico*. México: Trillas.

# GLOSARIO

**Modelo lineal:** modelo para explicar el comportamiento de una variable aleatoria mediante su relación lineal con los valores de otras.

**Función lineal:** función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta, es decir, todos los valores de la variable Y producidos por cambios en los valores de la variable X caen sobre una misma línea recta.

**Regresión lineal:** modelo para estudiar la naturaleza y la intensidad de la relación entre variables independientes sobre una dependiente.

**Regresión lineal simple:** modelo de predicción donde solo se tiene una variable predictora, sobre una dependiente o criterio.

**Regresión lineal** {Xe "regresión lineal"} múltiple: modelo que permite analizar la relación entre dos o más variables independientes (predictoras) y una variable independiente o criterio.

**Variables explicativas o predictoras:** variables independientes que son consideradas como las causas de algún efecto determinado.

**Variable criterio:** variable considerada efecto, también denominada dependiente.

**Regla de Cramer:** teorema del álgebra lineal que da solución a un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes.

**Determinante:** herramienta de cálculo que permite saber la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales y facilitan la obtención de la solución en el caso de sistemas compatibles.

**Distribución normal:** distribución que puede representarse como una curva unimodal y simétrica en forma de campana llamada curva normal y cuyos valores de tendencia central son todos iguales

**Homocedasticidad** (varianzas iguales): supuesto que postula que la variabilidad de Y permanece constante para todos los valores de X.

**Bondad de ajuste:** pruebas que describen lo bien que se ajustan un conjunto de observaciones en un modelo estadístico a los valores esperados.

**Coeficientes de regresión:** son medidas de la bondad del ajuste a la recta de regresión, multiplican la variable independiente.

**o componente de error del modelo de regresión:** evalúa la cantidad en que se desvía de la media de la distribución de de la cual se extrae.

**Forward** (avance): método que consiste seleccionar una variable en los diferentes momentos de evaluación.
**Backward (retroceso):** método que considera la integración de todas las variables dentro del modelo y posteriormente va eliminando en cada momento de evaluación las variables menos significativas.
**Stepwise (forzar la entrada, paso a paso o de etapas sucesivas):** método que combina el avance y retroceso.
**R cuadrado:** es el coeficiente de determinación y es una medida del tamaño del efecto de una variable causal.

# Apéndices

## TABLA A. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN *r* DE PEARSON

Se presentan los valores críticos ($r_{crítico}$) para el coeficiente de correlación r de Pearson.

Para calcular los grados de libertad la fórmula es $gl = (N - 2)$.

| **Nivel de significancia para prueba de una cola** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0005 |
| **Nivel de significancia para prueba de dos colas** | | | | | |
| *gl* | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
| 1 | 0.988 | 0.997 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 2 | 0.900 | 0.950 | 0.980 | 0.990 | 0.999 |
| 3 | 0.805 | 0.878 | 0.934 | 0.959 | 0.991 |
| 4 | 0.729 | 0.811 | 0.882 | 0.971 | 0.974 |
| 5 | 0.669 | 0.755 | 0.833 | 0.875 | 0.951 |
| 6 | 0.621 | 0.707 | 0.789 | 0.834 | 0.928 |
| 7 | 0.582 | 0.666 | 0.750 | 0.798 | 0.898 |
| 8 | 0.549 | 0.632 | 0.715 | 0.765 | 0.872 |
| 9 | 0.521 | 0.602 | 0.685 | 0.735 | 0.847 |
| 10 | 0.497 | 0.576 | 0.658 | 0.708 | 0.823 |
| 11 | 0.476 | 0.553 | 0.634 | 0.684 | 0.801 |
| 12 | 0.457 | 0.532 | 0.612 | 0.661 | 0.780 |
| 13 | 0.441 | 0.514 | 0.592 | 0.641 | 0.760 |
| 14 | 0.426 | 0.497 | 0.574 | 0.623 | 0.742 |
| 15 | 0.412 | 0.482 | 0.558 | 0.606 | 0.725 |
| 16 | 0.400 | 0.468 | 0.542 | 0.590 | 0.708 |
| 17 | 0.389 | 0.456 | 0.529 | 0.575 | 0.693 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 0.378 | 0.444 | 0.515 | 0.561 | 0.679 |
| 19 | 0.369 | 0.433 | 0.503 | 0.549 | 0.665 |
| 20 | 0.360 | 0.423 | 0.492 | 0.537 | 0.652 |
| 21 | 0.352 | 0.413 | 0.482 | 0.526 | 0.640 |
| 22 | 0.344 | 0.404 | 0.472 | 0.515 | 0.629 |
| 23 | 0.337 | 0.396 | 0.462 | 0.505 | 0.628 |
| 24 | 0.330 | 0.388 | 0.453 | 0.496 | 0.607 |
| 25 | 0.323 | 0.381 | 0.445 | 0.487 | 0.597 |
| 26 | 0.317 | 0.374 | 0.437 | 0.479 | 0.588 |
| 27 | 0.311 | 0.367 | 0.430 | 0.471 | 0.579 |
| 28 | 0.306 | 0.361 | 0.423 | 0.463 | 0.570 |
| 29 | 0.301 | 0.355 | 0.416 | 0.456 | 0.562 |
| 30 | 0.296 | 0.349 | 0.409 | 0.449 | 0.554 |
| 40 | 0.257 | 0.304 | 0.358 | 0.393 | 0.490 |
| 60 | 0.211 | 0.240 | 0.295 | 0.325 | 0.408 |
| 120 | 0.150 | 0.178 | 0.210 | 0.232 | 0.294 |
| ∞ | 0.073 | 0.087 | 0.103 | 0.114 | 0.146 |

*Fuente:* tomada de Coolican (2004).

Regla de decisión:
Si el $r_{obtenido}$ es ***mayor o igual*** al $r_{crítico}$ se rechaza la hipótesis nula.
Si $r_{obtenido} \geq r_{crítico} \geq \therefore$ se rechaza la $H_0$.
Si $r_{obtenido} < r_{crítico} < \therefore$ no se rechaza la $H_0$.

# TABLA B. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN $r_s$ DE SPEARMAN

Se presentan los valores críticos ($r_{crítico}$) para el coeficiente de correlación $r_s$ de Spearman.

Para un valor de ***N*** igual al número de sujetos. Cuando el número exacto de sujetos no se encuentra en la tabla use el valor inferior inmediato.

| Nivel de significancia para prueba de una cola | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| **Nivel de significancia para prueba de dos colas** | | | | |
| ***N*** | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 5 | 0.900 | 1.000 | 1.000 | |
| 6 | 0.829 | 0.886 | 0.943 | 1.000 |
| 7 | 0.714 | 0.786 | 0.893 | 0.929 |
| 8 | 0.643 | 0.738 | 0.833 | ,881 |
| 9 | 0.600 | 0.683 | 0.783 | 0.833 |
| 10 | 0.564 | 0.648 | 0.746 | 0.794 |
| 12 | 0.506 | 0.591 | 0.712 | 0.777 |
| 14 | 0.456 | 0.544 | 0.645 | 0.715 |
| 16 | 0.425 | 0.506 | 0.601 | 0.665 |
| 18 | 0.399 | 0.475 | 0.564 | 0.625 |
| 20 | 0.377 | 0.450 | 0.534 | 0.591 |
| 22 | 0.359 | 0.428 | 0.508 | 0.562 |
| 24 | 0.343 | 0.409 | 0.485 | 0.537 |
| 26 | 0.329 | 0.392 | 0.465 | 0.515 |
| 28 | 0.317 | 0.377 | 0.448 | 0.496 |
| 30 | 0.306 | 0.364 | 0.432 | 0.478 |

*Fuente:* tomada de Coolican (2004).

Regla de decisión:

Si el $r_{s\ obtenido}$ es ***mayor o igual*** al $r_{s\ crítico}$ se rechaza la hipótesis nula.

Si $r_{s\ obtenido} \geq r_{s\ crítico} \geq \therefore$ se rechaza la $H_0$.

Si $r_{s\ obtenido} < r_{s\ crítico} < \therefore$ no se rechaza la $H_0$.

# TABLA C. CHI-CUADRADA ($X^2$)

Se presentan los valores críticos ($X^2_{\text{crítico}}$) para Ji-cuadrada.

Para calcular los grados de libertad la fórmula es $gl = (r - 1)(c - 1)$, en donde $r$ = renglones y $c$ = columnas.

| **Nivel de significancia para pruebas de una cola** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0005 |
| **Nivel de significancia para pruebas de dos colas** | | | | | | |
| *gl* | 0.20 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
| 1 | 1.64 | 2.71 | 3.84 | 5.41 | 6.64 | 10.83 |
| 2 | 3.22 | 4.60 | 5.99 | 7.82 | 9.21 | 13.82 |
| 3 | 4.64 | 6.25 | 7.82 | 9.84 | 11.34 | 16.27 |
| 4 | 5.99 | 7.68 | 9.49 | 11.67 | 13.28 | 18.46 |
| 5 | 7.29 | 9.24 | 11.07 | 13.39 | 15.09 | 20.52 |
| 6 | 8.56 | 10.64 | 12.59 | 15.03 | 16.81 | 22.46 |
| 7 | 9.80 | 12.02 | 14.07 | 16.62 | 18.48 | 24.32 |
| 8 | 11.03 | 13.36 | 15.51 | 18.17 | 20.09 | 26.12 |
| 9 | 12.24 | 14.68 | 16.92 | 29.68 | 21.67 | 27.88 |
| 10 | 13.44 | 15.99 | 18.31 | 21.16 | 23.21 | 29.59 |
| 11 | 14.63 | 17.28 | 19.68 | 22.62 | 24.72 | 31.26 |
| 12 | 15.81 | 18.55 | 21.03 | 24.05 | 26.22 | 32.91 |
| 13 | 16.98 | 19.81 | 22.36 | 25.47 | 27.69 | 34.53 |
| 14 | 18.15 | 21.06 | 23.68 | 26.87 | 29.14 | 36.12 |
| 15 | 19.31 | 22.31 | 25.00 | 28.26 | 30.58 | 37.70 |
| 16 | 20.46 | 23.54 | 26.30 | 29.63 | 32.00 | 39.29 |
| 17 | 21.62 | 24.77 | 27.59 | 31.00 | 33.41 | 40.75 |
| 18 | 22.76 | 25.99 | 28.87 | 32.50 | 34.80 | 42.31 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 23.90 | 27.20 | 30.14 | 33.69 | 36.19 | 43.82 |
| 20 | 25.04 | 28.41 | 31.41 | 35.02 | 37.57 | 45.32 |
| 21 | 26.17 | 29.62 | 32.67 | 36.34 | 38.93 | 46.80 |
| 22 | 27.30 | 30.81 | 33.92 | 37.66 | 40.29 | 48.27 |
| 23 | 28.43 | 32.01 | 35.17 | 38.97 | 41.64 | 49.73 |
| 24 | 29.55 | 33.20 | 36.42 | 40.27 | 42.98 | 51.18 |
| 25 | 30.68 | 34.38 | 37.65 | 41.57 | 44.32 | 52.62 |
| 26 | 31.80 | 35.56 | 38.88 | 42.86 | 45.64 | 54.05 |
| 27 | 32.91 | 36.74 | 40.11 | 44.14 | 46.96 | 55.48 |
| 28 | 34.03 | 37.92 | 41.34 | 45.42 | 48.28 | 56.89 |
| 29 | 35.14 | 39.09 | 42.69 | 49.69 | 49.59 | 58.30 |
| 30 | 36.25 | 40.26 | 43.77 | 47.96 | 50.89 | 59.70 |
| 32 | 38.47 | 42.59 | 46.19 | 50.49 | 53.49 | 62.49 |
| 34 | 40.68 | 44.90 | 48.60 | 53.00 | 56.06 | 65.25 |
| 36 | 42.88 | 47.21 | 51.00 | 55.49 | 58.62 | 67.99 |
| 38 | 45.08 | 49.51 | 53.38 | 57.94 | 61.16 | 70.70 |
| 40 | 47.27 | 51.81 | 55.76 | 60.44 | 63.69 | 73.40 |
| 44 | 51.64 | 56.37 | 60.48 | 65.34 | 68.71 | 78.75 |
| 48 | 55.99 | 60.91 | 65.17 | 70.20 | 73.68 | 84.04 |
| 52 | 60.33 | 65.42 | 69.83 | 75.02 | 78.62 | 89.27 |
| 56 | 64.66 | 69.92 | 74.47 | 79.82 | 83.51 | 94.46 |
| 60 | 68.97 | 74.40 | 79.08 | 84.58 | 88.38 | 99.61 |
| *Fuente:* tomada de Coolican (2004). | | | | | | |

Regla de decisión:

Si el $X^2_{\text{obtenido}}$ es ***mayor o igual*** al $X^2_{\text{crítico}}$ se rechaza hipótesis nula.

Si $X^2_{\text{obtenido}} \geq X^2_{\text{crítico}}$ ∴ se rechaza la $H_0$.

Si $X^2_{\text{obtenido}} < X^2_{\text{crítico}}$ ∴ no se rechaza la $H_0$.

# TABLA D. DISTRIBUCIONES *t* DE STUDENT (*t*)

Se presentan los valores críticos ($t_{\text{crítico}}$) para el valor de t.

Para muestras relacionadas: los grados de libertad se calculan como $gl = n - 1$.

Para muestras independientes: los grados de libertad serían $gl = n1 + n2 - 2$.

| **Nivel de significancia para pruebas de una cola** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| **Nivel de significancia para pruebas de dos colas** | | | | |
| *gl* | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 1 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.031 |
| 6 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 120 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| ∞ | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

*Fuente:* tomada de Coolican (2004).

Regla de decisión:

Si el $t_{obtenido}$ es ***mayor o igual*** al $t_{crítico}$ se rechaza hipótesis nula.

Si $t_{obtenido} \geq t_{crítico}$ ∴ se rechaza la $H_0$.

Si $t_{obtenido} < t_{crítico}$ ∴ no se rechaza la $H_0$.

# TABLA E. DISTRIBUCIONES T DE RANGOS CON SIGNOS DE WILCOXON

Se presentan los valores críticos de $T$ ($T_{crítico}$) para la prueba de rangos con signo de Wilcoxon.

Las celdas con un guión indican que para ese nivel de significación no se puede realizar una determinación.

$N$ = número de sujetos del grupo.

| Nivel de significancia para prueba de una cola | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| **Nivel de significancia para prueba de dos colas** | | | | |
| ***N*** | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 5 | 0 | - | - | - |
| 6 | 2 | 0.0 | - | - |
| 7 | 3 | 2.0 | 0.0 | - |
| 8 | 5 | 3.0 | 1.0 | 0.0 |
| 9 | 8 | 5.0 | 3.0 | 1.0 |
| 10 | 10 | 8.0 | 5.0 | 3.0 |
| 11 | 13 | 10.0 | 7.0 | 5.0 |
| 12 | 17 | 13.0 | 9.0 | 7.0 |
| 13 | 21 | 17.0 | 12.0 | 9.0 |
| 14 | 25 | 21.0 | 15.0 | 12.0 |
| 15 | 30 | 25.0 | 19.0 | 15.0 |
| 16 | 35 | 29.0 | 23.0 | 19.0 |
| 17 | 41 | 34.0 | 27.0 | 23.0 |
| 18 | 47 | 40.0 | 32.0 | 27.0 |
| 19 | 53 | 46.0 | 37.0 | 32.0 |
| 20 | 60 | 52.0 | 43.0 | 37.0 |
| 21 | 67 | 58.0 | 49.0 | 42.0 |
| 22 | 75 | 65.0 | 55.0 | 48.0 |
| 23 | 83 | 73.0 | 62.0 | 54.0 |
| 24 | 91 | 81.0 | 69.0 | 61.0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 100 | 89.0 | 76.0 | 68.0 |
| 26 | 110 | 98.0 | 84.0 | 75.0 |
| 27 | 119 | 107.0 | 92.0 | 83.0 |
| 28 | 130 | 116.0 | 101.0 | 91.0 |
| 29 | 140 | 126.0 | 110.0 | 100.0 |
| 30 | 151 | 137.0 | 120.0 | 109.0 |
| 31 | 163 | 147.0 | 130.0 | 118.0 |
| 32 | 175 | 159.0 | 140.0 | 128.0 |
| 33 | 187 | 170.0 | 151.0 | 138.0 |
| 34 | 200 | 182.0 | 162.0 | 148.0 |
| 35 | 213 | 195.0 | 173.0 | 159.0 |
| 36 | 227 | 208.0 | 185.0 | 171.0 |
| 37 | 241 | 221.0 | 198.0 | 182.0 |
| 38 | 256 | 235.0 | 211.0 | 194.0 |
| 39 | 271 | 249.0 | 224.0 | 207.0 |
| 40 | 286 | 264.0 | 238.0 | 220.0 |
| 41 | 302 | 279.0 | 252.0 | 233.0 |
| 42 | 319 | 294.0 | 266.0 | 247.0 |
| 43 | 336 | 310.0 | 281.0 | 261.0 |
| 44 | 353 | 327.0 | 296.0 | 276.0 |
| 45 | 371 | 343.0 | 312.0 | 291.0 |
| 46 | 389 | 361.0 | 328.0 | 307.0 |
| 47 | 407 | 378.0 | 345.0 | 322.0 |
| 48 | 426 | 396.0 | 362.0 | 339.0 |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 49 | 446 | 415.0 | 379.0 | 355.0 |
| 50 | 466 | 434.0 | 397.0 | 373.0 |

*Fuente:* tomada de Pagano (2004).

Regla de decisión:

Si el $T_{obtenido}$ es ***menor o igual*** al $T_{crítico}$ se rechaza la hipótesis nula.

Si $T_{obtenido} \leq T_{crítico}$ ∴ se rechaza la $H_0$.

Si $T_{obtenido} > T_{crítico}$ ∴ no se rechaza la $H_0$.

# TABLA F. U DE MANN WHITNEY (U)

Se presentan los valores críticos ($U_{crítico}$) para el valor de $U$.

Para $N_1$ = número de sujetos del grupo 1 y $N_2$ = número de sujetos del grupo 2.

| $n^1$ | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Valores críticos para una prueba unilateral en a =.005 o una prueba bilateral en a =.01 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | - | - | - | - | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 6 | - | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 7 | - | - | - | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 |
| 8 | - | - | - | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 |
| 9 | - | - | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| 10 | - | - | 0 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 | 26 | 29 |
| 11 | - | - | 0 | 2 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 |
| 12 | - | - | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | - | - | 1 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 |
| 14 | - | - | 1 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 |
| 15 | - | - | 2 | 5 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 29 | 33 | 37 | 42 | 46 | 51 |
| 16 | - | - | 2 | 5 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 41 | 45 | 50 | 55 |
| 17 | - | - | 2 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 60 |
| 18 | - | - | 2 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 58 | 64 |
| 19 | - | 0 | 3 | 7 | 12 | 17 | 22 | 28 | 33 | 39 | 45 | 51 | 56 | 63 | 69 |
| 20 | - | 0 | 3 | 8 | 13 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 67 | 73 |
| ***n*¹** | | | | | | | | | | | | | | | |
| ***n*²** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| Valores críticos para una prueba unilateral en a =.001 o una prueba bilateral en a =.02 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 |
| 3 | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | - | - | - | - | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 5 | - | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | - | - | - | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 |
| 7 | - | - | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 |
| 8 | - | - | 0 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 |
| 9 | - | - | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 10 | - | - | 1 | 3 | 6 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 |
| 11 | - | - | 1 | 4 | 7 | 9 | 12 | 15 | 18 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 |
| 12 | - | - | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 |
| 13 | - | 0 | 2 | 5 | 9 | 12 | 16 | 20 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 |
| | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | - | 0 | 2 | 6 | 10 | 13 | 17 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | 51 |
| 15 | - | 0 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 |
| 16 | - | 0 | 3 | 7 | 12 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 |
| 17 | - | 0 | 4 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 44 | 49 | 55 | 60 | 66 |
| 18 | - | 0 | 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 30 | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 70 |
| 19 | - | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 63 | 69 | 75 |
| 20 | - | 1 | 5 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 47 | 53 | 60 | 67 | 73 | 80 |
| ***n*¹** | | | | | | | | | | | | | | | |
| ***n*²** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| Valores críticos para una prueba unilateral en a = .025 o una prueba bilateral en a =.05 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | - | - | - | - | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 4 | - | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | - | - | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 |
| 7 | - | - | 1 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| 8 | - | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 |
| 9 | - | 0 | 2 | 4 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 |
| 10 | - | 0 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 |
| 11 | - | 0 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 |
| 12 | - | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 22 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 |
| 13 | - | 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 |
| 14 | - | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 22 | 26 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 |
| 15 | - | 1 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | - | 1 | 6 | 11 | 15 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 |
| 17 | - | 2 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 |
| 18 | - | 2 | 7 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 |
| 19 | - | 2 | 7 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 |
| 20 | - | 2 | 8 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 |
| ***n*¹** | | | | | | | | | | | | | | | |
| ***n*²** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| Valores críticos para una prueba unilateral en a = .05 o una prueba bilateral en a =.1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | - | - | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 4 | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | - | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 |
| 6 | - | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 |
| 7 | - | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 |
| 8 | - | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 |
| 9 | - | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 |
| 10 | - | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 |
| 11 | - | 1 | 5 | 8 | 12 | 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 |
| 12 | - | 2 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 |
| 13 | - | 2 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 |
| 14 | - | 2 | 7 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 |
| 15 | - | 3 | 7 | 12 | 18 | 23 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 |
| 16 | - | 3 | 8 | 14 | 19 | 25 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 |
| 17 | - | 3 | 9 | 15 | 20 | 26 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | - | 4 | 9 | 16 | 22 | 28 | 35 | 41 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 |
| 19 | 0 | 4 | 10 | 17 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 |
| 20 | 0 | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 | 47 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 10( |

*Fuente:* tomada de Pagano (2004).
Las celdas con un guión indican que para ese nivel de significación no se puede realizar una determinación.

Regla de decisión:

Si el $U_{obtenido}$ es ***menor o igual*** al $U_{crítico}$ se rechaza la hipótesis nula.

Si $U_{obtenido} \leq U_{crítico}$ ∴ se rechaza la $H_0$.

Si $U_{obtenido} > U_{crítico}$ ∴ no se rechaza la $H_0$.

# TABLA G. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (*B*)

Probabilidades acumuladas hasta x = "número de éxitos" en cada distribución B (n, π), con n = "número de ensayos" y π = "probabilidades de éxito".

x es el número mayor de signos en la prueba binomial del signo.

| | | p | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.35 | 0.4 | 0.45 |
| N=1 | X | 0.9500 | 0.9000 | 0.8500 | 0.8000 | 0.7500 | 0.7000 | 0.6500 | 0.6000 | 0.5500 |
| | 1 | 0.0500 | 0.1000 | 0.1500 | 0.2000 | 0.2500 | 0.3000 | 0.3500 | 0.4000 | 0.4500 |
| N=2 | 0 | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 | 0.4225 | 0.3600 | 0.3025 |
| | 1 | 0.0950 | 0.1800 | 0.2550 | 0.3200 | 0.3750 | 0.4200 | 0.4550 | 0.4800 | 0.4950 |
| | 2 | 0.0025 | 0.0100 | 0.0225 | 0.0400 | 0.0625 | 0.0900 | 0.1225 | 0.1600 | 0.2025 |
| N=3 | 0 | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 | 0.2746 | 0.2160 | 0.1664 |
| | 1 | 0.1354 | 0.2430 | 0.3251 | 0.3840 | 0.4219 | 0.4410 | 0.4436 | 0.4320 | 0.4084 |
| | 2 | 0.0071 | 0.0270 | 0.0574 | 0.0960 | 0.1406 | 0.1890 | 0.2389 | 0.2880 | 0.3341 |
| | 3 | 0.0001 | 0.0010 | 0.0034 | 0.0080 | 0.0156 | 0.0270 | 0.0429 | 0.0640 | 0.0911 |
| N=4 | 0 | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1785 | 0.1296 | 0.0915 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0.1715 | 0.2916 | 0.3685 | 0.4096 | 0.4219 | 0.4116 | 0.3845 | 0.3456 | 0.2995 |
| | 2 | 0.0135 | 0.0486 | 0.0975 | 0.1536 | 0.2109 | 0.2646 | 0.3105 | 0.3456 | 0.3675 |
| | 3 | 0.0005 | 0.0036 | 0.0115 | 0.0256 | 0.0469 | 0.0756 | 0.1115 | 0.1536 | 0.2005 |
| | 4 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0016 | 0.0039 | 0.0081 | 0.0150 | 0.0256 | 0.0410 |
| N=5 | 0 | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 | 0.0503 |
| | 1 | 0.2036 | 0.3280 | 0.3915 | 0.4096 | 0.3955 | 0.3602 | 0.3124 | 0.2592 | 0.2059 |
| | 2 | 0.0214 | 0.0729 | 0.1382 | 0.2048 | 0.2637 | 0.3087 | 0.3364 | 0.3456 | 0.3369 |
| | 3 | 0.0011 | 0.0081 | 0.0244 | 0.0512 | 0.0879 | 0.1323 | 0.1811 | 0.2304 | 0.2757 |
| | 4 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0022 | 0.0064 | 0.0146 | 0.0284 | 0.0488 | 0.0768 | 0.1128 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 | 0.0024 | 0.0053 | 0.0102 | 0.0185 |
| N=6 | 0 | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1786 | 0.1176 | 0.0754 | 0.0477 | 0.0277 |
| | 1 | 0.2321 | 0.3543 | 0.3993 | 0.3932 | 0.3560 | 0.3025 | 0.2437 | 0.1866 | 0.1359 |
| | 2 | 0.0305 | 0.0984 | 0.1762 | 0.2458 | 0.2966 | 0.3241 | 0.3280 | 0.3110 | 0.2780 |
| | 3 | 0.0021 | 0.0146 | 0.0415 | 0.0819 | 0.1318 | 0.1852 | 0.2355 | 0.2765 | 0.3032 |
| | 4 | 0.0001 | 0.0012 | 0.0055 | 0.0154 | 0.0330 | 0.0595 | 0.0951 | 0.1382 | 0.1861 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0015 | 0.0044 | 0.0102 | 0.0205 | 0.0369 | 0.0609 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0007 | 0.0018 | 0.0041 | 0.0083 |
| N=7 | 0 | 0.6983 | 0.4783 | 0.3206 | 0.2097 | 0.1335 | 0.0824 | 0.0490 | 0.0280 | 0.0152 |
| | 1 | 0.2573 | 0.3520 | 0.3960 | 0.3670 | 0.3115 | 0.2471 | 0.1848 | 0.1306 | 0.0872 |
| | 2 | 0.0406 | 0.1240 | 0.2097 | 0.2753 | 0.3115 | 0.3177 | 0.2985 | 0.2613 | 0.2140 |
| | 3 | 0.0036 | 0.0230 | 0.0617 | 0.1147 | 0.1730 | 0.2269 | 0.2669 | 0.2903 | 0.2918 |
| | 4 | 0.0002 | 0.0026 | 0.0109 | 0.0287 | 0.0577 | 0.0972 | 0.1442 | 0.1935 | 0.2388 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0012 | 0.0043 | 0.0115 | 0.0250 | 0.0466 | 0.0774 | 0.1172 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0013 | 0.0036 | 0.0084 | 0.0172 | 0.0320 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0006 | 0.0016 | 0.0037 |
| N=8 | 0 | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 |
| | 1 | 0.2793 | 0.3826 | 0.3847 | 0.3355 | 0.2670 | 0.1977 | 0.1373 | 0.0896 | 0.0548 |
| | 2 | 0.0515 | 0.1488 | 0.2376 | 0.2936 | 0.3115 | 0.2965 | 0.2587 | 0.2090 | 0.1569 |
| | 3 | 0.0054 | 0.0331 | 0.0839 | 0.1468 | 0.2076 | 0.2541 | 0.2786 | 0.2787 | 0.2568 |
| | 4 | 0.0004 | 0.0046 | 0.0185 | 0.0459 | 0.0865 | 0.1361 | 0.1875 | 0.2322 | 0.2627 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0026 | 0.0092 | 0.0231 | 0.0467 | 0.0808 | 0.1239 | 0.1719 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0038 | 0.0100 | 0.0217 | 0.0413 | 0.0703 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0033 | 0.0079 | 0.0164 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0007 | 0.0017 |
| N=9 | 0 | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0277 | 0.0101 | 0.0046 |
| | 1 | 0.2985 | 0.3874 | 0.3679 | 0.3020 | 0.2253 | 0.1556 | 0.1004 | 0.0605 | 0.0339 |
| | 2 | 0.0629 | 0.1722 | 0.2597 | 0.3020 | 0.3003 | 0.2668 | 0.2162 | 0.1612 | 0.1110 |
| | 3 | 0.0077 | 0.0446 | 0.1069 | 0.1762 | 0.2336 | 0.2668 | 0.2716 | 0.2508 | 0.2119 |
| | 4 | 0.0006 | 0.0074 | 0.0283 | 0.0661 | 0.1168 | 0.1715 | 0.2194 | 0.9508 | 0.2600 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0008 | 0.0050 | 0.0165 | 0.0389 | 0.0735 | 0.1198 | 0.1672 | 0.2128 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0028 | 0.0087 | 0.0210 | 0.0424 | 0.0743 | 0.1160 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0012 | 0.0039 | 0.0098 | 0.0212 | 0.0407 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0013 | 0.0035 | 0.0083 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0008 |
| N=10 | 0 | 0.5987 | 0.3487 | 0.1969 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0135 | 0.0060 | 0.0025 |
| | 1 | 0.3151 | 0.3874 | 0.3474 | 0.2684 | 0.1877 | 0.1211 | 0.0725 | 0.0403 | 0.0207 |
| | 2 | 0.0746 | 0.1937 | 0.2759 | 0.3020 | 0.2816 | 0.2335 | 0.1757 | 0.1209 | 0.0762 |
| | 3 | 0.0105 | 0.0574 | 0.1298 | 0.2013 | 0.2503 | 0.2668 | 0.2522 | 0.2150 | 0.1665 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 0.0010 | 0.0112 | 0.0401 | 0.0181 | 0.1460 | 0.2001 | 0.2367 | 0.2508 | 0.2384 |
| | 5 | 0.0001 | 0.0015 | 0.0085 | 0.0264 | 0.0584 | 0.1029 | 0.1536 | 0.2007 | 0.2340 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0012 | 0.0055 | 0.0162 | 0.0368 | 0.0689 | 0.1115 | 0.1596 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0008 | 0.0031 | 0.0090 | 0.0212 | 0.0425 | 0.0746 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0014 | 0.0043 | 0.0106 | 0.0229 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0016 | 0.0042 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 |
| N=11 | 0 | 0.5688 | 0.3138 | 0.1673 | 0.0859 | 0.0422 | 0.0198 | 0.0088 | 0.0036 | 0.0014 |
| | 1 | 0.3293 | 0.3835 | 0.3248 | 0.2362 | 0.1549 | 0.0932 | 0.0518 | 0.0266 | 0.0125 |
| | 2 | 0.0867 | 0.2131 | 0.2866 | 0.2953 | 0.2581 | 0.1998 | 0.1395 | 0.0887 | 0.0513 |
| | 3 | 0.0137 | 0.0710 | 0.1517 | 0.2215 | 0.2581 | 0.2568 | 0.2254 | 0.1774 | 0.1259 |
| | 4 | 0.0014 | 0.0158 | 0.0536 | 0.1107 | 0.1721 | 0.2201 | 0.2428 | 0.2365 | 0.2060 |
| | 5 | 0.0001 | 0.0025 | 0.0132 | 0.0388 | 0.0803 | 0.1231 | 0.1830 | 0.2207 | 0.2360 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0023 | 0.0097 | 0.0268 | 0.0566 | 0.0985 | 0.1471 | 0.1931 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0017 | 0.0064 | 0.0173 | 0.0379 | 0.0701 | 0.1128 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0037 | 0.0102 | 0.0234 | 0.0462 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0018 | 0.0052 | 0.0126 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0007 | 0.0021 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 |
| N=12 | 0 | 0.5404 | 0.2824 | 0.1422 | 0.0687 | 0.0317 | 0.0138 | 0.0057 | 0.0022 | 0.0008 |
| | 1 | 0.3413 | 0.3766 | 0.3012 | 0.2062 | 0.1267 | 0.0712 | 0.0368 | 0.0174 | 0.0075 |
| | 2 | 0.0988 | 0.2301 | 0.2924 | 0.2835 | 0.2323 | 0.1678 | 0.1088 | 0.0639 | 0.0339 |
| | 3 | 0.0173 | 0.0852 | 0.1720 | 0.2362 | 0.2581 | 0.2397 | 0.1954 | 0.1419 | 0.0923 |
| | 4 | 0.0021 | 0.0213 | 0.0683 | 0.1329 | 0.1936 | 0.2311 | 0.2367 | 0.2128 | 0.1700 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 0.0002 | 0.0038 | 0.0193 | 0.0532 | 0.1032 | 0.1585 | 0.2039 | 0.2270 | 0.2225 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0005 | 0.0040 | 0.0155 | 0.0401 | 0.0792 | 0.1281 | 0.1766 | 0.2124 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0006 | 0.0033 | 0.0115 | 0.0291 | 0.0591 | 0.1009 | 0.1489 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0024 | 0.0078 | 0.0199 | 0.0420 | 0.0762 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0015 | 0.0048 | 0.0125 | 0.2770 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0008 | 0.0025 | 0.0068 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 |
| N=13 | 0 | 0.5133 | 0.2542 | 0.1209 | 0.5500 | 0.0238 | 0.0097 | 0.0037 | 0.1300 | 0.0004 |
| | 1 | 0.3512 | 0.3672 | 0.2774 | 0.1787 | 0.1029 | 0.0540 | 0.0259 | 0.0113 | 0.0045 |
| | 2 | 0.1109 | 0.2448 | 0.2937 | 0.2680 | 0.2059 | 0.1388 | 0.0836 | 0.0453 | 0.0220 |
| | 3 | 0.0214 | 0.0997 | 0.1900 | 0.2457 | 0.2517 | 0.2181 | 0.1651 | 0.1107 | 0.0660 |
| | 4 | 0.0028 | 0.0277 | 0.0838 | 0.1537 | 0.2097 | 0.2337 | 0.2222 | 0.1845 | 0.1350 |
| | 5 | 0.0003 | 0.0055 | 0.0226 | 0.0691 | 0.1258 | 0.1803 | 0.2154 | 0.2214 | 0.1989 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0008 | 0.0063 | 0.0230 | 0.0559 | 0.1030 | 0.1546 | 0.1968 | 0.2169 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0011 | 0.0058 | 0.1860 | 0.0442 | 0.0833 | 0.1312 | 0.1775 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0011 | 0.0047 | 0.0142 | 0.0336 | 0.0656 | 0.1089 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0034 | 0.0101 | 0.0243 | 0.0495 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0022 | 0.0065 | 0.0016 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0012 | 0.0036 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=14 | 0 | 0.4877 | 0.2288 | 0.1028 | 0.0441 | 0.0178 | 0.0068 | 0.0024 | 0.0008 | 0.0002 |
| | 1 | 0.3593 | 0.3559 | 0.2539 | 0.1539 | 0.0832 | 0.0407 | 0.0181 | 0.0073 | 0.0027 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0.1229 | 0.2570 | 0.2912 | 0.2501 | 0.1802 | 0.1134 | 0.0634 | 0.0317 | 0.0141 |
| | 3 | 0.0259 | 0.1142 | 0.2056 | 0.2501 | 0.2402 | 0.1943 | 0.1366 | 0.0885 | 0.0462 |
| | 4 | 0.0037 | 0.0349 | 0.0998 | 0.1720 | 0.2202 | 0.2290 | 0.2022 | 0.1549 | 0.1040 |
| | 5 | 0.0004 | 0.0078 | 0.0352 | 0.0860 | 0.1468 | 0.1963 | 0.2178 | 0.2066 | 0.1701 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0013 | 0.0093 | 0.0322 | 0.0734 | 0.1262 | 0.1759 | 0.2066 | 0.2088 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0019 | 0.0092 | 0.0280 | 0.0618 | 0.1082 | 0.1574 | 0.1952 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0020 | 0.0082 | 0.0232 | 0.0510 | 0.0918 | 0.1398 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0018 | 0.0066 | 0.0183 | 0.0408 | 0.0762 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0014 | 0.0049 | 0.0136 | 0.0312 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0010 | 0.0033 | 0.0093 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0019 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=15 | 0 | 0.4633 | 0.2059 | 0.0874 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 |
| | 1 | 0.3658 | 0.3432 | 0.2312 | 0.1319 | 0.0668 | 0.0305 | 0.0126 | 0.0047 | 0.0016 |
| | 2 | 0.1348 | 0.2669 | 0.2856 | 0.2309 | 0.1559 | 0.0916 | 0.0476 | 0.0219 | 0.0090 |
| | 3 | 0.0307 | 0.1285 | 0.2184 | 0.2501 | 0.2252 | 0.1700 | 0.1110 | 0.0634 | 0.0318 |
| | 4 | 0.0049 | 0.0428 | 0.1156 | 0.1876 | 0.2252 | 0.2186 | 0.1792 | 0.1268 | 0.0780 |
| | 5 | 0.0006 | 0.0105 | 0.0449 | 0.1032 | 0.1651 | 0.2061 | 0.2123 | 0.1859 | 0.1404 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0019 | 0.0132 | 0.0430 | 0.0917 | 0.1472 | 0.1906 | 0.2066 | 0.1914 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0030 | 0.0138 | 0.0393 | 0.0811 | 0.1319 | 0.1771 | 0.2013 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0005 | 0.0035 | 0.0131 | 0.0348 | 0.7100 | 0.1181 | 0.1647 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0034 | 0.0116 | 0.0298 | 0.0612 | 0.1048 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0030 | 0.0096 | 0.0245 | 0.0515 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0024 | 0.0074 | 0.0191 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0016 | 0.0052 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=16 | 0 | 0.4401 | 0.1853 | 0.0743 | 0.281 | 0.0100 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 |
| | 1 | 0.3706 | 0.3294 | 0.2097 | 0.1126 | 0.0535 | 0.0228 | 0.0087 | 0.0030 | 0.0009 |
| | 2 | 0.1463 | 0.2745 | 0.2775 | 0.2111 | 0.1336 | 0.0732 | 0.0353 | 0.0150 | 0.0056 |
| | 3 | 0.0359 | 0.1423 | 0.2285 | 0.2463 | 0.2079 | 0.1465 | 0.0888 | 0.0468 | 0.0215 |
| | 4 | 0.0061 | 0.0514 | 0.1311 | 0.2001 | 0.2252 | 0.2040 | 0.1553 | 0.1014 | 0.0572 |
| | 5 | 0.0008 | 0.0137 | 0.0555 | 0.1201 | 0.1802 | 0.2099 | 0.2008 | 0.1623 | 0.1123 |
| | 6 | 0.0001 | 0.0028 | 0.0180 | 0.0550 | 0.1101 | 0.1649 | 0.1982 | 0.1983 | 0.1684 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0045 | 0.0197 | 0.0524 | 0.1010 | 0.1524 | 0.1889 | 0.1969 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0055 | 0.0197 | 0.0487 | 0.0923 | 0.1417 | 0.1812 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0012 | 0.0058 | 0.0185 | 0.0442 | 0.0840 | 0.1318 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0014 | 0.0056 | 0.0167 | 0.0392 | 0.0755 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0013 | 0.0049 | 0.0142 | 0.0337 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0040 | 0.0115 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0008 | 0.0029 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 |
| | 16 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=17 | 0 | 0.4181 | 0.1668 | 0.0631 | 0.0225 | 0.0075 | 0.0023 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3741 | 0.3150 | 0.1893 | 0.0957 | 0.0426 | 0.0169 | 0.0060 | 0.0019 | 0.0005 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0.1575 | 0.2800 | 0.2673 | 0.1914 | 0.1136 | 0.0581 | 0.0260 | 0.0102 | 0.0035 |
| | 3 | 0.0415 | 0.1556 | 0.2359 | 0.2393 | 0.1893 | 0.1245 | 0.0701 | 0.0341 | 0.0144 |
| | 4 | 0.0076 | 0.0605 | 0.1457 | 0.2093 | 0.2209 | 0.1868 | 0.1320 | 0.0796 | 0.0411 |
| | 5 | 0.0010 | 0.0175 | 0.0668 | 0.1361 | 0.1914 | 0.2081 | 0.1849 | 0.1379 | 0.0875 |
| | 6 | 0.0001 | 0.0039 | 0.0236 | 0.0680 | 0.1276 | 0.1784 | 0.1991 | 0.1839 | 0.1432 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0007 | 0.0065 | 0.0267 | 0.0668 | 0.1201 | 0.1685 | 0.1927 | 0.1841 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0014 | 0.0084 | 0.0279 | 0.0644 | 0.1143 | 0.1606 | 0.1883 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0014 | 0.0021 | 0.0093 | 0.0276 | 0.0611 | 0.1070 | 0.1540 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0025 | 0.0095 | 0.0263 | 0.0571 | 0.1008 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0026 | 0.0090 | 0.0242 | 0.0525 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0024 | 0.0081 | 0.0215 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0021 | 0.0068 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0016 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.000 |
| | 16 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 17 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=18 | 0 | 0.3972 | 0.1501 | 0.0536 | 0.0180 | 0.0056 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3763 | 0.3002 | 0.1704 | 0.0811 | 0.0338 | 0.0126 | 0.0042 | 0.0042 | 0.0003 |
| | 2 | 0.1683 | 0.2835 | 0.2556 | 0.1723 | 0.0958 | 0.0458 | 0.0190 | 0.0190 | 0.0022 |
| | 3 | 0.0473 | 0.1680 | 0.2406 | 0.2297 | 0.1704 | 0.1046 | 0.0547 | 0.0547 | 0.0095 |
| | 4 | 0.0093 | 0.0070 | 0.1592 | 0.2153 | 0.2130 | 0.1681 | 0.1104 | 0.1104 | 0.0291 |
| | 5 | 0.0014 | 0.0218 | 0.0787 | 0.1507 | 0.1988 | 0.2017 | 0.1664 | 0.1664 | 0.0666 |
| | 6 | 0.0002 | 0.0052 | 0.0310 | 0.0816 | 0.1436 | 0.1873 | 0.1941 | 0.1941 | 0.1181 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0010 | 0.0091 | 0.0350 | 0.0820 | 0.1376 | 0.1792 | 0.1792 | 0.1657 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0022 | 0.0120 | 0.0376 | 0.0811 | 0.1327 | 0.1327 | 0.1864 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0033 | 0.0139 | 0.0386 | 0.0794 | 0.0794 | 0.1694 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0008 | 0.0042 | 0.0149 | 0.0385 | 0.0385 | 0.1248 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0010 | 0.0046 | 0.0151 | 0.0151 | 0.0742 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0012 | 0.0047 | 0.0145 | 0.0354 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0012 | 0.0045 | 0.0134 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0039 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0009 |
| | 16 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 |
| | 17 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 18 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=19 | 0 | 0.3774 | 0.1351 | 0.0456 | 0.0144 | 0.0042 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3774 | 0.2852 | 0.1529 | 0.0685 | 0.0268 | 0.0093 | 0.0029 | 0.0008 | 0.0002 |
| | 2 | 0.1787 | 0.2852 | 0.2428 | 0.1540 | 0.0803 | 0.0358 | 0.0138 | 0.0048 | 0.0013 |
| | 3 | 0.0533 | 0.1796 | 0.2428 | 0.2182 | 0.1517 | 0.0869 | 0.0422 | 0.0175 | 0.0062 |
| | 4 | 0.0112 | 0.0798 | 0.1714 | 0.2182 | 0.2023 | 0.1491 | 0.0909 | 0.0467 | 0.0203 |
| | 5 | 0.0018 | 0.0266 | 0.0907 | 0.1636 | 0.2023 | 0.1916 | 0.1468 | 0.0933 | 0.0497 |
| | 6 | 0.0002 | 0.0069 | 0.0374 | 0.0955 | 0.1574 | 0.1916 | 0.1844 | 0.1451 | 0.0949 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0014 | 0.0122 | 0.0443 | 0.0974 | 0.1525 | 0.1844 | 0.1797 | 0.1443 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0032 | 0.0166 | 0.0487 | 0.0981 | 0.1489 | 0.1797 | 0.1771 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0007 | 0.0051 | 0.0198 | 0.0514 | 0.0980 | 0.1464 | 0.1771 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0013 | 0.0066 | 0.0220 | 0.0528 | 0.0976 | 0.1449 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0018 | 0.0077 | 0.0233 | 0.0532 | 0.0970 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0022 | 0.0083 | 0.0237 | 0.0529 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0024 | 0.0085 | 0.0233 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0024 | 0.0082 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0022 |
| | 16 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 |
| | 17 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 |
| | 18 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 19 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| N=20 | 0 | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3774 | 0.2702 | 0.7368 | 0.0576 | 0.0211 | 0.0068 | 0.0020 | 0.0005 | 0.0001 |
| | 2 | 0.1887 | 0.2852 | 0.2293 | 0.1369 | 0.0669 | 0.0278 | 0.0100 | 0.0031 | 0.0008 |
| | 3 | 0.0596 | 0.1901 | 0.2428 | 0.2054 | 0.1339 | 0.0716 | 0.0323 | 0.0123 | 0.0040 |
| | 4 | 0.0133 | 0.0898 | 0.1821 | 0.2182 | 0.1897 | 0.1304 | 0.0738 | 0.0350 | 0.0139 |
| | 5 | 0.0022 | 0.0319 | 0.1028 | 0.1746 | 0.2023 | 0.1789 | 0.1272 | 0.0746 | 0.0365 |
| | 6 | 0.0003 | 0.0089 | 0.0454 | 0.1091 | 0.1686 | 0.1916 | 0.1712 | 0.1244 | 0.0746 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0020 | 0.0160 | 0.0545 | 0.1124 | 0.1643 | 0.1844 | 0.1659 | 0.1221 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0046 | 0.0222 | 0.0609 | 0.1144 | 0.1614 | 0.1797 | 0.1623 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0011 | 0.0074 | 0.0271 | 0.0654 | 0.1158 | 0.1597 | 0.1771 |
| | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0020 | 0.0099 | 0.0308 | 0.0686 | 0.1171 | 0.1593 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0005 | 0.0030 | 0.012 | 0.0336 | 0.0710 | 0.1185 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0008 | 0.0039 | 0.0136 | 0.0355 | 0.0727 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0010 | 0.0045 | 0.0146 | 0.0366 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0012 | 0.0049 | 0.0150 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0013 | 0.0049 |
| | 16 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0013 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 17 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 |
| | 18 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 19 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 20 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Regla de decisión:

Si el $t_{obtenido}$ es mayor o igual al $t_{crítico}$ se rechaza hipótesis nula.

Si $t_{obtenido} \geq t_{crítico}$ ∴ se rechaza la $H_0$.

Si $t_{obtenido} < t_{crítico}$ ∴ no se rechaza la $H_1$.

# TABLA H. ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

La columna de la izquierda en cada grupo de tres muestra el valor *z* particular.

La columna del centro muestra el área contenida entre la media y el valor *z*.

La columna de la derecha muestra el área que queda en toda la distribución a la derecha de este valor de *z*.

El área total es una unidad y los valores mostrados son porciones decimales de ésta, que también son las probabilidades de valores mostrados en porciones decimales del área.

Para los porcentajes, multiplicar por 100 todos los valores del área. Para las áreas entre -*z* y +*z*, duplique los valores mostrados.

| *z* | **0** *z* | **0** *z* |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.0040 | 0.4960 |
| 0.02 | 0.0080 | 0.4920 |
| 0.03 | 0.0120 | 0.4880 |
| 0.04 | 0.0160 | 0.4840 |
| 0.05 | 0.0199 | 0.4801 |
| 0.06 | 0.0239 | 0.4761 |
| 0.07 | 0.0279 | 0.4721 |
| 0.08 | 0.0319 | 0.4681 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 0.09 | 0.0359 | 0.4641 |
| 0.10 | 0.0398 | 0.4602 |
| 0.11 | 0.0438 | 0.4562 |
| 0.12 | 0.0478 | 0.4522 |
| 0.13 | 0.0517 | 0.4483 |
| 0.14 | 0.0557 | 0.4443 |
| 0.15 | 0.0596 | 0.4404 |
| 0.16 | 0.0636 | 0.4364 |
| 0.17 | 0.0675 | 0.4325 |
| 0.18 | 0.0714 | 0.4286 |
| 0.19 | 0.0753 | 0.4247 |
| 0.20 | 0.0793 | 0.4207 |
| 0.21 | 0.0832 | 0.4168 |
| 0.22 | 0.0871 | 0.4129 |
| 0.23 | 0.0910 | 0.4090 |
| 0.24 | 0.0948 | 0.4052 |
| 0.25 | 0.0987 | 0.4013 |
| 0.26 | 0.1029 | 0.3974 |
| 0.27 | 0.1064 | 0.3969 |
| 0.28 | 0.1103 | 0.3897 |
| 0.29 | 0.1141 | 0.3859 |
| 0.30 | 0.1179 | 0.3821 |
| 0.31 | 0.1217 | 0.3783 |
| 0.32 | 0.1255 | 0.3745 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 0.33 | 0.1293 | 0.3707 |
| 0.34 | 0.1331 | 0.3669 |
| 0.35 | 0.1368 | 0.3632 |
| 0.36 | 0.1406 | 0.3594 |
| 0.37 | 0.1443 | 0.3557 |
| 0.38 | 0.1480 | 0.3520 |
| 0.39 | 0.1517 | 0.3483 |
| 1.20 | 0.3849 | 0.1151 |
| 1.21 | 0.3869 | 0.1131 |
| 1.22 | 0.3888 | 0.1112 |
| 1.23 | 0.3907 | 0.1093 |
| 1.24 | 0.3925 | 0.1075 |
| 1.25 | 0.3944 | 0.1056 |
| 1.26 | 0.3962 | 0.1038 |
| 1.27 | 0.3980 | 0.1020 |
| 1.28 | 0.3997 | 0.1003 |
| 1.29 | 0.4015 | 0.0985 |
| 1.30 | 0.4032 | 0.0698 |
| 1.31 | 0.4049 | 0.0951 |
| 1.32 | 0.4066 | 0.0934 |
| 1.33 | 0.4082 | 0.0918 |
| 1.34 | 0.4099 | 0.0901 |
| 1.35 | 0.4115 | 0.0885 |
| 1.36 | 0.4131 | 0.0869 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 1.37 | 0.4147 | 0.0853 |
| 1.38 | 0.4162 | 0.0838 |
| 1.39 | 0.4177 | 0.0823 |
| 1.40 | 0.4192 | 0.0808 |
| 1.41 | 0.4207 | 0.0793 |
| 1.42 | 0.4222 | 0.0778 |
| 1.43 | 0.4236 | 0.0764 |
| 1.44 | 0.4251 | 0.0749 |
| 1.45 | 0.4265 | 0.0735 |
| 1.46 | 0.4279 | 0.0721 |
| 1.47 | 0.4292 | 0.0708 |
| 1.48 | 0.4306 | 0.0694 |
| 1.49 | 0.4316 | 0.0681 |
| 1.50 | 0.4332 | 0.0668 |
| 1.51 | 0.4345 | 0.0655 |
| 1.52 | 0.4357 | 0.0643 |
| 1.53 | 0.4370 | 0.0630 |
| 1.54 | 0.4382 | 0.0618 |
| 1.55 | 0.4394 | 0.0606 |
| 1.56 | 0.4406 | 0.0594 |
| 1.57 | 0.4418 | 0.0582 |
| 1.58 | 0.4429 | 0.0571 |
| 1.59 | 0.4441 | 0.0559 |
| 2.40 | 0.4918 | 0.0082 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 2.41 | 0.4920 | 0.0080 |
| 2.42 | 0.4922 | 0.0078 |
| 2.43 | 0.4925 | 0.0075 |
| 2.44 | 0.4927 | 0.0073 |
| 2.45 | 0.4929 | 0.0071 |
| 2.46 | 0.4931 | 0.0069 |
| 2.47 | 0.4932 | 0.0068 |
| 2.48 | 0.4934 | 0.0066 |
| 2.49 | 0.4936 | 0.0064 |
| 2.50 | 0.4938 | 0.0062 |
| 2.51 | 0.4940 | 0.0060 |
| 2.52 | 0.4941 | 0.0059 |
| 2.53 | 0.4943 | 0.0057 |
| 2.54 | 0.4945 | 0.0055 |
| 2.55 | 0.4946 | 0.0054 |
| 2.56 | 0.4948 | 0.0052 |
| 2.57 | 0.4949 | 0.0051 |
| 2.58 | 0.4951 | 0.0049 |
| 2.59 | 0.4952 | 0.0048 |
| 2.60 | 0.4953 | 0.0047 |
| 2.61 | 0.4955 | 0.0045 |
| 2.62 | 0.4956 | 0.0044 |
| 2.63 | 0.4957 | 0.0043 |
| 2.64 | 0.4959 | 0.0041 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 2.65 | 0.4960 | 0.0040 |
| 2.66 | 0.4961 | 0.0039 |
| 2.67 | 0.4962 | 0.0038 |
| 2.68 | 0.4963 | 0.0037 |
| 2.69 | 0.4964 | 0.0036 |
| 2.70 | 0.4965 | 0.0035 |
| 2.71 | 0.4966 | 0.0034 |
| Fuente: tomada de Coolican (2004). | | |

## TABLA I. DISTRIBUCIÓN F PARA $\alpha = 0.05$ (SOMBREADO) Y $\alpha = 0.01$ (EN NEGRITAS)

Valores críticos de F para los grados de libertad del ***numerador*** del cociente y los grados de libertad del ***denominador*** del cociente F
Los grados de libertad del **numerador** en las columnas y los grados de libertad del **denominador** en las filas.

| Grados de libertad: **denominador** | Grados de libertad: **numerador** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 254 | 254 |
| | **4052** | **4999** | **5403** | **5625** | **5764** | **5859** | **5928** | **5981** | **6022** | **6056** | **6082** | **6106** | **6142** | **6169** | **6208** | **6234** | **6258** | **6286** | **6302** | **6323** | **6334** | **6352** | **6361** | **6366** |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.36 | 19.37 | 19.38 | 19.39 | 19.40 | 19.41 | 19.42 | 19.43 | 19.44 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.49 | 19.50 | 19.50 |
| | **98.49** | **99.00** | **99.17** | **99.25** | **99.30** | **99.33** | **99.34** | **99.36** | **99.38** | **99.40** | **99.41** | **99.42** | **99.43** | **99.44** | **99.45** | **99.46** | **99.47** | **99.48** | **99.48** | **99.49** | **99.49** | **99.49** | **99.50** | **99.50** |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.88 | 8.84 | 8.81 | 8.78 | 8.76 | 8.74 | 8.71 | 8.69 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.60 | 8.58 | 8.57 | 8.56 | 8.54 | 8.54 | 8.53 |
| | **34.12** | **30.82** | **29.46** | **28.71** | **28.24** | **27.91** | **27.67** | **27.49** | **27.34** | **27.23** | **27.13** | **27.05** | **26.92** | **26.83** | **26.69** | **26.60** | **26.50** | **26.41** | **26.35** | **26.27** | **26.23** | **26.18** | **26.14** | **26.12** |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.93 | 5.91 | 5.87 | 5.84 | 5.80 | 5.77 | 5.74 | 5.71 | 5.70 | 5.68 | 5.66 | 5.65 | 5.64 | 5.63 |
| | **21.20** | **18.00** | **16.69** | **15.98** | **15.52** | **15.21** | **14.98** | **14.80** | **14.66** | **14.54** | **14.45** | **14.37** | **14.24** | **14.15** | **14.02** | **13.93** | **13.83** | **13.74** | **13.69** | **13.61** | **13.57** | **13.52** | **13.48** | **13.46** |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.78 | 4.74 | 4.70 | 4.68 | 4.64 | 4.60 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.44 | 4.42 | 4.40 | 4.38 | 4.37 | 4.36 |
| | **16.26** | **13.27** | **12.06** | **11.39** | **10.97** | **10.67** | **10.45** | **10.27** | **10.15** | **10.05** | **9.96** | **9.89** | **9.77** | **9.68** | **9.55** | **9.47** | **9.38** | **9.29** | **9.24** | **9.17** | **9.13** | **9.07** | **9.04** | **9.02** |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.03 | 4.00 | 3.96 | 3.92 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.75 | 3.72 | 3.71 | 3.69 | 3.68 | 3.67 |
| | **13.74** | **10.92** | **9.78** | **9.15** | **8.75** | **8.47** | **8.26** | **8.10** | **7.98** | **7.87** | **7.79** | **7.72** | **7.60** | **7.52** | **7.39** | **7.31** | **7.23** | **7.14** | **7.09** | **7.02** | **6.99** | **6.94** | **6.90** | **6.88** |
| 7 | 5.99 | 4.47 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.63 | 3.60 | 6.57 | 3.52 | 3.49 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.32 | 3.29 | 3.28 | 3.25 | 3.24 | 3.23 |
| | **12.25** | **9.55** | **8.45** | **7.85** | **7.46** | **7.19** | **7.00** | **6.84** | **6.71** | **6.62** | **6.54** | **6.47** | **6.35** | **6.27** | **6.15** | **6.07** | **5.98** | **5.90** | **5.85** | **5.78** | **5.75** | **5.70** | **5.67** | **5.65** |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.34 | 3.31 | 3.28 | 3.23 | 3.20 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.05 | 3.03 | 3.00 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.93 |
| | **11.26** | **8.65** | **7.59** | **7.01** | **6.63** | **6.37** | **6.19** | **6.03** | **5.91** | **5.82** | **5.74** | **5.67** | **5.56** | **5.48** | **5.36** | **5.28** | **5.20** | **5.11** | **5.06** | **5.00** | **4.96** | **4.91** | **4.88** | **4.86** |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.13 | 3.10 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.93 | 2.90 | 2.86 | 2.82 | 2.80 | 2.77 | 2.76 | 2.73 | 2.72 | 2.71 |
| | **10.56** | **8.02** | **6.99** | **6.42** | **6.06** | **5.80** | **5.62** | **5.47** | **5.35** | **5.26** | **5.18** | **5.11** | **5.00** | **4.92** | **4.80** | **4.73** | **4.64** | **4.56** | **4.51** | **4.45** | **4.41** | **4.36** | **4.33** | **4.31** |

| Grados de libertad: denominador | Grados de libertad: numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.97 | 2.94 | 2.91 | 2.86 | 2.82 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.67 | 2.64 | 2.61 | 2.59 | 2.56 | 2.55 | 2.54 |
| | **10.04** | **7.56** | **6.55** | **5.99** | **5.64** | **5.39** | **5.21** | **5.06** | **4.95** | **4.85** | **4.78** | **4.71** | **4.60** | **4.52** | **4.41** | **4.33** | **4.25** | **4.17** | **4.12** | **4.05** | **4.01** | **3.96** | **3.93** | **3.91** |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.86 | 2.82 | 2.79 | 2.74 | 2.7/ | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.50 | 2.47 | 2.45 | 2.42 | 2.41 | 2.40 |
| | **9.65** | **7.20** | **6.22** | **5.67** | **5.32** | **5.07** | **4.88** | **4.74** | **4.63** | **4.54** | **4.46** | **4.40** | **4.29** | **4.21** | **4.10** | **4.02** | **3.94** | **3.86** | **3.80** | **3.74** | **3.70** | **3.66** | **3.62** | **3.60** |
| 12 | 4.75 | 3.88 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.92 | 2.85 | 2.80 | 2.76 | 2.72 | 2.69 | 2.64 | 2.60 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.36 | 2.35 | 2.32 | 2.31 | 2.30 |
| | **9.33** | **6.93** | **5.95** | **5.41** | **5.06** | **4.82** | **4.65** | **4.50** | **4.39** | **4.30** | **4.22** | **4.16** | **4.05** | **3.98** | **3.86** | **3.78** | **3.70** | **3.61** | **3.56** | **3.49** | **3.46** | **3.41** | **3.38** | **3.36** |
| 13 | 4.67 | 3.80 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.92 | 2.84 | 2.77 | 2.72 | 2.67 | 2.63 | 2.60 | 2.55 | 2.51 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.32 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.22 | 2.21 |
| | **9.07** | **6.70** | **5.74** | **5.20** | **4.86** | **4.62** | **4.44** | **4.30** | **4.19** | **4.10** | **4.02** | **3.96** | **3.85** | **3.78** | **3.67** | **3.59** | **3.51** | **3.42** | **3.37** | **3.30** | **3.27** | **3.21** | **3.18** | **3.16** |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.56 | 2.53 | 2.48 | 2.44 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.24 | 2.21 | 2.19 | 2.16 | 2.14 | 2.13 |
| | **8.86** | **6.51** | **5.56** | **5.03** | **4.69** | **4.46** | **4.28** | **4.14** | **4.03** | **3.94** | **3.86** | **3.80** | **3.70** | **3.62** | **3.51** | **3.43** | **3.34** | **3.26** | **3.21** | **3.14** | **3.11** | **3.06** | **3.02** | **3.00** |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.70 | 2.64 | 2.59 | 2.55 | 2.51 | 2.48 | 2.43 | 2.39 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.07 |
| | **8.68** | **6.36** | **5.42** | **4.89** | **4.56** | **4.32** | **4.14** | **4.00** | **3.89** | **3.80** | **3.73** | **3.67** | **3.56** | **3.48** | **3.36** | **3.29** | **3.20** | **3.12** | **3.07** | **3.00** | **2.97** | **2.92** | **2.89** | **2.87** |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.45 | 2.42 | 2.37 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.13 | 2.09 | 2.07 | 2.04 | 2.02 | 2.01 |
| | **8.53** | **6.23** | **5.29** | **4.77** | **4.44** | **4.20** | **4.03** | **3.89** | **3.78** | **3.69** | **3.61** | **3.55** | **3.45** | **3.37** | **3.25** | **3.18** | **3.10** | **3.01** | **2.96** | **2.89** | **2.86** | **2.80** | **2.77** | **2.75** |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.62 | 2.55 | 2.50 | 2.45 | 2.41 | 2.38 | 2.33 | 2.29 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.04 | 2.02 | 1.99 | 1.97 | 1.96 |
| | **8.40** | **6.11** | **5.18** | **4.67** | **4.34** | **4.10** | **3.93** | **3.79** | **3.68** | **3.59** | **3.52** | **3.45** | **3.35** | **3.27** | **3.16** | **3.08** | **3.00** | **2.92** | **2.86** | **2.79** | **2.76** | **2.70** | **2.67** | **2.65** |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.37 | 2.34 | 2.29 | 2.25 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.04 | 2.00 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.92 |
| | **8.28** | **6.01** | **5.09** | **4.58** | **4.25** | **4.01** | **3.85** | **3.71** | **3.60** | **3.51** | **3.44** | **3.37** | **3.27** | **3.19** | **3.07** | **3.00** | **2.91** | **2.83** | **2.78** | **2.71** | **2.68** | **2.62** | **2.59** | **2.57** |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.55 | 2.48 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.26 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.02 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.90 | 1.88 |
| | **8.18** | **5.93** | **5.01** | **4.50** | **4.17** | **3.94** | **3.77** | **3.63** | **3.52** | **3.43** | **3.36** | **3.30** | **3.19** | **3.12** | **3.00** | **2.92** | **2.84** | **2.76** | **2.70** | **2.63** | **2.60** | **2.54** | **2.51** | **2.49** |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.52 | 2.45 | 2.40 | 2.35 | 2.31 | 2.28 | 2.23 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.96 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.84 |
| | **8.10** | **5.85** | **4.94** | **4.43** | **4.10** | **3.87** | **3.71** | **3.56** | **3.45** | **3.37** | **3.30** | **3.23** | **3.13** | **3.05** | **2.94** | **2.86** | **2.77** | **2.69** | **2.63** | **2.56** | **2.53** | **2.47** | **2.44** | **2.42** |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.25 | 2.20 | 2.15 | 2.09 | 2.05 | 2.00 | 1.96 | 1+93 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.81 |
| | **8.02** | **5.78** | **4.87** | **4.37** | **4.04** | **3.81** | **3.65** | **3.51** | **3.40** | **3.31** | **3.24** | **3.17** | **3.07** | **2.99** | **2.88** | **2.80** | **2.72** | **2.63** | **2.58** | **2.51** | **2.47** | **2.42** | **2.38** | **2.36** |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.47 | 2.40 | 2.35 | 2.30 | 2.26 | 2.23 | 2.18 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.91 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.80 | 1.78 |
| | **7.94** | **5.72** | **4.82** | **4.31** | **3.99** | **3.76** | **3.59** | **3.45** | **3.35** | **3.26** | **3.18** | **3.12** | **3.02** | **2.94** | **2.83** | **2.75** | **2.67** | **2.58** | **2.53** | **2.46** | **2.42** | **2.37** | **2.33** | **2.31** |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.45 | 2.38 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.14 | 2.10 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.88 | 11.84 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.76 |
| | **7.88** | **5.66** | **4.76** | **4.26** | **3.94** | **3.71** | **3.54** | **3.41** | **3,+.30** | **3.21** | **3.14** | **3.07** | **2.97** | **2.89** | **2.78** | **2.70** | **2.62** | **2.53** | **2.48** | **2.41** | **2.37** | **2.32** | **2.28** | **2.26** |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.43 | 2.36 | 2.30 | 2.26 | 2.22 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.82 | 1.80 | 1.76 | 1.74 | 1.73 |
| | **7.82** | **5.61** | **4.72** | **4.22** | **3.90** | **3.67** | **3.50** | **3.36** | **3.25** | **3.17** | **3.09** | **3.03** | **2.93** | **2.85** | **2.74** | **2.66** | **2.58** | **2.49** | **2.44** | **2.36** | **2.33** | **2.27** | **2.23** | **2.21** |
| 25 | 4.24 | 3.38 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.41 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2+06 | 2.00 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.84 | 1.80 | 1.77 | 1.74 | 1.72 | 1.71 |
| | **7.77** | **5.57** | **4.68** | **4.18** | **3.86** | **3.63** | **3.46** | **3.32** | **3.21** | **3+13** | **3.05** | **2.99** | **2.89** | **2.81** | **2.70** | **2.62** | **2.54** | **2.45** | **2.40** | **2.32** | **2.29** | **2.23** | **2.19** | **2.17** |
| 26 | 4.22 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.15 | 2.10 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.78 | 1.76 | 1.72 | 1.70 | 1.69 |
| | **7.72** | **5.53** | **4.64** | **4.14** | **3.82** | **3.59** | **3.42** | **3.29** | **3.17** | **3.09** | **3.02** | **2.96** | **2.86** | **2.77** | **2.66** | **2.58** | **2.50** | **2.41** | **2.36** | **2.28** | **2.25** | **2.19** | **2.15** | **2.13** |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2+37 | 2.30 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.13 | 2.80 | 2.03 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.67 |
| | **7.68** | **5.49** | **4.60** | **4.11** | **3.79** | **3.56** | **3.39** | **3.26** | **3.14** | **3.06** | **2.98** | **2.93** | **2.83** | **2.74** | **2.63** | **2.55** | **2.47** | **2.38** | **2.33** | **2.25** | **2.21** | **2.16** | **2.12** | **2.10** |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.44 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.06 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.67 | 1.65 |
| | **7.64** | **5.45** | **4.57** | **4.07** | **3.76** | **3.53** | **3.36** | **3.23** | **3.11** | **3.03** | **2.95** | **2.90** | **2.80** | **2.71** | **2.60** | **2.52** | **2.44** | **2.35** | **2.30** | **2.22** | **2.18** | **2.13** | **2.09** | **2.06** |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.54 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 185.00 | 1.80 | 1.77 | 1.73 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.64 |
| | **7.60** | **5.42** | **4.54** | **4.04** | **3.73** | **3.50** | **3.33** | **3.20** | **3.08** | **3.00** | **2.92** | **2.87** | **2.77** | **2.68** | **2.57** | **2.49** | **2.41** | **2.32** | **2.27** | **2.19** | **2.15** | **2.10** | **2.06** | **2.03** |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.34 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.04 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.62 |
| | **7.56** | **5.39** | **4.51** | **4.02** | **3.70** | **3.47** | **3.30** | **3.17** | **3.06** | **2.98** | **2.90** | **2.84** | **2.74** | **2.66** | **2.55** | **2.47** | **2.38** | **2.29** | **2.24** | **2.16** | **2.13** | **2.07** | **2.03** | **2.01** |
| 32 | 4.15 | 3.30 | 2.90 | 2.67 | 2.51 | 2.40 | 2.32 | 2.25 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 | 2.02 | 1.97 | 1.91 | 1.86 | 1.82 | 1.76 | 1.74 | 1.69 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.59 |
| | **7.50** | **5.34** | **4.46** | **3.97** | **3.66** | **3.42** | **3.25** | **3.12** | **3.01** | **2.94** | **2.86** | **2.80** | **2.70** | **2.62** | **2.51** | **2.42** | **2.34** | **2.25** | **2.20** | **2.12** | **2.08** | **2.02** | **1.98** | **1.96** |
| 34 | 4.13 | 3.28 | 2.88 | 2.65 | 2.49 | 2.38 | 2.30 | 2.23 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.00 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.71 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.59 | 1.57 |
| | **7.44** | **5.29** | **4.42** | **3.93** | **3.61** | **3.38** | **3.21** | **3.08** | **2.97** | **2.89** | **2.82** | **2.76** | **2.66** | **2.58** | **2.47** | **2.38** | **2.30** | **2.21** | **2.15** | **2.08** | **2.04** | **1.98** | **1.94** | **1.91** |
| 36 | 4.11 | 3.26 | 2.86 | 2.63 | 2.48 | 2.36 | 2.28 | 2.21 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.87 | 1.82 | 1.78 | 1.72 | 1.69 | 1.65 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.55 |
| | **7.39** | **5.25** | **4.38** | **3.89** | **3.58** | **3.35** | **3.18** | **3.04** | **2.94** | **2.86** | **2.70** | **2.72** | **2.62** | **2.54** | **2.43** | **2.35** | **2.26** | **2.17** | **2.12** | **2.04** | **2.00** | **1.94** | **1.90** | **1.87** |
| 38 | 4.10 | 3.25 | 2.85 | 2.62 | 2.46 | 2.35 | 2.26 | 2.19 | 2.14 | 2.09 | 2.05 | 2.02 | 1.96 | 1.92 | 1.85 | 1.80 | 1.76 | 1.71 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.53 |
| | **7.35** | **5.21** | **4.34** | **3.86** | **3.54** | **3.32** | **3.15** | **3.02** | **2.91** | **2.82** | **2.75** | **2.69** | **2.59** | **2.51** | **2.40** | **2.32** | **2.22** | **2.14** | **2.08** | **2.00** | **1.97** | **1.90** | **1.86** | **1.84** |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.07 | 2.04 | 2.00 | 1.95 | 1.90 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.61 | 1.59 | 1.55 | 1.53 | 1.51 |
| | **7.31** | **5.18** | **4.31** | **3.83** | **3.51** | **3.29** | **3.12** | **2.99** | **2.88** | **2.80** | **2.73** | **2.66** | **2.56** | **2.49** | **2.37** | **2.29** | **2.20** | **2.11** | **2.05** | **1.97** | **1.94** | **1.88** | **1.84** | **1.81** |

| Grados de libertad: denominador | Grados de libertad: numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
| 42 | 4.07 | 3.22 | 2.83 | 2.59 | 2.44 | 2.32 | 2.24 | 2.17 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.82 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.49 |
| | **7.27** | **5.15** | **4.29** | **3.80** | **3.49** | **3.26** | **3.10** | **2.96** | **2.86** | **2.77** | **2.70** | **2.64** | **2.54** | **2.46** | **2.35** | **2.26** | **2.17** | **2.08** | **2.02** | **1.94** | **1.91** | **1.85** | **1.80** | **1.78** |
| 44 | 4.06 | 3.21 | 2.82 | 2.58 | 2.43 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.92 | 1.88 | 1.81 | 1.76 | 1.72 | 1.66 | 1.63 | 1.58 | 1.56 | 1.52 | 1.50 | 1.48 |
| | **7.24** | **5.12** | **4.46** | **3.78** | **3.46** | **3.24** | **3.07** | **2.94** | **2.84** | **2.75** | **2.68** | **2.62** | **2.52** | **2.44** | **2.32** | **2.24** | **2.15** | **2.06** | **2.00** | **1.92** | **1.88** | **1.82** | **1.78** | **1.75** |
| 46 | 4.05 | 3.20 | 2.81 | 2.57 | 2.42 | 2.30 | 2.22 | 2.14 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.97 | 1.91 | 1.87 | 1.80 | 1.75 | 1.71 | 1.65 | 1.62 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.46 |
| | **7.21** | **5.10** | **4.24** | **3.76** | **3.44** | **3.22** | **3.05** | **2.92** | **2.82** | **2.73** | **2.66** | **2.60** | **2.50** | **2.42** | **2.30** | **2.22** | **2.13** | **2.04** | **1.98** | **1.90** | **1.86** | **1.80** | **1.76** | **1.72** |
| 48 | 4.04 | 3.19 | 2.80 | 2.56 | 2.41 | 2.30 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.03 | 1.99 | 1.96 | 1.90 | 1.86 | 1.79 | 1.74 | 1.70 | 1.64 | 1.61 | 1.56 | 1.53 | 1.50 | 1.47 | 1.45 |
| | **7.19** | **5.08** | **4.22** | **3.74** | **3.42** | **3.20** | **3.40** | **2.90** | **2.80** | **2.71** | **2.64** | **2.58** | **2.48** | **2.40** | **2.28** | **2.20** | **2.11** | **2.02** | **1.96** | **1.88** | **1.84** | **1.78** | **1.73** | **1.70** |
| 50 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.78 | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.52 | 1.48 | 1.46 | 1.44 |
| | **7.17** | **5.06** | **4.20** | **3.72** | **3.41** | **3.18** | **3.02** | **2.88** | **2.78** | **2.70** | **2.62** | **2.56** | **2.46** | **2.39** | **2.26** | **2.18** | **2.10** | **2.00** | **1.94** | **1.86** | **1.82** | **1.76** | **1.71** | **1.68** |
| 55 | 4.02 | 3.17 | 2.78 | 2.54 | 2.38 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.05 | 2.00 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.83 | 1.76 | 1.72 | 1.67 | 1.61 | 1.58 | 1.52 | 1.50 | 1.46 | 1.43 | 1.41 |
| | **7.12** | **5.01** | **4.16** | **3.68** | **3.37** | **3.15** | **2.98** | **2.85** | **2.75** | **2.66** | **2.59** | **2.53** | **2.43** | **2.35** | **2.23** | **2.15** | **2.06** | **1.96** | **1.90** | **1.82** | **1.78** | **1.71** | **1.66** | **1.64** |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.52 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.86 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.56 | 1.50 | 1.48 | 1.44 | 1.41 | 1.39 |
| | **7.08** | **4.98** | **4.13** | **3.65** | **3.34** | **3.12** | **2.95** | **2.82** | **2.72** | **2.63** | **2.56** | **2.50** | **2.40** | **2.32** | **2.20** | **2.12** | **2.03** | **1.93** | **1.87** | **1.79** | **1.74** | **1.68** | **1.63** | **1.60** |
| 65 | 3.99 | 3.14 | 2.75 | 2.51 | 2.36 | 2.24 | 2.15 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.73 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.54 | 1.49 | 1.46 | 1.42 | 1.39 | 1.37 |
| | **7.04** | **4.95** | **4.10** | **3.62** | **3.31** | **3.09** | **2.93** | **2.79** | **2.70** | **2.61** | **2.54** | **2.47** | **2.37** | **2.30** | **2.18** | **2.90** | **2.00** | **1.90** | **1.84** | **1.76** | **1.71** | **1.64** | **1.60** | **1.56** |
| 70 | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.72 | 1.67 | 1.62 | 1.56 | 1.53 | 1.47 | 1.45 | 1.40 | 1.37 | 1.35 |
| | **7.01** | **4.92** | **4.08** | **3.60** | **3.29** | **3.07** | **2.91** | **2.77** | **2.67** | **2.59** | **2.51** | **2.45** | **2.35** | **2.28** | **2.15** | **2.07** | **1.98** | **1.88** | **1.82** | **1.74** | **1.69** | **1.62** | **1.56** | **1.53** |
| 80 | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.48 | 2.33 | 2.21 | 2.12 | 2.05 | 1,99 | 1.95 | 1.91 | 1.88 | 1.82 | 1.77 | 1.70 | 1.65 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.45 | 1.42 | 1.38 | 1.35 | 1.32 |
| | **6.96** | **4.88** | **4.04** | **3.56** | **3.25** | **3.04** | **2.87** | **2.74** | **2.64** | **2.55** | **2.48** | **2.41** | **2.32** | **2.24** | **2.11** | **2.03** | **1.94** | **1.84** | **1.78** | **1.70** | **1.65** | **1.57** | **1.52** | **1.49** |
| 100 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.30 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.79 | 1.75 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.51 | 1.48 | 1.42 | 1.39 | 1.34 | 1.30 | 1.28 |
| | **6.90** | **4.82** | **3.98** | **3.51** | **3.20** | **2.99** | **2.82** | **2.69** | **2.59** | **2.51** | **2.43** | **2.36** | **2.26** | **2.19** | **2.06** | **1.98** | **1.89** | **1.79** | **1.73** | **1.64** | **1.59** | **1.51** | **1.46** | **1.43** |
| 125 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.44 | 2.29 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.95 | 1.90 | 1.86 | 1.83 | 1.77 | 1.72 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.45 | 1.39 | 1.36 | 1.31 | 1.27 | 1.25 |
| | **6.84** | **4.78** | **3.94** | **3.47** | **3.17** | **2.95** | **2.79** | **2.65** | **2.56** | **2.47** | **2.40** | **2.33** | **2.23** | **2.15** | **2.03** | **1.94** | **1.85** | **1.75** | **1.68** | **1.59** | **1.54** | **1.46** | **1.40** | **1.37** |
| 150 | 3.91 | 3.06 | 2.67 | 2.43 | 2.27 | 2.16 | 2.07 | 2.00 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.82 | 1.76 | 1.71 | 1.64 | 1.59 | 1.54 | 1.47 | 1.44 | 1.37 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.22 |
| | **6.81** | **4.75** | **3.91** | **3.44** | **3.14** | **2.92** | **2.76** | **2.62** | **2.53** | **2.44** | **2.37** | **2.30** | **2.20** | **2.12** | **2.00** | **1.91** | **1.83** | **1.72** | **1.66** | **1.56** | **1.51** | **1.43** | **1.37** | **1.33** |
| 200 | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.41 | 2.26 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.80 | 1.74 | 1.69 | 1.62 | 1.57 | 1.52 | 1.45 | 1.42 | 1.35 | 1.32 | 1.26 | 1.22 | 1.19 |
| | **6.76** | **4.71** | **3.88** | **3.41** | **3.11** | **2.90** | **2.73** | **2.60** | **2.50** | **2.41** | **2.34** | **2.28** | **2.17** | **2.09** | **1.97** | **1.88** | **1.79** | **1.69** | **1.62** | **1.53** | **1.48** | **1.39** | **1.33** | **1.28** |
| 400 | 3.86 | 3.02 | 2.62 | 2.39 | 2.23 | 2.12 | 2.03 | 1.96 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.78 | 1.72 | 1.67 | 1.60 | 1.54 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.32 | 1.28 | 1.22 | 1.16 | 1.13 |
| | **6.70** | **4.66** | **3.83** | **3.36** | **3.06** | **2.85** | **2.69** | **2.55** | **2.46** | **2.37** | **2.29** | **2.23** | **2.12** | **2.04** | **1.92** | **1.84** | **1.74** | **1.64** | **1.57** | **1.47** | **1.42** | **1.32** | **1.24** | **1.19** |
| 1000 | 3.85 | 3.00 | 2.61 | 2.38 | 2.22 | 2.10 | 2.02 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.70 | 1.65 | 1.58 | 1.53 | 1.47 | 1.41 | 1.36 | 1.30 | 1.26 | 1.19 | 1.13 | 1.08 |
| | **6.66** | **4.62** | **2.80** | **3.34** | **3.04** | **2.82** | **2.66** | **2.53** | **2.43** | **2.34** | **2.26** | **2.20** | **2.09** | **2.01** | **1.89** | **1.81** | **1.71** | **1.61** | **1.54** | **1.44** | **1.38** | **1.28** | **1.19** | **1.11** |
| ∞ | 3.84 | 2.99 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.09 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.79 | 1.75 | 1.69 | 1+64 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.40 | 1.35 | 1.28 | 1.24 | 1.17 | 1.11 | 1.00 |
| | **6.64** | **4.60** | **3.78** | **3.32** | **3.02** | **2.80** | **2.64** | **2.51** | **2.41** | **2.32** | **2.24** | **2.18** | **2.07** | **1.99** | **1.87** | **1.79** | **1.69** | **1.59** | **1.52** | **1.41** | **1.36** | **1.25** | **1.15** | **1.00** |

*Fuente:* tomada de Pagano (2004)

Regla de decisión:

Si el $F_{\text{obtenido}}$ es ***mayor o igual*** al $F_{\text{crítico}}$ se rechaza hipótesis nula.

Si $F_{\text{obtenido}} \geq F_{\text{crítico}}$ ∴ se rechaza la $H_0$.

Si $F_{\text{obtenido}} < F_{\text{crítico}}$ ∴ no se rechaza la $H_0$.

# BIBLIOGRAFÍA

Coolican, H. (2004). *Métodos de investigación y estadística en psicología*, 3a ed. México: El Manual Moderno.

# Índice


Colaboradores 7
Revisores técnicos 10
Prefacio 11
Contenido 12
Capítulo 1. Introducción a la estadística 14
Capítulo 2. Conceptos iniciales 29
Capítulo 3. Análisis descriptivo de una variable cuantitativa 51
Capítulo 4. Introducción a la inferencia estadística 101
Capítulo 5. Relación entre variables: dos cuantitativas 132
Capítulo 6. Relación entre variables: una cualitativa categórica y una cuantitativa 173
Capítulo 7. Relación entre variables: dos variables cualitativas 218
Capítulo 8. Pruebas de diferencia sobre una variable cuantitativa 242
Capítulo 9. Pruebas de diferencia sobre una variable categórica ordinal 315
Capítulo 10. Prueba de diferencia sobre una variable categórica nominal 361
Capítulo 11. Pruebas de diferencia sobre una variable cuantitativa 383
Capítulo 12. Análisis de regresión lineal 446
Apéndices 482